



Esta obra está bajo una licencia Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 3.0 España

**Depósito legal.- LU-53-2012
ISBN-10.- 84-615-9741-9
ISBN-13.- 978-84-615-9741-3
3ª Edición.- Setembro 2017**

ÍNDICE

XEOMETRÍA PLANA

9

1 - TRAZADOS BÁSICOS

11

POTENCIA

11

1.1.-Potencia dun punto respecto dunha circunferencia

EIXO RADICAL

11

1.2.- Conceptos e definicións

1.3.- Eixo radical de dúas circunferencias

1.4.- Centro radical de tres circunferencias

RECTIFICACIÓN DA CIRCUNFERENCIA

13

1.5.-Rectificación dun arco de circunferencia menor de 90°

1.6.-Rectificación dunha circunferencia

EQUIVALENCIAS

14

1.7.- Debuxar un triángulo equivalente a outro

1.8.- Dado un polígono, debuxar outro equivalente cun lado menos

1.9.- Dado un cadrado, debuxar un triángulo equivalente

1.10.- Dado un hexágono, debuxar un triángulo equivalente

1.11.- Dado un triángulo, debuxar un rectángulo equivalente

1.12.- Dado un rectángulo, debuxar un cadrado equivalente

1.13.- Dado un pentágono, debuxar un rectángulo equivalente

1.14.- Debuxar un cadrado cuxa área sexa o dobre, triplo, cuádruplo... de outro dado

1.15.- Debuxar un cadrado cuxa área sexa o dobre de outro dado

1.16.- Debuxar un cadrado cuxa área sexa a suma da de outros dous dados

1.17.- Debuxar un cadrado equivalente a unha circunferencia dada

1.18.- Debuxar un círculo cuxa área sexa a suma da de outros dous

1.19.- Debuxar un círculo cuxa área sexa dobre, tripla, cuádrupla... da de outro dado

2 - TRAZADO DE POLÍGONOS

17

TRAZADO DE POLÍGONOS REGULARES DADO O RAIÓ

17

2.1.- Trazado do triángulo equilátero dado o raio da circunferencia na que está inscrito

2.2.- Trazado do cadrado dado o raio da circunferencia na que está inscrito

2.3.- Trazado do pentágono dado o raio da circunferencia na que está inscrito

2.4.- Trazado do hexágono dado o raio da circunferencia na que está inscrito

2.5.- Trazado do heptágono dado o raio da circunferencia na que está inscrito

2.6.- Trazado do octógono dado o raio da circunferencia na que está inscrito

TRAZADO DE POLÍGONOS REGULARES DADO O LADO

18

2.7.- Trazado do triángulo equilátero dado o lado

2.8.- Trazado do pentágono dado o lado

2.9.- Trazado do heptágono dado o lado

2.10.- Trazado do octógono dado o lado

3 - TRANSFORMACIÓNS XEOMÉTRICAS

21

HOMOLOXÍA

21

3.1.- Obter un punto homólogo doutro dado

3.2.- Dados dous puntos homólogos, obter o homólogo doutro aliñado con eles

3.3.- Rectas límite

3.4.- Trazado de figuras homólogas

3.5.- Homoloxía dunha circunferencia

AFINIDADE	24
3.6.- Trazado de figuras afíns	
3.7.- Figura afín dunha circunferencia	
HOMOTECIA	25
INVERSIÓN	26
3.8.- Figura inversa dunha circunferencia que pasa polo centro de inversión	
3.9.- Dado o centro de inversión e dous puntos inversos obter a figura inversa dunha circunferencia dada	
3.10.- Figura inversa dunha circunferencia que non pasa polo centro de inversión	
3.11.- Dado o centro de inversión e dous puntos inversos obter a figura inversa dunha circunferencia dada	
4 - TANXENCIAS	29
CONCEPTOS BÁSICOS	29
RESOLUCIÓN DE TANXENCIAS	29
4.1.- Circunferencias tanxentes a unha recta pasando por dous puntos	
4.2.- Circunferencias tanxentes a dúas rectas pasando por un punto	
4.3.- Circunferencias tanxentes a dúas rectas e a unha circunferencia	
4.4.- Circunferencias tanxentes a tres rectas que se cortan	
4.5.- Circunferencias tanxentes a outra pasando por dous puntos	
4.6.- Circunferencias tanxentes a outra e a unha recta pasando por un punto	
4.7.- Circunferencias tanxentes a outras dúas pasando por un punto	
4.8.- Circunferencias tanxentes a outra, pasando por un punto e cos centros nunha recta dada	
4.9.- Circunferencias tanxentes a tres circunferencias (problema de Apolonio)	
5 - CURVAS CÍCLICAS E TÉCNICAS	37
CONCEPTOS	37
CICLOIDE	37
5.1.- Trazado da CICLOIDE	
EPICICLOIDE	38
5.2.- Trazado da EPICICLOIDE	
HIPOPICICLOIDE	39
5.3.- Trazado da HIPOPICICLOIDE	
CARDIOIDE OU CARACOL DE PASCAL	40
5.4.- Trazado da CARDIOIDE	
EVOLVENTE DUNHA CIRCUNFERENCIA	40
5.5.- Trazado da EVOLVENTE	
6 - CURVAS CÓNICAS	43
CONCEPTOS E CURIOSIDADES	43
RECTAS TANXENTES ÁS CÓNICAS	43
6.1.- Rectas tanxentes á elipse dende un punto exterior	
6.2.- Rectas tanxentes á elipse paralelas a unha dirección	
6.3.- Rectas tanxentes á hipérbole dende un punto exterior	
6.4.- Rectas tanxentes á hipérbole paralelas a unha dirección	
6.5.- Rectas tanxentes á parábola dende un punto exterior	
6.6.- Rectas tanxentes á parábola paralelas a unha dirección	
INTERSECCIÓN DUNHA RECTA COAS CÓNICAS	45
6.7.- Intersección dunha recta coa elipse	
6.8.- Intersección dunha recta coa hipérbole	
6.9.- Intersección dunha recta coa parábola	

1 - FERRAMENTAS DE TRABALHO (2)

51

XIROS

51

- 1.1.- Xiro dun punto
- 1.2.- Xiro dunha recta
- 1.3.- Xiro dun plano

CAMBIOS DE PLANO

52

- 1.4.- O punto no cambio de plano
- 1.5.- A recta no cambio de plano
- 1.6.- O plano no cambio de plano

2 - ÁNGULOS

55

- 2.1.- Ángulo dunha recta cos planos de proxección
- 2.2.- Ángulo dun plano cos planos de proxección
- 2.3.- Ángulo entre dúas rectas que se cortan
- 2.4.- Ángulo entre recta e plano
- 2.5.- Ángulo entre dous planos

3 - VOLUMES

59

CONCEPTOS XERAIS

59

- 3.0.- Tódolos volumes son o mesmo

INTERSECCIÓN DUN VOLUME CUN PLANO

59

- 3.1.- Intersección dunha pirámide cun plano proxeitante
- 3.2.- Intersección dun prisma cun plano proxeitante
- 3.3.- Intersección dun cono cun plano proxeitante
- 3.4.- Intersección dun cilindro cun plano proxeitante
- 3.5.- Intersección dunha pirámide cun plano calquera
- 3.6.- Intersección dun prisma cun plano calquera

INTERSECCIÓN DUN VOLUME CUNHA RECTA

63

- 3.7.- Intersección dunha pirámide cunha recta
- 3.8.- Intersección dun prisma cunha recta
- 3.9.- Intersección dun cono cunha recta
- 3.10.- Intersección dun cilindro cunha recta

A ESFERA

65

- 3.11.- Intersección dunha esfera cun plano proxeitante
- 3.12.- Intersección dunha esfera cunha recta

PLANO TANXENTE A UN VOLUME

66

- 3.13.- Plano tanxente a un cono
- 3.14.- Plano tanxente a un cilindro

DEBUXO DUN VOLUME EN CALQUERA POSICIÓN

67

- 3.15.- Volume apoiado nun plano calquera

DESENVOLVEMENTO DE VOLUMES

68

- 3.16.- Desenvolvemento dunha pirámide oblicua
- 3.17.- Desenvolvemento dun prisma oblicuo
- 3.18.- Desenvolvemento dun cono recto
- 3.19.- Desenvolvemento dun cono oblicuo
- 3.20.- Desenvolvemento dun cilindro oblicuo

4 - POLIEDROS	73
TETRAEDRO	73
4.1.- TETRAEDRO cunha cara apoiada no plano horizontal	
4.2.- TETRAEDRO cunha cara paralela ao PH e un vértice no PH	
4.3.- TETRAEDRO cunha aresta paralela ao PH e outra no PH	
HEXAEDRO OU CUBO	74
4.4.- CUBO cunha cara apoiada no plano horizontal	
4.5.- CUBO cunha aresta no PH	
4.6.- CUBO cunha diagonal vertical	
OCTAEDRO	75
4.7.- OCTAEDRO cunha diagonal vertical	
4.8.- OCTAEDRO cunha cara apoiada no PH	
DEBUXAR UN POLIEDRO EN CALQUERA POSICIÓN	76
4.9.- Debuxar un CUBO dada a súa diagonal	
DODECAEDRO	79
4.10.- DODECAEDRO cunha cara apoiada no plano horizontal	
ICOSAEDRO	79
4.11.- ICOSAEDRO cunha diagonal vertical	
INTERSECCIÓN DE POLIEDROS	80
4.12.- Intersección dun poliedro cun plano	
4.13.- Intersección dun poliedro cunha recta	

1 - VOLUMES

85

PERSPECTIVA AXONOMÉTRICA DE VOLUMES

85

- 1.1.- Como ler as vistas dunha peza ou volume
- 1.2.- Debuxo dun volume en ISOMETRÍA
- 1.3.- Debuxo dun volume en PERSPECTIVA CABALEIRA
- 1.4.- Debuxo dun volume en PERSPECTIVA MILITAR
- 1.5.- Debuxo dun volume calquera nunha AXONOMETRÍA

SISTEMA CÓNICO

91

1 - PERSPECTIVA CÓNICA OU LIÑAL

93

SISTEMA CÓNICO

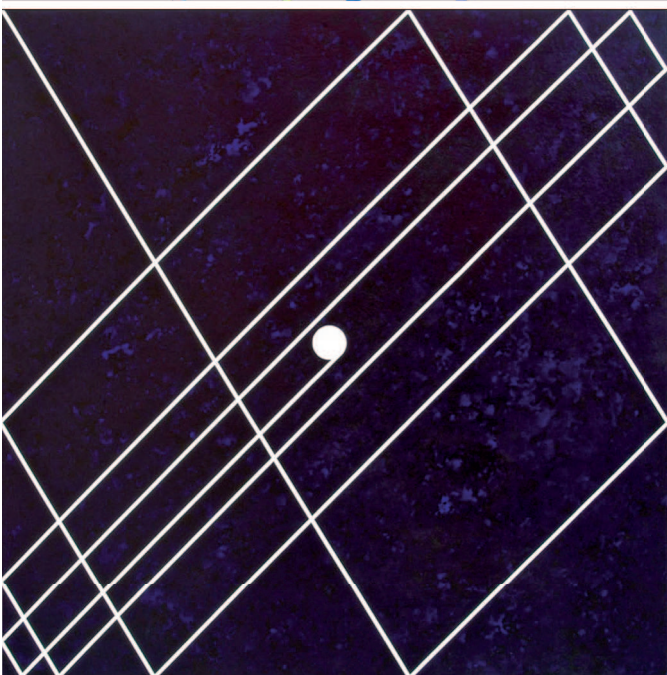
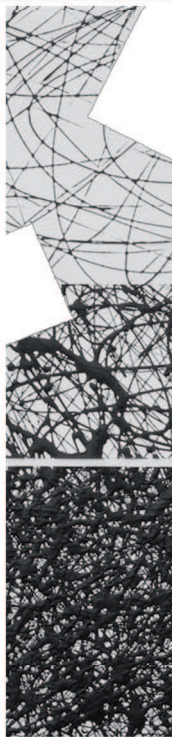
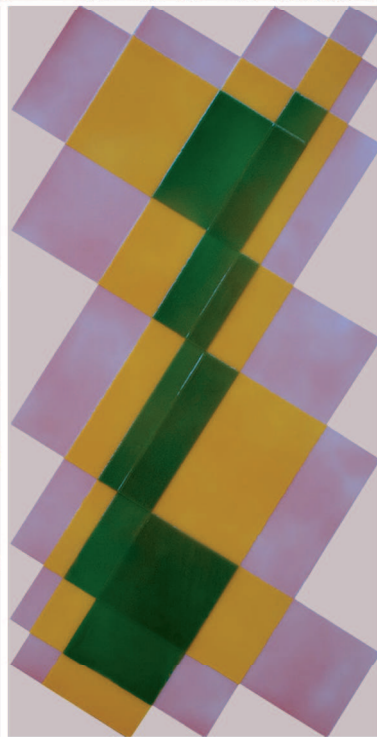
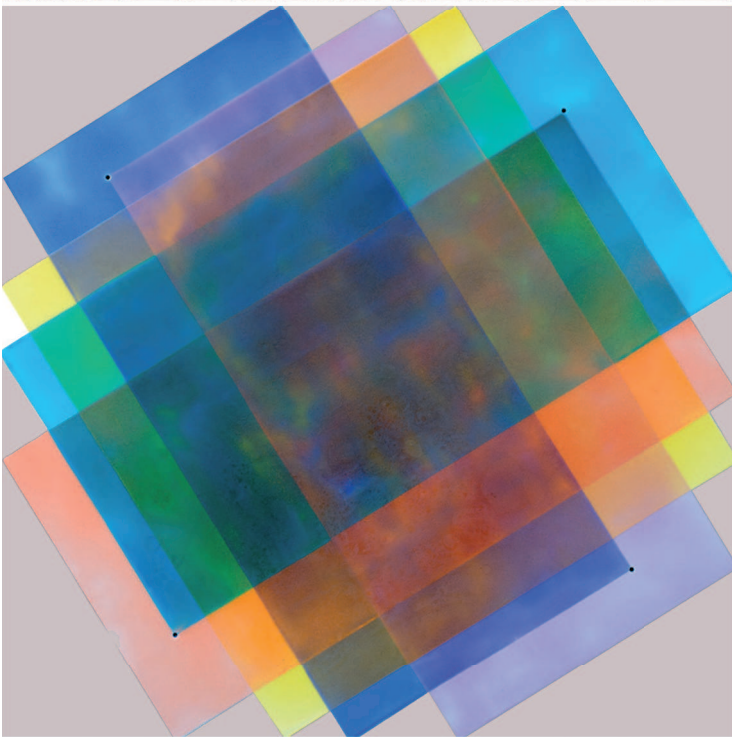
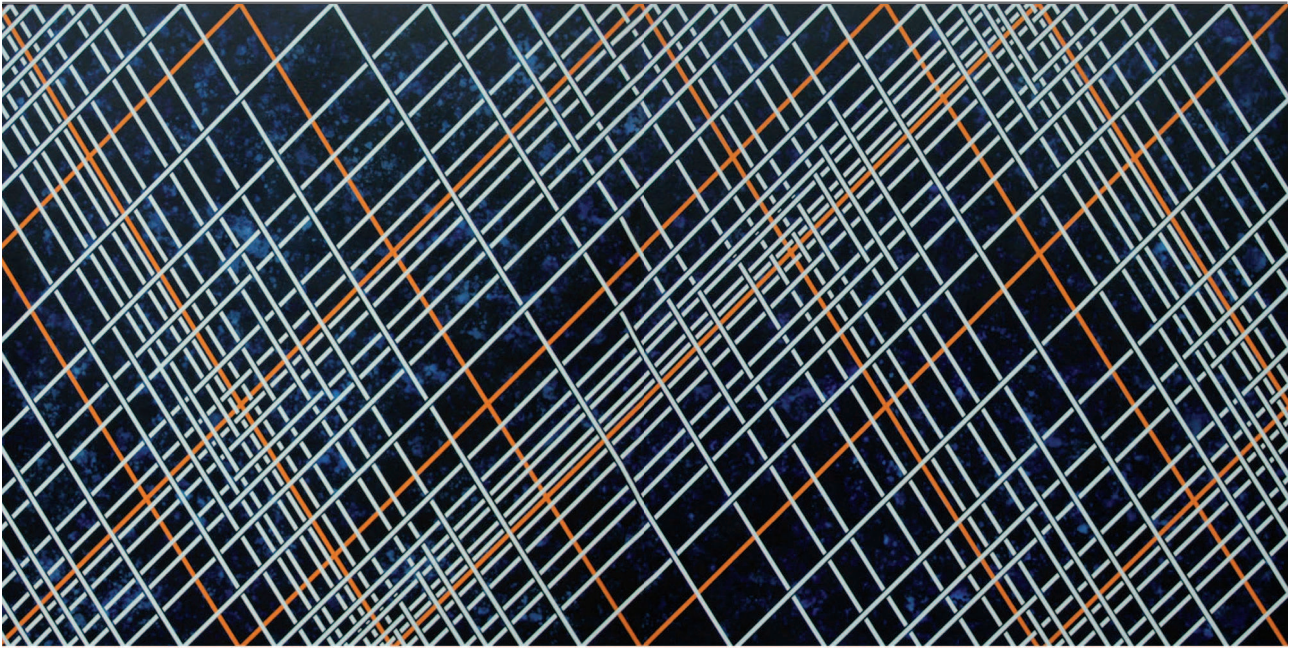
93

1.0.- Conceptos

1.1.- Trazado da perspectiva cónica

1.2.- Perspectiva cónica cun punto de fuga

1.3.- Perspectiva cónica con varios puntos de fuga



1 - TRAZADOS BÁSICOS

POTENCIA

1.1.- Potencia dun punto respecto dunha circunferencia - F-1.1/3

Dado o punto **A** e a circunferencia de centro **O**.

Definimos como **potencia do punto A con respecto á circunferencia de centro O** ao produto dos segmentos en que unha recta que pase por **A** e corte á circunferencia, queda dividida polo punto **A** e os puntos de corte con ela.

A potencia do punto **A** con respecto á circunferencia é constante e independente da recta que collamos. Deste xeito cumprirase:

$$AB \times AC = AD \times AE \dots = AF \times AG$$

Para nós, en **Xeometría Descritiva** (manifestación gráfica da Xeometría Analítica) a expresión gráfica da potencia do punto **A** respecto á circunferencia de centro **O** será o **segmento da recta tanxente á circunferencia pasando por A**; ou sexa, o segmento **AF**, tendo en conta que é un valor ó cadrado posto que en realidade é **AF x AG**.

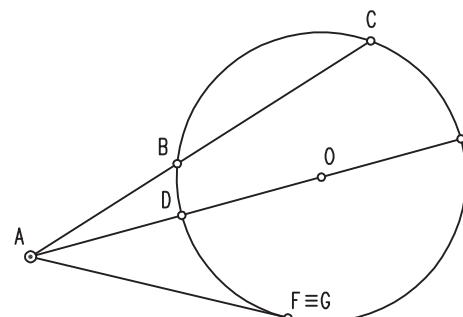
A potencia é positiva cando o punto A está fora da circunferencia posto que, en calquera sistema de coordenadas, o produto de **AB x AC** (F-1.1) será o produto de dúas distancias do mesmo signo (as dúas están medidas no mesmo sentido) polo que será un produto de dous valores positivos (resultado positivo) ou de dous valores negativos (resultado positivo).

A potencia é negativa cando o punto A está dentro da circunferencia posto que, en calquera sistema de coordenadas, o produto de **AB x AC** (F-1.2) será o produto de dúas distancias de distinto signo (están medidas en sentidos opostos) polo que será un produto dun valor positivo por outro negativo o que dará, sempre, un resultado negativo.

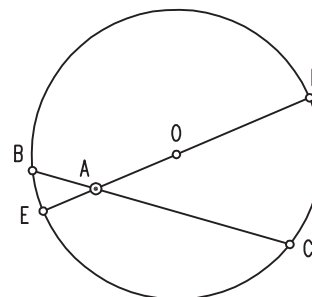
A potencia é nula (**0**) cando o punto **A** está na circunferencia (lógicamente se pasamos de valor positivo fora da circunferencia a valor negativo dentro da circunferencia é lóxico pensar que ten que haber un punto de transición no que o valor sexa **0**). Se o punto **A** está na circunferencia (F-1.3), cumprirase:

$$AB \times AC = AB \times AD \dots$$

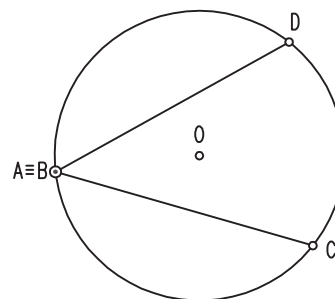
Como **AB** vale **0**, o produto de calquera medida por **0** dará, sempre, un resultado nulo.



F-1.1



F-1.2



F-1.3

EIXO RADICAL

1.2.- Conceptos e definicións

LUGAR XEOMÉTRICO: En Xeometría chamamos lugar xeométrico ao **conxunto dos puntos que cumpren unha determinada condición**.

Unha circunferencia é o lugar xeométrico dos puntos que equidistan de outro fixo (chamado centro) unha determinada distancia (chamada radio). Xa temos visto unha morea de lugares xeométricos: Óvalos, ovoides, cónicas, polígonos. En resumo, calquera figura xeométrica pode ser definida coma un lugar xeométrico.

EIXO RADICAL DE DÚAS CIRCUNFERENCIAS: É o **lugar xeométrico dos puntos que teñen a mesma potencia con respecto ás dúas circunferencias** (ou sexa, as tanxentes dende calquera punto do eixo ás dúas circunferencias medirán o mesmo).

1.3.- Eixo radical de dúas circunferencias - F-1.4/7

Dadas as **circunferencias** de centros O_1 e O_2 .

O **conxunto dos puntos que teñen a mesma potencia con respecto a dúas circunferencias calquera forman, sempre, unha recta** (isto é así, é un feito). Outra característica desta recta é que, sempre, **é perpendicular á recta que une os centros das dúas circunferencias**.

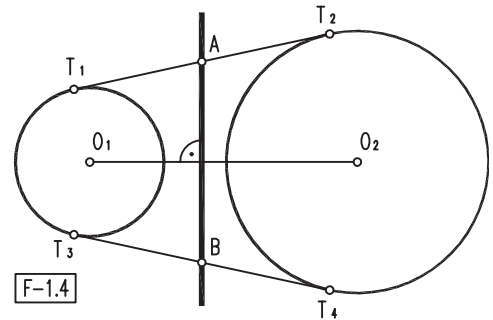
Para obter o eixo radical de dúas circunferencias (**F-1.4**) deberiamos obter as rectas tanxentes exteriores a elas e, nos seus puntos medios, teriamos dous puntos **A** e **B** do eixo radical. Podemos comprobar que a recta resultante é perpendicular á que une os centros O_1 e O_2 .

Xa coñecemos o procedemento gráfico de obtención das rectas tanxentes exteriores a dúas circunferencias (Ver **DEBUXO TÉCNICO I**, páx. 37) e o trazado leva o seu tempo; vexamos se temos outro xeito máis sinxelo de facelo.

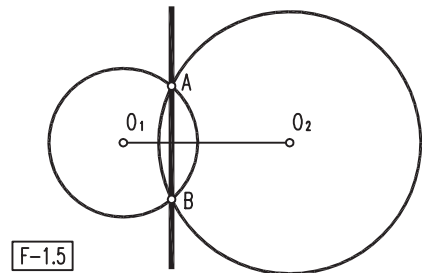
Cando temos **dúas circunferencias que se cortan (F-1.5)** a obtención do eixo radical é moi sinxela: Os puntos de corte **A** e **B** das dúas circunferencias teñen potencia **0** con respecto a ámbalas dúas, polo que os unimos e temos o eixo radical (que, efectivamente, é perpendicular á recta que une os centros O_1 e O_2).

Como consecuencia lóxica do anterior, cando temos **dúas circunferencias tanxentes (F-1.6)** o eixo radical será unha recta perpendicular á que une os centros O_1 e O_2 , pasando polo punto de tanxencia **A**.

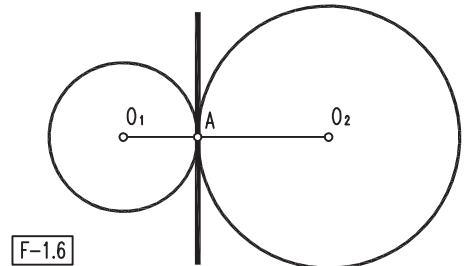
Polo tanto, un **método sinxelo de obter o eixo radical de dúas circunferencias calquera (F-1.7)**, consiste en usar unha circunferencia auxiliar que corte ás dúas e obter os eixos radicais da circunferencia auxiliar con cada unha das dadas. O punto de corte **A** dos dous eixos radicais será, necesariamente, un punto do eixo radical das circunferencias dadas de centros O_1 e O_2 (o punto **A** ten a mesma potencia con respecto ás circunferencias dadas e á circunferencia auxiliar); se trazamos por **A** unha recta perpendicular á que une os centros O_1 e O_2 teremos o eixo radical buscado, sen necesidade de obter as rectas tanxentes comúns a elas tal e como vimos na **F-1.4**.



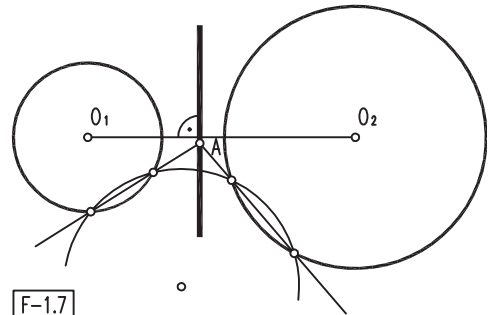
F-1.4



F-1.5



F-1.6

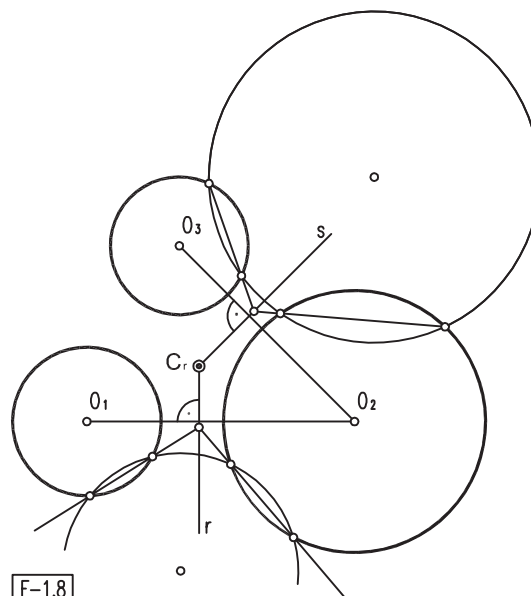


F-1.7

1.4.- Centro radical de tres circunferencias - F-1.8

Soamente existe un punto que teña a mesma potencia con respecto a tres circunferencias e será, necesariamente, o punto de intersección dos eixos radicais de cada dúas circunferencias.

Dadas as **circunferencias** de centros O_1 , O_2 e O_3 . Collemos dúas circunferencias auxiliares (unha que corte ás de centros O_1 e O_2 e outra ás de centros O_2 e O_3) e obtemos os eixos radicais r e s ; o punto de corte Cr será o centro radical buscado.



F-1.8

RECTIFICACIÓN DA CIRCUNFERENCIA

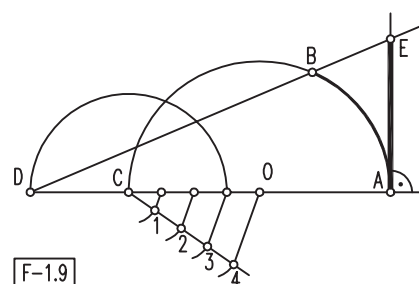
Rectificar unha circunferencia ou un arco de circunferencia é obter o segmento recto cuxa media coincida coa lonxitude da circunferencia ou do arco.

Tendo en conta que na lonxitude da circunferencia ($2\pi r$) entra o número irracional π , a rectificación dunha circunferencia ou dun arco de circunferencia serán, necesariamente, **aproximados**.

Podemos rectificar calquera arco de circunferencia con soamente dous métodos: O da **rectificación da circunferencia completa** e o da **rectificación dun arco menor de 90°**. Tendo en conta que a mediatriz do segmento rectificado da circunferencia completa dará a rectificación dun arco de 180° e a mediatriz deste a dun arco de 90°, combinando os dous procedementos que imos explicar poderemos rectificar un arco de circunferencia de calquera número de graos.

1.5.- Rectificación dun arco de circunferencia menor de 90° - F-1.9

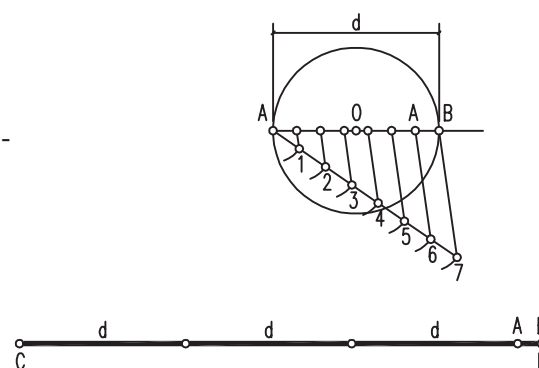
Dado o arco **AB** da circunferencia de centro **O**. Dividimos o raio **OC** en catro partes iguais. Facendo centro en **C** e con raio ate a 3ª división, trazamos unha semicircunferencia e obtemos o punto **D**. Unimos **D** con **B** e, onde corte á perpendicular trazada por **A**, teremos o punto **E**. O segmento **AE** terá a mesma lonxitude que o arco **AB**.



F-1.9

1.6.- Rectificación dunha circunferencia - F-1.10

Dada a circunferencia de centro **O** e diámetro **d**. dividimos o diámetro da circunferencia en 7 partes iguais. O segmento **CD**, rectificado da circunferencia, terá unha lonxitude de **3 veces o diámetro d máis un sétimo do diámetro**.



F-1.10

EQUIVALENCIAS

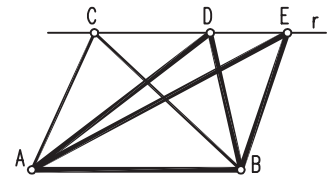
Dúas figuras xeométricas son equivalentes cando teñen a mesma superficie, independentemente da forma de cada unha delas.

1.7.- Debuxar un triángulo equivalente a outro - F-1.11

Dado o triángulo **ABC**.

Trazamos polo vértice superior **C** unha paralela á base. Unindo calquera punto (**D** ou **E**) desta paralela cos extremos **A** e **B** da base teremos un triángulo equivalente ó dado. Existen infinitas solucións.

F-1.11

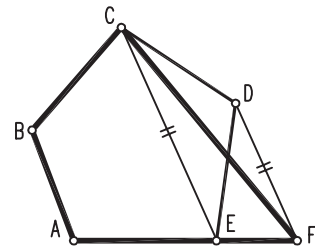


1.8.- Dado un polígono, debuxar outro equivalente cun lado menos - F-1.12

Dado o polígono **ABCDE**.

Unimos un extremo **E** da base co vértice non consecutivo **C** e, polo vértice intermedio **D**, trazamos unha paralela a esa recta que cortará á prolongación da base no punto **F**. Unindo **C** con **F** teremos o polígono **ABCF** equivalente ó dado e cun vértice menos.

F-1.12



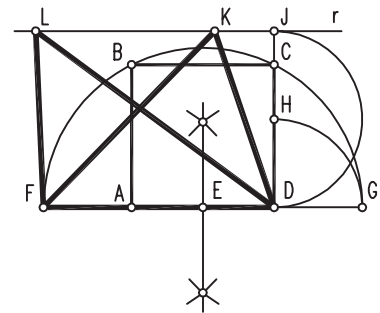
1.9.- Dado un cadrado, debuxar un triángulo equivalente - F-1.13

Dado o cadrado **ABCD**.

Trazamos a mediatriz da base e obtemos o punto medio **E**. Con centro en **E** e raio **EB** trazamos unha semicircunferencia que cortará á prolongación da base nos puntos **F** e **G**.

Con centro en **D** e radio **DG** trazamos un arco de circunferencia e obtemos o punto **H**. Con centro en **H** e radio **HD** trazamos unha semicircunferencia que cortará á prolongación do lado **DC** no punto **J**. Trazando por **J** unha recta **r** paralela á base do cadrado teremos o lugar xeométrico dos vértices dos infinitos triángulos que, coa base **FD**, serán equivalentes a el. Dous exemplos de triángulos equivalentes ó cadrado dado son **FKD** ou **FLD**.

F-1.13



1.10.- Dado un hexágono, debuxar un triángulo equivalente - F-1.14

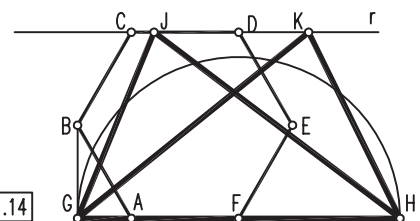
Dado o hexágono **ABCDEF**.

Trazamos unha perpendicular á base **AF** por un dos puntos intermedios (no noso caso o **B**) e obtemos o punto **G**.

Con centro no extremo **F** da base e raio **FG** trazamos unha semicircunferencia, que cortará á prolongación da base en **H**.

GH será a base dos infinitos triángulos equivalentes ó hexágono dado. Os vértices estarán en calquera punto dunha recta **r** que coincida co lado superior **CD** paralelo á base **AF**. Dous exemplos de solución son os triángulos **GJH** e **GKH**.

F-1.14



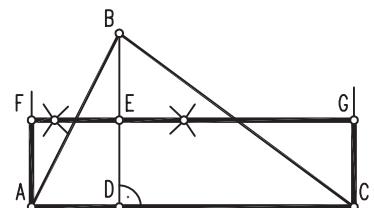
1.11.- Dado un triángulo, debuxar un rectángulo equivalente - F-1.15

Dado o triángulo **ABC**.

O rectángulo equivalente ó triángulo terá por base un dos lados do triángulo e por altura a metade da altura do triángulo con respecto a ese lado.

Tomamos como un dos lados do rectángulo a base **AC** do triángulo. Trazamos a altura correspondente a ese lado (Unha perpendicular ó lado dende o vértice oposto **B**). Facemos a mediatriz da altura **BD** e obtemos o punto medio **E**. Por **E** trazamos unha paralela á base **AC** e por **A** e **C** levantamos perpendiculares para obter os lados laterais do rectángulo equivalente **AFGC**.

F-1.15

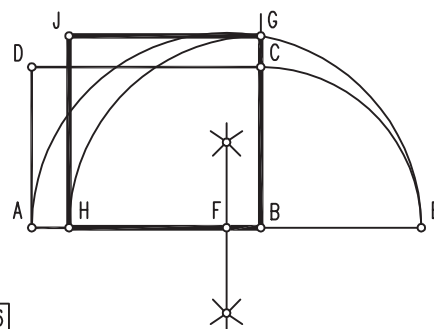


1.12.- Dado un rectángulo, debuxar un cadrado equivalente - F-1.16

Dado o rectángulo **ABCD**.

Facendo centro no extremo **B** da base trazamos un arco con raio o lado **BC** e cortamos no punto **E** á prolongación da base do rectángulo dado.

Facemos a mediatriz do segmento **AE** obtendo o punto **F**. Con centro en **F** trazamos a semicircunferencia de raio **AF**. Prolongamos o lado **BC** e cortamos á semicircunferencia en **G**. **BG** será o lado do cadrado equivalente ó rectángulo dado. Aplicando o método de trazado xa visto, obtemos o cadrado equivalente **HBGJ**.



F-1.16

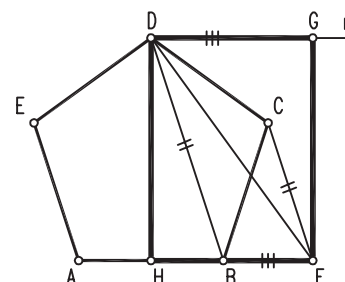
1.13.- Dado un pentágono, debuxar un rectángulo equivalente - F-1.17

Dado o pentágono **ABCDE**.

Este método baséase no visto no apartado 1.8.

Aplicando o visto en 1.8 reducimos un dos vértices do pentágono (unimos **B** con **D** e tramos unha paralela a ela por **C**, obtendo o punto **F**).

Dado que o triángulo rectángulo **HFD** é o equivalente á metade do pentágono dado, o duplicamos e obtemos o rectángulo buscado **HFGD**.



F-1.17

1.14.- Debuxar un cadrado cuxa área sexa o dobre, tripla, cuádruplo... de outro dado. F-1.18

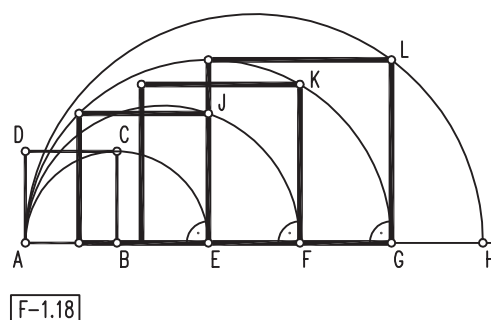
Dado o cadrado **ABCD**.

Prolongamos o lado da base do cadrado dado e levamos, a continuación do vértice, a medida do lado **AB**. Se queremos trazar un cadrado de área dobre levamos o lado dúas veces (e obtemos o punto **F**), se o queremos de área tripla, tres veces (e obtemos o punto **G**), se o queremos de área cuádrupla, catro veces (e obtemos o punto **H**), e así sucesivamente.

Cadrado de área dobre: Trazamos a semicircunferencia de diámetro **AF** e levantamos unha perpendicular á base polo punto **E** obtendo o punto de intersección **J**. **EJ** será o lado do cadrado de área dobre do dado.

Cadrado de área tripla: Trazamos a semicircunferencia de diámetro **AG** e levantamos unha perpendicular á base polo punto **F** obtendo o punto de intersección **K**. **FK** será o lado do cadrado de área tripla do dado.

Cadrado de área cuádrupla: Trazamos a semicircunferencia de diámetro **AH** e levantamos unha perpendicular á base polo punto **G** obtendo o punto de intersección **L**. **GL** será o lado do cadrado de área cuádrupla do dado.



F-1.18

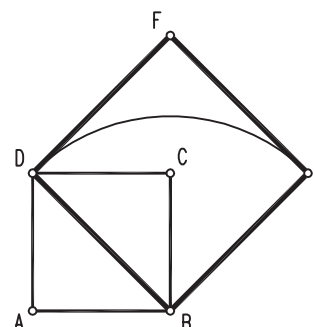
1.15.- Debuxar un cadrado cuxa área sexa o dobre de outro dado - F-1.19

Este é un método máis sinxelo que o anterior.

Dado o cadrado **ABCD**.

O lado do cadrado cuxa área sexa o dobre de outro será a súa diagonal.

O cadrado **BEFD** ten por lado a diagonal **BD** do cadrado dado e por área o dobre da del.



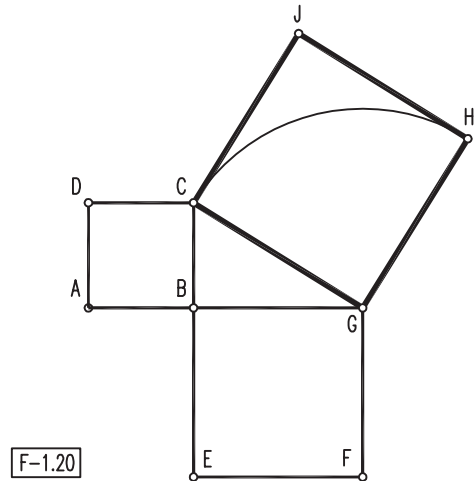
F-1.19

1.16.- Debuxar un cadrado cuxa área sexa a suma da de outros dous dados - F-1.20

Dados os cadrados **ABCD** e **EFGB**.

O lado do cadrado suma será a hipotenusa dun triángulo rectángulo cuxos catetos sexan os lados dos cadrados dados.

Aplicando isto sucesivas veces poderíamos obter un cadrado de área igual á suma de outros tres, catro, etc.



F-1.20

1.17.- Debuxar un cadrado equivalente a unha circunferencia dada - F-1.21

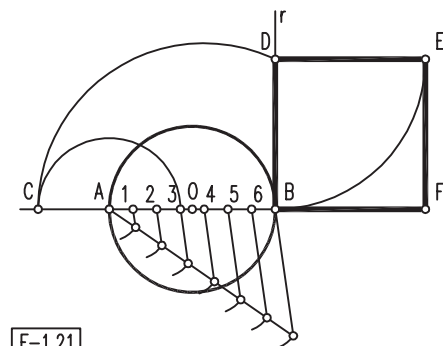
Este trazado tamén é coñecido como a **cadrtura do círculo**. Como xa dixemos en ocasións anteriores, este método é aproximado.

Dada a circunferencia de centro **O** e diámetro **AB**.

Dividimos o diámetro **AB** en **7 partes iguais**.

Facendo centro en **A** con raio **A3** trazamos unha semicircunferencia e obtemos o punto **C** na prolongación do diámetro.

Con centro no punto **4** e raio **C4** trazamos un arco, que cortará á recta **r** (perpendicular ó diámetro) trazada por **B** no punto **D**. O segmento **BD** será o lado do cadrado equivalente á circunferencia dada.



F-1.21

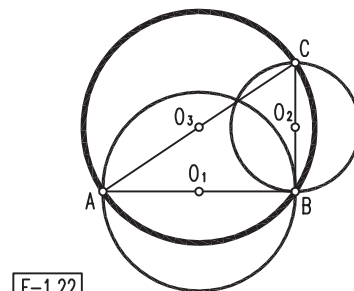
1.18.- Debuxar un círculo cuxa área sexa a súa da de outros dous - F-1.22

Este é, de novo, un método aproximado.

Dadas as circunferencias de centros **O₁** e **O₂**.

O diámetro do círculo suma será a hipotenusa dun triángulo rectángulo cuxos catetos sexan os diámetros dos círculos dados.

Podemos ver que este método é unha aplicación directa do explicado no punto **1.16**.



F-1.22

1.19.- Debuxar un círculo cuxa área sexa dobre, tripla, cuádrupla... da de outro dado. F-1.23

Dado o círculo de diámetro **AB**.

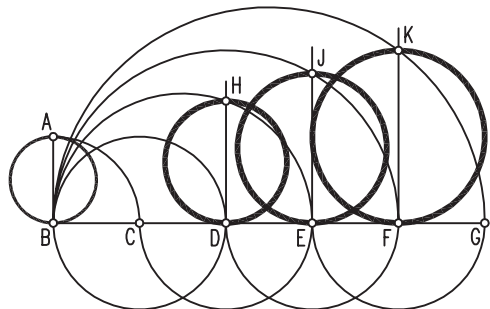
Trazamos unha recta perpendicular ó diámetro **AB** polo extremo **B**. Levamos, a continuación de B, a mediada do diámetro **AB** dúas, tres, catro veces segundo queiramos trazar un círculo de área dobre, tripla ou cuádrupla da dada.

Círculo de área dobre: Trazamos a semicircunferencia de diámetro **BE**. Trazamos unha perpendicular a **BG** por **D**, que cortará a semicircunferencia anterior en **H**. **DH** será o diámetro do círculo de área dobre da do dado.

Círculo de área tripla: Trazamos a semicircunferencia de diámetro **BF**. Trazamos unha perpendicular a **BG** por **E**, que cortará a semicircunferencia anterior en **J**. **EJ** será o diámetro do círculo de área tripla da do dado.

Círculo de área cuádrupla: Trazamos a semicircunferencia de diámetro **BG**. Trazamos unha perpendicular a **BG** por **F**, que cortará a semicircunferencia anterior en **K**. **FK** será o diámetro do círculo de área cuádrupla da do dado.

Podemos ver que este método é unha aplicación directa do explicado no punto **1.14**.



F-1.23

2 - TRAZADO DE POLÍGONOS

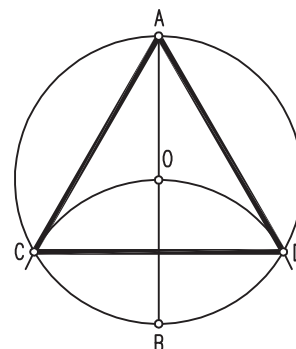
TRAZADO DE POLÍGONOS REGULARES DADO O RAIÓ

Vimos anteriormente (Ver **DEBUXO TÉCNICO I**, páx. 26) os métodos xerais do trazado de polígonos regulares. Os métodos xerais son os que nos permiten, con un só método, trazar calquera polígono regular, pero o seu trazado leva mais tempo de execución que os **métodos particulares** de cada un dos polígonos; imos ver estes.

2.1.- Trazado do triángulo equilátero dado o raio da circunferencia na que está inscrito - F-2.1

Trazamos, co raio dado, unha circunferencia de centro **O**.
Trazamos un diámetro calquera **AB** e, facendo centro no extremo **B** e co raio dado, trazamos un arco que pasará polo centro **O** e cortará á circunferencia en dous puntos **C** e **D**.
O segmento **CD** será a base do triángulo equilátero. Unindo **C** e **D** con **A** teremos o triángulo equilátero completo.

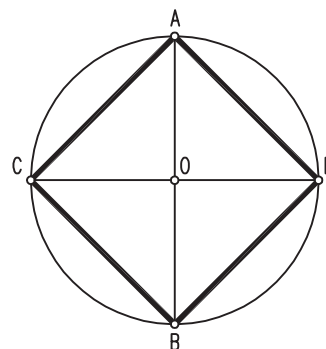
F-2.1



2.2.- Trazado do cadrado dado o raio da circunferencia na que está inscrito - F-2.2

Trazamos, co raio dado, unha circunferencia de centro **O**.
Debuxamos dous diámetros **AB** e **CD** perpendiculares entre si.
Unimos os catro extremos **A**, **B**, **C** e **D** e teremos o cadrado.

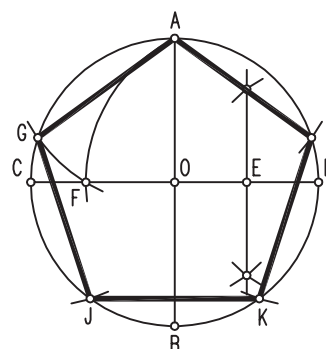
F-2.2



2.3.- Trazado do pentágono dado o raio da circunferencia na que está inscrito - F-2.3

Trazamos, co raio dado, unha circunferencia de centro **O**.
Debuxamos dous diámetros **AB** e **CD** perpendiculares entre si.
Trazamos a mediatriz de **OD** e obtemos o punto medio **E**. Con centro en **E** e raio **EA** trazamos un arco que cortará ó diámetro **CD** en **F**. O segmento **AF** é o lado do pentágono.
Facendo centro en **A** con raio **AF** levamos o lado sobre a circunferencia, obtendo o punto **G**. Levando o lado co compás sucesivamente obtemos o pentágono.

F-2.3



Como podemos observar, este trazado está baseado no do rectángulo áureo (Ver **DEBUXO TÉCNICO I**, páx. 31) pois entre o lado e a diagonal do pentágono regular existe unha proporción áurea.

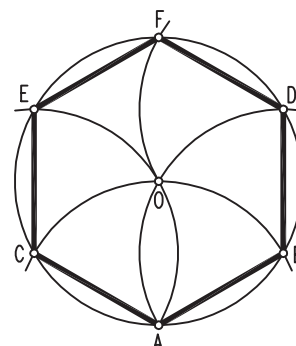
2.4.- Trazado do hexágono dado o raio da circunferencia na que está inscrito - F-2.4

Trazamos, co raio dado, unha circunferencia de centro **O**.
O hexágono é un caso moi particular (e moi sinxelo) de trazado pois:

O raio da circunferencia na que está inscrito un hexágono regular é igual ó lado.

Con raio o da circunferencia levamos a medida sucesivas veces sobre ela e terémolo hexágono.

F-2.4

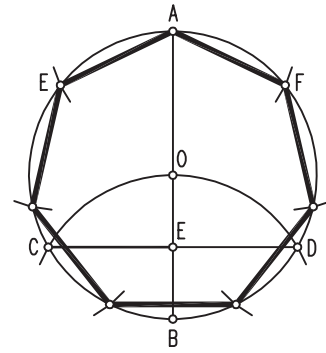


2.5.- Trazado do heptágono dado o raio da circunferencia na que está inscrito - F-2.5

Trazamos, co raio dado, unha circunferencia de centro **O**. O lado dun heptágono inscrito en unha circunferencia é a metade do lado do triángulo equilátero inscrito na mesma circunferencia. Tendo isto en conta podemos trazar o heptágono baseándonos no trazado do triángulo equilátero.

Facemos o dito no apartado 2.1. O segmento **CE** (a metade do **CD** que é o lado do triángulo equilátero) será o lado do heptágono. Collemos a medida **CE** co compás e a levamos sucesivamente sobre a circunferencia para obter o heptágono regular.

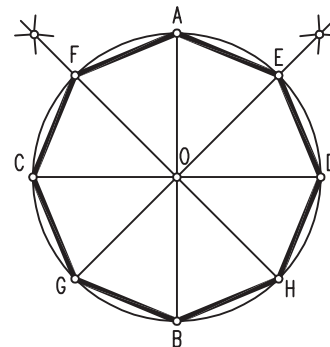
F-2.5



2.6.- Trazado do octógono dado o raio da circunferencia na que está inscrito - F-2.6

Trazamos, co raio dado, unha circunferencia de centro **O**. Para obter o octógono facemos o dito no apartado 2.2 para debuxar o cadrado. Unha vez trazados os dous diámetros perpendiculares, teremos os puntos **A, B, C** e **D**, catro dos vértices do octógono. Trazamos as bisectrices dos ángulos de 90° que forman os diámetros e, onde corten á circunferencia, teremos **E, F, G** e **H**, os catro vértices que nos faltaban.

F-2.6



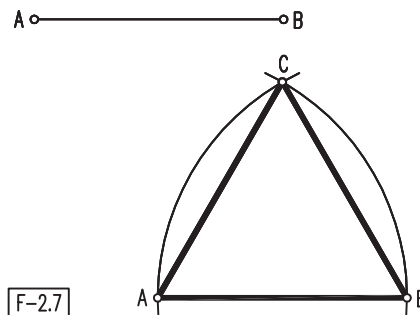
TRAZADO DE POLÍGONOS REGULARES DADO O LADO

2.7.- Trazado do triángulo equilátero dado o lado - F-2.7

Dado o lado **AB**.

Con radio **AB** e centro en **A** trazamos un arco e, con centro en **B**, trazamos outro que cortará o anterior no punto **C**, vértice superior do triángulo equilátero.

F-2.7



O método de trazado do cadrado dado o lado xa o coñecemos (Ver **DEBUXO TÉCNICO I**, páx. 23, apdo. 2.11)

2.8.- Trazado do pentágono dado o lado - F-2.8

Dado o lado **AB**.

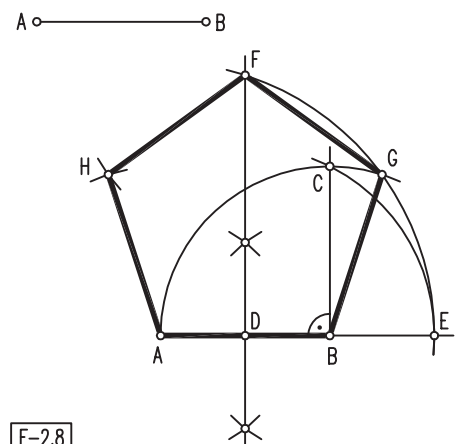
O método de trazado do pentágono regular dado o lado está baseado (é o mesmo) no trazado do **rectángulo áureo** (Ver **DEBUXO TÉCNICO I**, páx. 23, apdo. 2.11) pois o que facemos é obter, partindo do lado do pentágono, a súa diagonal (como xa dixemos, o lado do pentágono está en proporción áurea coa diagonal do mesmo).

Levantamos unha perpendicular ó lado **AB** polo extremo **B**. Facendo centro en **B**, levamos a medida do lado sobre a perpendicular e obtémolo punto **C**.

Facemos a mediatriz do lado **AB** e obtemos o punto medio **D**. Con centro en **D** e radio **DC** trazamos un arco que cortará á prolongación do lado en **E**. **AE** é a medida da diagonal do pentágono.

Con centro en **A** e radio **AE** cortamos á mediatriz do lado **AB** en **F** (vértice superior do pentágono). Con centro en **F** e raio **AB** trazamos dous arcos que se cortarán con outros dous trazados, co mesmo raio, e centros en **A** e **B**; obtendo así os vértices **G** e **H** do pentágono. Unindo os vértices obtidos teremos o pentágono regular.

F-2.8



2.9.- Trazado do heptágono dado o lado - F-2.9

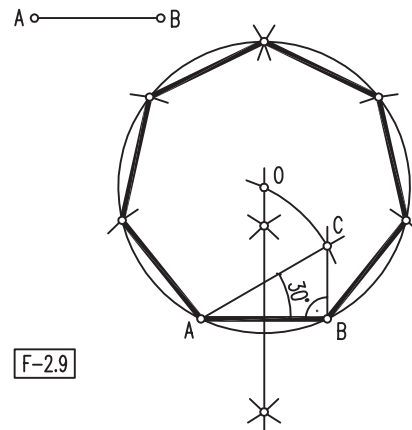
Dado o lado **AB**.

Levantamos unha perpendicular ó lado **AB** polo extremo **B**. Trazamos, a partir do vértice **A**, un ángulo de 30° que cortará á perpendicular anterior en **C**.

Facemos a mediatriz do lado **AB** e, con centro en **A** e raio **AC**, trazamos un arco que a cortará en **O**, que é o centro da circunferencia na que estará inscrito o heptágono regular buscado.

Con centro en **O** e raio **OA** trazamos a circunferencia.

Collemos o lado **AB** co compás e o levamos sucesivas veces sobre a circunferencia para obter tódolos vértices do heptágono regular.

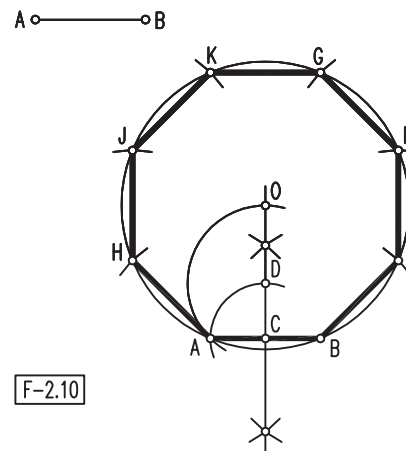


2.10.- Trazado do octógono dado o lado - F-2.10

Dado o lado **AB**.

Trazamos a mediatriz do lado **AB** e obtémolo punto medio **C**. Con centro en **C** e raio **CA** trazamos un arco que cortará á mediatriz en **D**. Con centro en **D** e raio **DA** trazamos outro arco que cortará á mediatriz en **O**, centro da circunferencia na que está inscrito o octógono regular.

Collemos o lado **AB** co compás e o levamos sucesivas veces sobre a circunferencia para obter tódolos vértices do octógono regular.



3 - TRANSFORMACIÓNS XEOMÉTRICAS

HOMOLOXÍA

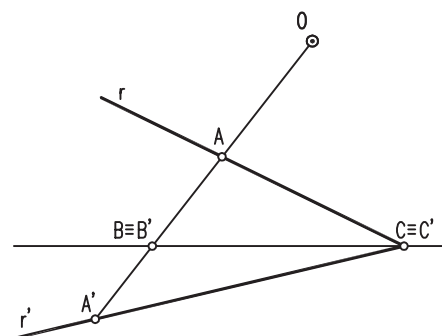
Unha **HOMOLOXÍA (F-3.1)** é unha transformación xeométrica (ou sexa que a un punto do plano lle fai corresponder outro baixo determinadas condicións) que cumpre as seguintes regras:

- Un punto e o seu homólogo están aliñados con outro fixo chamado centro (**O**) de homoloxía.
- Unha recta e a súa homóloga se cortan nunha recta fixa chamada eixo (**e**) de homoloxía.

Como consecuencia da segunda condición, os puntos do plano que están no eixo de homoloxía son puntos dobres: O punto coincide co seu homólogo.

Razón de homoloxía.- Na homoloxía dada (F-3.1), a razón de homoloxía sería:

$$\frac{OA/OA'}{BA/BA'}$$



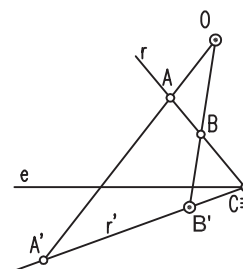
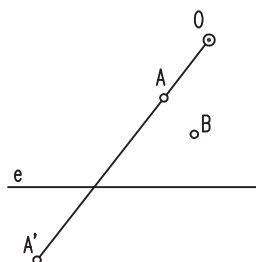
F-3.1

3.1.- Obter un punto homólogo doutro dado - F-3.2

Dada a homoloxía e o punto **B**.
Temos a homoloxía de centro **O**, eixo **e** e dous puntos homólogos **A** e **A'**.

Trazamos unha recta **r** calquera que pase por **A** e corte ó eixo **e**. Como a recta homóloga de **r** deberá cortarse con ela no eixo, unimos ese punto (**C≡C'**) con **A'** para obter **r'**.

Como dous puntos homólogos deben estar aliñados co centro de homoloxía, unimos **B** con **O** e, onde corte a **r'**, teremos **B'**, homólogo de **B**.



F-3.2

3.2.- Dados dous puntos homólogos, obter o homólogo doutro aliñado con eles F-3.3

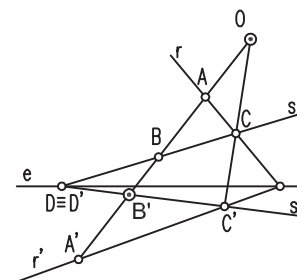
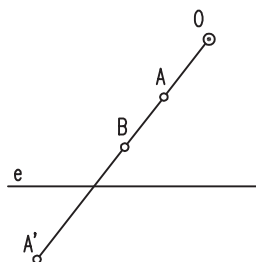
Dada a homoloxía e o punto **B**.
Temos a homoloxía de centro **O**, eixo **e** e dous puntos homólogos **A** e **A'**.

Non podemos usar o procedemento explicado no punto anterior porque, nese caso, a recta e a súa homóloga coincidirían e non resolveríamos o noso problema.

Collemos un punto **C** calquera (non aliñado con **A** e **A'**) e obtemos o seu homólogo **C'** aplicando o explicado no apartado anterior 3.1.

Unha vez obtido **C'**, unimos **C** con **B** formando a recta **s**. Unimos o punto de corte de **s** co eixo (**D≡D'**) con **C'** para obter **s'**, recta homóloga de **s**.

Onde **OB** corte a **s'** teremos **B'**, punto homólogo de **B**.



F-3.3

3.3.- Rectas límite - F-3.4/8

Unha **recta límite** é o **lugar xeométrico dos puntos cuxos homólogos están no infinito**.

En calquera homoloxía temos **dúas rectas límite**, que son paralelas ó eixo de homoloxía.

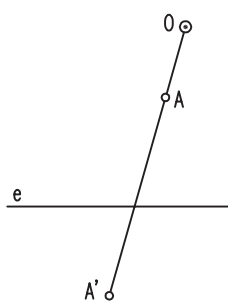
Vexamos como calculamos as rectas límite:

Dada unha homoloxía definida polo centro **O**, o eixo **e** e dous puntos homólogos **A** e **A'** (F-3.4).

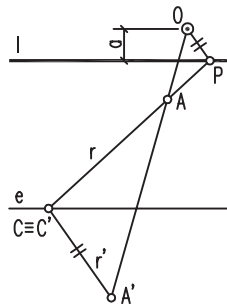
Trazamos unha recta calquera **r** pasando por **A** e, onde corte ó eixo (**C≡C'**), unimos con **A'** para obter **r'** (F-3.5). Trazamos unha paralela a **r'** pasando por **O**. Onde se corte con **r** teremos o punto **P**. O homólogo de **P** estaría precisamente onde a recta **OP** cortase a **r'**. Se intento obter o homólogo de **P** vexo que non se corta con **r'**, pois as dúas rectas son paralelas. O punto **P** é, polo tanto, un punto da recta límite **l**.

Trazamos unha paralela a **r** pasando por **O** (F-3.6). Onde se corte con **r'** teremos o punto **Q**. O homólogo de **Q** estaría precisamente onde a recta **OQ** cortase a **r**. Se intento obter o homólogo de **Q** vexo que non se corta con **r**, pois as dúas rectas son paralelas. O punto **Q** é, polo tanto, un punto da segunda recta límite **l'**.

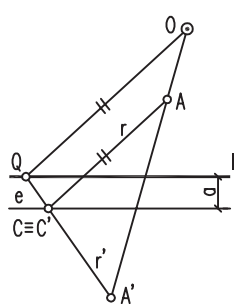
Podo comprobar que **unha recta límite equidista do centro de homoloxía o mesmo que a outra do eixo** (F-3.7). Pasaría o mesmo cando as dúas rectas límite estiveran entre **O** e **e** (F3-8).



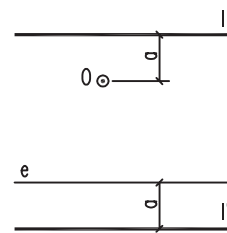
F-3.4



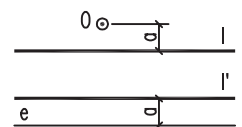
F-3.5



F-3.6



F-3.7

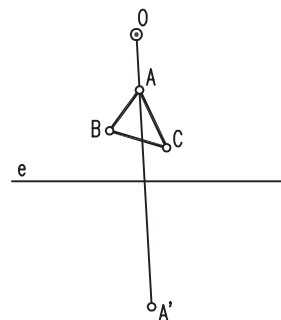


F-3.8

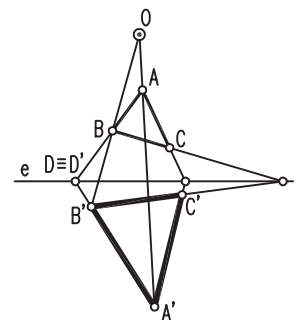
3.4.- Trazado de figuras homólogas - F-3.9

Unha homoloxía pode estar ben definida de diferentes xeitos:

- Dado o eixo de homoloxía, o centro de homoloxía e un par de puntos homólogos.
- Dado o centro e dous pares de rectas homólogas.
- Dado o centro, o eixo e unha recta límite.
- Dado o centro e as dúas rectas límite.
- Dado o centro, o eixo e o coeficiente ou razón de homoloxía
- Dado o centro, unha recta límite e dous puntos homólogos.
- Dado un punto dobre e dous pares de puntos homólogos.



F-3.9



En calquera caso, a partir dunha homoloxía ben definida, podemos obter a figura homóloga de outra dada.

Dada a homoloxía de eixo **e**, centro **O** e un par de puntos homólogos (**A, A'**), obter a figura homóloga da **ABC** (F-3.9).

Continuamos a recta **AB** ate o eixo **e**, obtendo o punto dobre **D≡D'**. Unindo **D** con **A'** obtemos a recta homóloga da **AB** e, unindo **B** con **O**, obtemos **B'**. Facemos o mesmo coa recta **BC** e obtemos **C'**.

Unimos **A'**, **B'** e **C'** e temos a figura homóloga da dada.

3.5.- Homoloxía dunha circunferencia - F-3.10

A **figura homóloga dunha circunferencia é unha cónica**. Dependendo da posición da circunferencia con respecto a unha das rectas límite, será unha **elipse**, unha **parábola** ou unha **hipérbole**:

- Cando a circunferencia non toca á recta límite a figura homóloga é unha **elipse**.
- Cando a circunferencia é tanxente á recta límite a figura homóloga é unha **parábola**.
- Cando a circunferencia corta á recta límite a figura homóloga é unha **hipérbole**, que será simétrica cando o centro da circunferencia estea na propia recta límite.

Na **F-3.10** podemos ver o trazado da **elipse homóloga**:

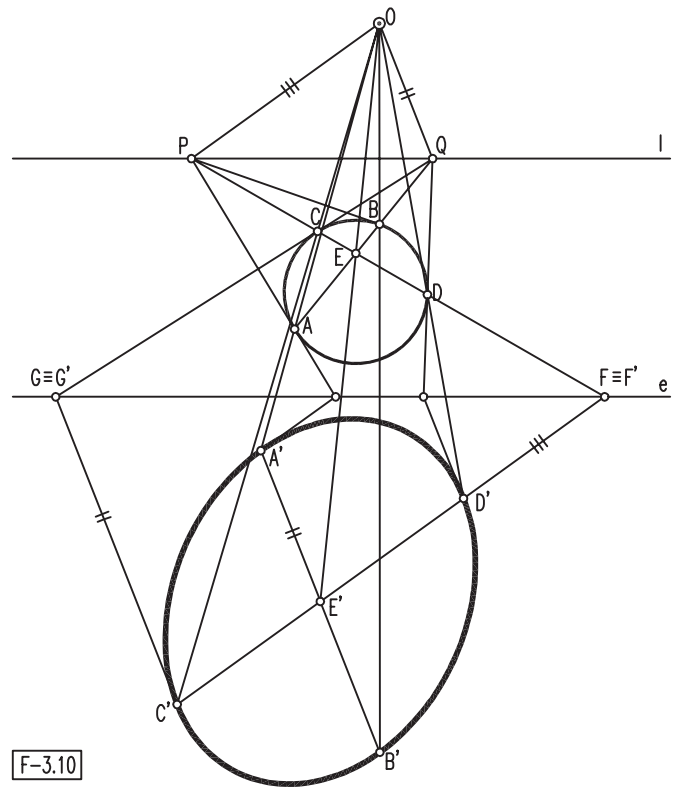
Dada a homoloxía de centro **O**, eixo **e**, recta límite **l** e a **circunferencia** que está entre o eixo e a recta límite.

Collendo un punto **P** calquera da recta límite, trazamos as tanxentes á circunferencia e obtemos os puntos de tanxencia **A** e **B**. Unindo **A** con **B** obtemos o punto **Q** na recta límite, e trazamos dende el as rectas tanxentes á circunferencia, que nos darán os puntos **C** e **D**.

As homólogas das rectas **AB** e **CD** darannos **A'B'** e **C'D'**, diámetros conxugados da elipse homóloga da circunferencia. O homólogo de **E** (chamado "polo" da circunferencia) será **E'**, centro da elipse.

Unha vez que temos os diámetros conxugados podemos trazar a elipse homóloga da circunferencia dada aplicando o método xa visto en **DEBUXO TÉCNICO I (páx.-52. Apdo.- 7.5)**.

Tamén poderíamos obter a elipse por puntos, partindo de puntos da circunferencia e obtendo os seus homólogos, pero este método o usaremos nos dous casos seguintes.



F-3.10

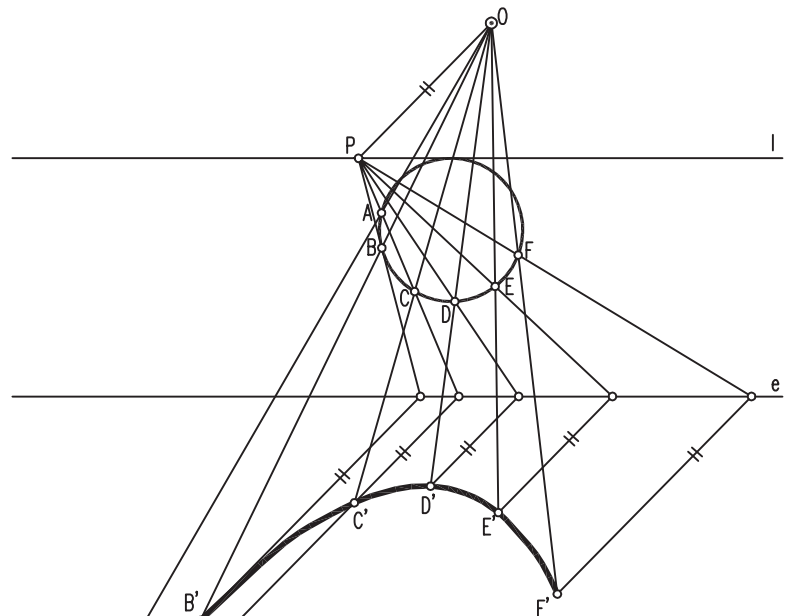
Na **F-3.11** podemos ver o trazado da **parábola homóloga**:

Partindo dun punto **P** da recta límite trazamos varias rectas (cantas máis mellor pois darannos máis exactitude no trazado da parábola).

Como o punto **P** está na recta límite, cando o unimos co centro de homoloxía **O**, darannos a traxectoria das rectas homólogas que serán paralelas a **PO**.

Dende os puntos onde as rectas cortan ó eixo **e** trazamos paralelas a **PO**. Unimos **O** cos puntos da circunferencia e obtemos os seus homólogos.

Unimos os puntos a man alzada ou con prantilla de curvas.



F-3.11

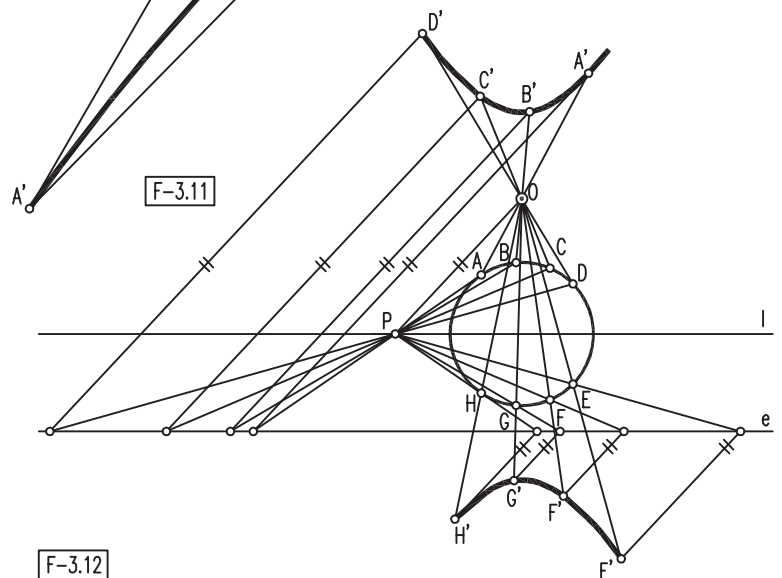
Na **F-3.12** podemos ver o trazado da **hipérbole homóloga**, que será de dúas curvas simétricas porque o centro da circunferencia está na recta límite.

Partindo dun punto **P** da recta límite trazamos varias rectas, cara a un lado e outro da recta límite.

Como o punto **P** está na recta límite, cando o unimos co centro de homoloxía **O**, darannos a traxectoria das rectas homólogas que serán paralelas a **PO**.

Dende os puntos onde as rectas cortan ó eixo **e** trazamos paralelas a **PO**. Unimos **O** cos puntos da circunferencia e obtemos os seus homólogos.

Unimos os puntos a man alzada ou con prantilla de curvas.



F-3.12

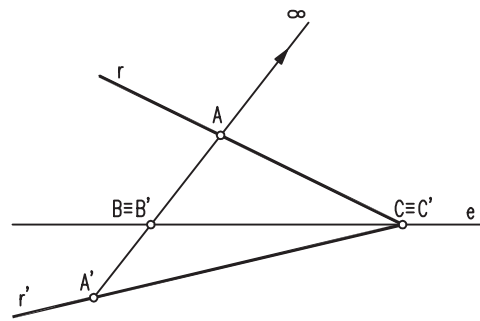
AFINIDADE

A **AFINIDADE (F-3.13)** é unha homoloxía de centro impropio, ou sexa unha homoloxía na que o centro está no infinito.

Unha **afinidade** é unha **transformación xeométrica** que cumpre as seguintes regras:

- Un punto e o seu afín están nunha recta paralela á dirección de afinidade..
- Unha recta e a súa afín se cortan nunha recta fixa chamada eixo (e) de afinidade.

Tendo isto en conta, todo o devandito para a homoloxía é de aplicación na afinidade coas adaptacións correspondentes.



F-3.13

Razón de afinidade.- Na afinidade dada (F3.13), a razón de afinidade sería:

$$\frac{\infty A / \infty A'}{BA / BA'} = \frac{1}{BA / BA'} = \frac{BA'}{BA}$$

3.6.- Trazado de figuras afíns - F-3.14

Unha afinidade pode estar ben definida de diferentes xeitos:

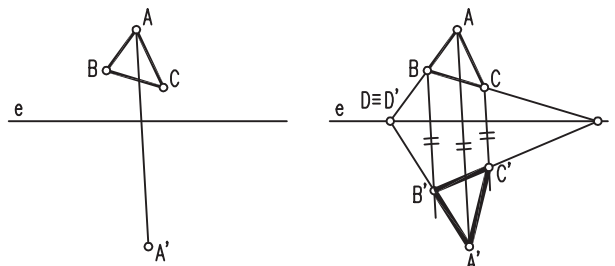
- Dado o eixo de afinidade e un par de puntos afíns.
- Dada a dirección de afinidade e a razón de afinidade.
- Dadas dúas figuras afíns.

En calquera caso, a partir dunha afinidade ben definida, podemos obter a figura afín doutra dada.

Dada a afinidade de eixo **e** e un par de puntos homólogos (**A, A'**), obter a figura homóloga da **ABC** (F-3.14).

Continuamos a recta **AB** ate o eixo **e**, obtendo o punto dobre **D=D'**. Unindo **D** con **A'** obtemos a recta homóloga da **AB** e, trazando por **B** unha paralela a **AA'**, obtemos **B'**. Facemos o mesmo coa recta **BC** e obtemos **C'**.

Unimos **A', B'** e **C'** e temos a figura afín da dada.



F-3.14

3.7.- Figura afín dunha circunferencia - F-3.15/17

A **figura afín dunha circunferencia é unha elipse**.

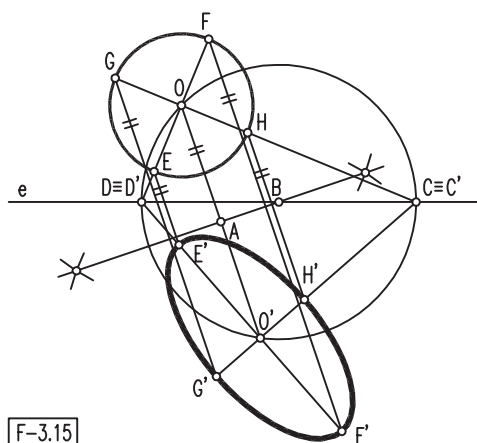
Vexamos os dous casos posibles:

Caso xeral. Eixos da elipse

Cando a circunferencia de partida non corta ó eixo de afinidade (F-3.15) podemos obter os eixos da elipse coma afíns de dous diámetros da circunferencia.

Dada a circunferencia de centro **O**, eixo de afinidade **e**, e **O'**, punto afín do centro **O** (e centro da elipse resultante). Trazamos a mediatriz do segmento **OO'** e, facendo centro no punto **B**, trazamos unha circunferencia de diámetro **BO**, que cortará ó eixo **e** en dous puntos dobres **C=C'** e **D=D'**. Unindo estes puntos co centro **O** obteremos (nos puntos de corte coa circunferencia) os extremos de dous diámetros perpendiculares da circunferencia. Trazando por estes puntos (**E, F, G** e **H**) paralelas á dirección de afinidade **OO'** obteremos os respectivos puntos afíns (**E', F', G'** e **H'**), que serán os extremos dos dous eixos, perpendiculares entre si, da elipse afín á circunferencia dada.

Podemos aplicar o xa visto en **DEBUXO TÉCNICO I** (páx.-51. Apdo.- 7.3/4) e debuxar a elipse ou obter puntos da elipse afíns a puntos da circunferencia.



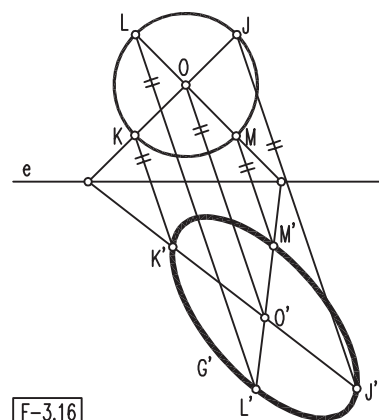
F-3.15

Caso xeral. Diámetros conxugados da elipse - F-3.16

No caso do apartado anterior, se en lugar de coller estes dous diámetros concretos da circunferencia (obtidos como quedou explicado) collemos calquera outra parella de diámetros (JK e LM) e obtemos os seus afíns (J'K' e L'M'), obteremos unha parella de diámetros conxugados da mesma elipse.

Aplicando o indicado en **DEBUXO TÉCNICO I (páx.-52.**

Apdo.- 7.5) podemos debuxar a elipse ou mesmo obter puntos da elipse afíns a puntos da circunferencia.



F-3.16

Circunferencia con centro no eixo. Diámetros conxugados da elipse

Cando a circunferencia ten o centro no eixo de afinidade (F-3.17), o diámetro que coincide no eixo daranos un diámetro conxugado da elipse afín e o diámetro perpendicular a el outro diámetro conxugado.

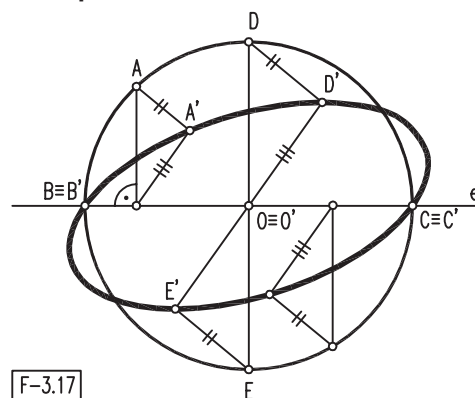
Dada a circunferencia de centro O, eixo de afinidade e, e A', punto afín do punto A.

O diámetro BC da circunferencia coincidirá co diámetro conxugado da elipse B'C', afín del.

Se collemos o diámetro perpendicular DE e obtemos o seu afín D'E' teremos xa dous diámetros conxugados da elipse afín á circunferencia dada.

Podemos obter máis puntos da elipse obtendo os puntos afíns de outros da circunferencia de partida.

Isto non é nin máis nin menos que o método xa visto en **DEBUXO TÉCNICO I (páx.-52. Apdo.- 7.5)** para o trazado da elipse dados dous diámetros conxugados.



F-3.17

HOMOTECIA

A **HOMOTECIA** (F-3.18) é unha homoloxía de eixo impropio, ou sexa unha homoloxía na que o eixo está no infinito.

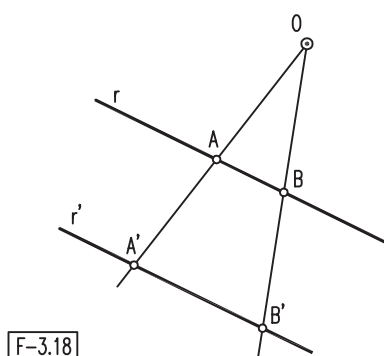
Unha **homotecia** é unha **transformación xeométrica** que cumpre as seguintes regras:

- Un punto e o seu homotético están aliñados con outro fixo chamado centro (O) de homotecia.
- Unha recta e a súa homotética son paralelas.

Tendo isto en conta, todo o devandito para a homoloxía é de aplicación na homotecia coas adaptacións correspondentes.

Razón de homotecia.- Na homotecia dada (F3.18), a razón de homotecia sería:

$$\frac{OA}{OA'}$$



F-3.18

A **homotecia** é exactamente o mesmo que a **semellanza**, xa vista en **DEBUXO TÉCNICO I (páx.-31. Apdo.- 3.8-10)** polo tanto non imos insistir máis no asunto.

INVERSIÓN

Unha **INVERSIÓN** (F-3.19) é unha **transformación xeométrica** que cumpre as seguintes regras:

- Un punto e o seu inverso están aliñados con outro fixo chamado centro (O) de inversión.
- O produto das distancias de dous puntos inversos ó centro de inversión é constante.

Potencia de inversión.-

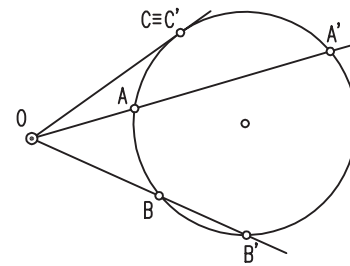
A potencia nunha inversión dada (F-3.19) é o produto das distancias entre o centro de inversión e dous puntos inversos.

$$p = OA \times OA'$$

Como se pode observar isto implica que **dúas parellas de puntos homólogos están na mesma circunferencia** (ver **POTENCIA**, páx. 11).

Unha **inversión** queda definida se temos:

- O centro de inversión e un par de puntos inversos.
- O centro e a potencia de inversión.
- Dúas parellas de puntos inversos.

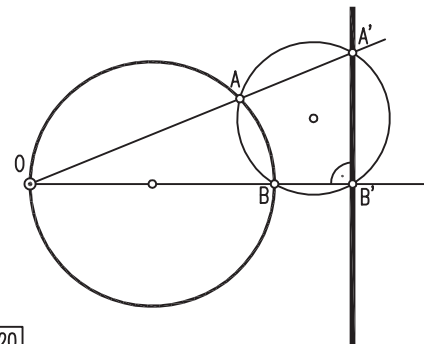


F-3.19

3.8.- Figura inversa dunha circunferencia que pasa polo centro de inversión - F-3.20

A figura inversa dunha circunferencia que pasa polo centro de inversión é unha recta que non pasa polo centro de inversión e que é perpendicular á recta que une o centro de inversión co centro da circunferencia.

Isto o podemos comprobar na F-3.20.



F-3.20

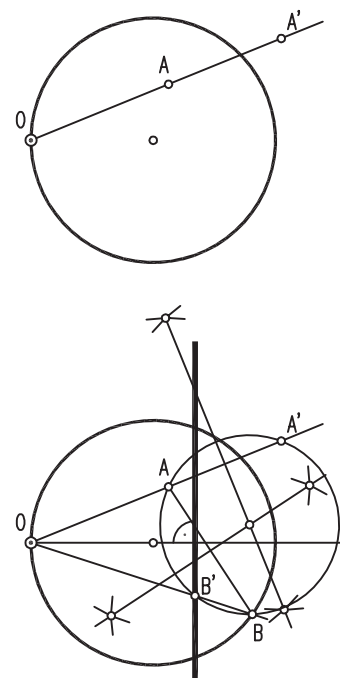
3.9.- Dado o centro de inversión e dous puntos inversos obter a figura inversa dunha circunferencia dada (F-3.21)

Xa sabemos que a figura inversa vai ser unha recta que será perpendicular á que une o centro de inversión O co centro da circunferencia dada.

Obtemos o punto inverso dun punto B da circunferencia. Tendo en conta que A, A', B e o inverso de B deben estar na mesma circunferencia, trazamos a circunferencia que pasa por A, A' e B.

Unimos B co centro de inversión O e, onde corte á circunferencia que trazamos, obteremos o punto B' inverso de B.

Trazamos por B' a recta solución, que será perpendicular á que une O co centro da circunferencia dada.



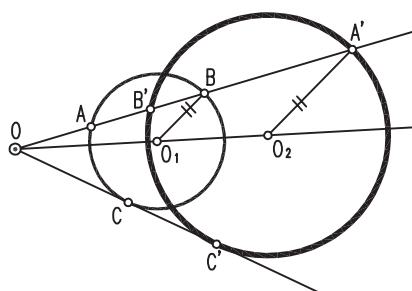
F-3.21

3.10.- Figura inversa dunha circunferencia que non pasa polo centro de inversión F-3.22

A figura inversa dunha circunferencia que non pasa polo centro de inversión é outra circunferencia que tampouco pasa polo centro de inversión, que é homotética da primeira e que teñen os centros aliñados co centro de inversión. O centro de homotecia será o centro O de inversión.

Como podemos ver na F-3.22, a circunferencia de centro O_2 é inversa da de centro O_1 . O é o centro de inversión e, tamén, o centro de homotecia.

O punto inverso do A , A' será homotético do punto contrario ó A na mesma circunferencia (o punto B) e, polo tanto, as rectas que unen os puntos A' e B cos centros das circunferencias respectivas serán paralelas.



F-3.22

3.11.- Dado o centro de inversión e dous puntos inversos obter a figura inversa dunha circunferencia dada (F-3.23)

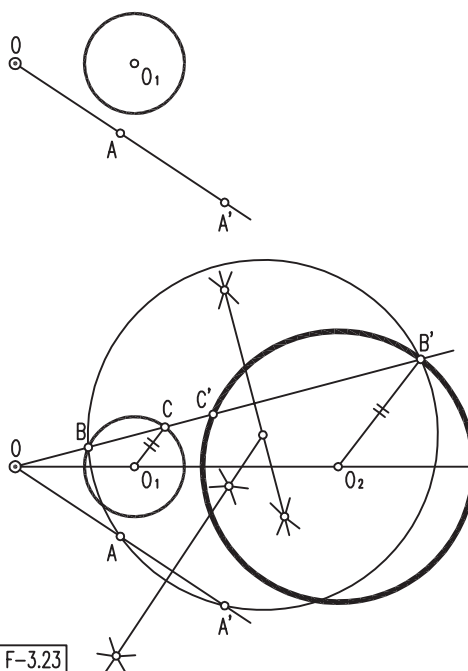
Xa sabemos que a figura inversa vai ser outra circunferencia que terá o centro aliñado con O_1 e O .

Obtemos o punto inverso dun punto B da circunferencia. Tendo en conta que A , A' , B e o inverso de B deben estar na mesma circunferencia, trazamos a circunferencia que pasa por A , A' e B .

Unimos B co centro de inversión O e, onde corte á circunferencia que trazamos, obteremos o punto B' , inverso do B .

Tendo en conta a relación de homotecia que imos ter entre a circunferencia dada e a circunferencia inversa, unido o punto C (oposto do B na súa circunferencia) co centro O_1 . Trazando unha paralela a CO_1 polo punto B' , onde corte á recta OO_1 será o centro O_2 da circunferencia buscada.

Facendo centro en O_2 con raio O_2B trazarei a circunferencia solución, inversa da de centro O_1 .



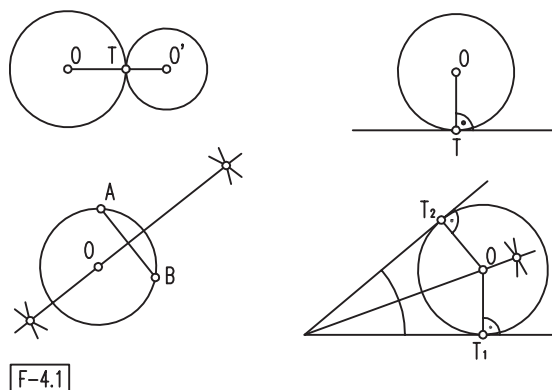
F-3.23

4 - TANXENCIAS

CONCEPTOS BÁSICOS

Como xa vimos en **DEBUXO TÉCNICO I** (páx.-37. Apdo.-5.1), temos catro ferramentas básicas para a resolución de tanxencias que convén lembrar aquí (**F-4.1**):

- 1.- Cando dúas **circunferencias** son tanxentes, o punto de tanxencia está na recta que une os centros delas.
- 2.- Cando unha **recta** é tanxente a unha **circunferencia**, o radio da circunferencia no punto de tanxencia é perpendicular á recta.
- 3.- Cando unha **circunferencia** pasa por dous puntos, o centro dela está na **mediatriz** do segmento que os une.
- 4.- Cando unha **circunferencia** é tanxente a dúas **rectas** que se cortan, o centro da circunferencia estará na **bisectriz** do ángulo que forman as rectas.



F-4.1

Ademais das ferramentas anteriores, usaremos os conceptos xa vistos de **Potencia** e **Eixo radical** (ver **TRAZADOS BÁSICOS**, páx.- 11-13). Con isto seremos quen de resolver tódolos problemas de tanxencia.

Convén ter en conta que, tal e como recolle o Método Científico, para a resolución dun problema complexo temos dous procedementos axeitados:

- **Dividir o problema en varios máis sinxelos que saibamos resolver.**
- **Reducir o problema a outro que si saibamos resolver.**

RESOLUCIÓN DE TANXENCIAS

4.1.- Circunferencias tanxentes a unha recta pasando por dous puntos - F-4.2

Dada a recta **r** e os puntos **A** e **B**.

Como as circunferencias solución teñen que pasar por **A** e **B**, iso quere dicir que:

- Os centros das circunferencias estarán na **mediatriz** do segmento **AB**.
- A recta **AB** será o **eixo radical** de tódalas circunferencias que pasen por **A** e **B** (as dúas solucións e calquera outra).

Tendo isto en conta, o punto (**Cr**) onde a recta **AB** corte á dada **r** será o centro radical das circunferencias solución, de calquera outra que pase por **AB** e estará no punto medio da distancia existente entre os puntos de tanxencia da recta **r** coas circunferencias solución.

Trazado.-

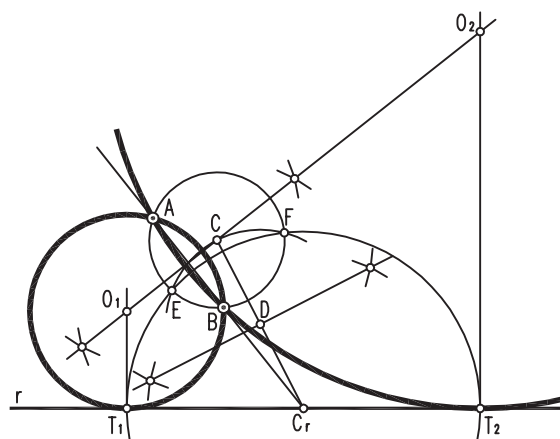
Obtemos a mediatriz de **AB**. Facendo centro en un punto calquera dela **C**, trazamos unha circunferencia auxiliar que pase por **A** e **B**.

Continuamos a recta **AB** ate cortar á recta **r** dada en **Cr**. Obtemos a potencia de **Cr** con respecto á circunferencia auxiliar (ou sexa, obtemos a tanxente dende **Cr**), obtendo os puntos de tanxencia **E** e **F**.

Como a potencia dende **Cr** ás circunferencias solución vai ser igual que con respecto á circunferencia auxiliar, facendo centro en **Cr** con raio **CrF** trazamos un arco que cortará a **r** en **T₁** e **T₂**, puntos de tanxencia das circunferencias solución coa recta **r**.

Levantamos perpendiculares a **r** dende **T₁** e **T₂** e, onde corten á mediatriz de **AB**, teremos os centros **O₁** e **O₂** das circunferencias buscadas.

Con centro en **O₁** e **O₂** e raio ate **A** ou **B** trazamos as dúas circunferencias tanxentes á recta **r** pasando polos puntos **A** e **B**.



F-4.2

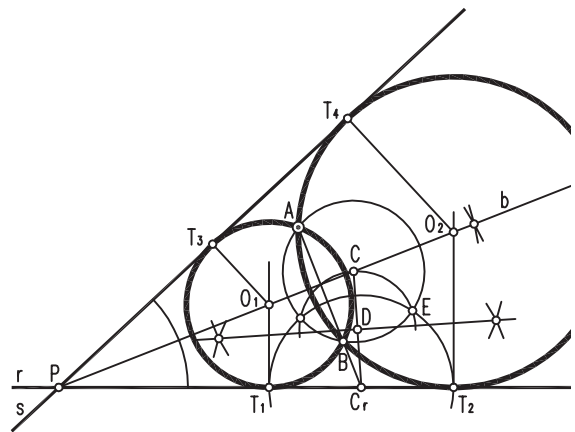
4.2.- Circunferencias tanxentes a dúas rectas pasando por un punto - F-4.3

Dadas as rectas r e s e o punto A .

Como as circunferencias solución teñen que pasar por A e seren tanxentes a dúas rectas que se cortan, iso quere dicir que:

- Os centros das circunferencias estarán na bisectriz do ángulo que forman r e s .
- As circunferencias solución pasarán por A e polo seu simétrico B con respecto á bisectriz.
- A recta AB será o eixo radical de tódalas circunferencias que pasen por A e B (as dúas solucións e calquera outra).

Isto nos leva ó caso anterior (4.1.- Circunferencias tanxentes a unha recta pasando por dous puntos). Tendo isto en conta, o punto (Cr) onde a recta AB corte á dada r será o centro radical das circunferencias solución, de calquera outra que pase por AB e estará no punto medio da distancia existente entre os puntos de tanxencia da recta r coas circunferencias solución.



F-4.3

Trazado.-

Obtemos a bisectriz b do ángulo que forman r e s . Obtemos o punto B , simétrico do A con respecto á bisectriz.

Facendo centro nun punto C calquera de b , trazamos unha circunferencia auxiliar que pase por A e B .

Continuamos a recta AB ate cortar á recta r dada en Cr . Obtemos a potencia de Cr con respecto á circunferencia auxiliar (ou sexa, obtemos a tanxente dende Cr), obtendo o punto de tanxencia E .

Como a potencia dende Cr ás circunferencias solución vai ser igual que con respecto á circunferencia auxiliar, facendo centro en Cr con raio CrE trazamos un arco que cortará a r en T_1 e T_2 , puntos de tanxencia das circunferencias solución coa recta r .

Levantamos perpendiculares a r dende T_1 e T_2 e, onde corten á mediatriz de AB , teremos os centros O_1 e O_2 das circunferencias buscadas. Levamos perpendiculares á recta s dende estes centros e teremos os puntos de tanxencia T_3 e T_4 .

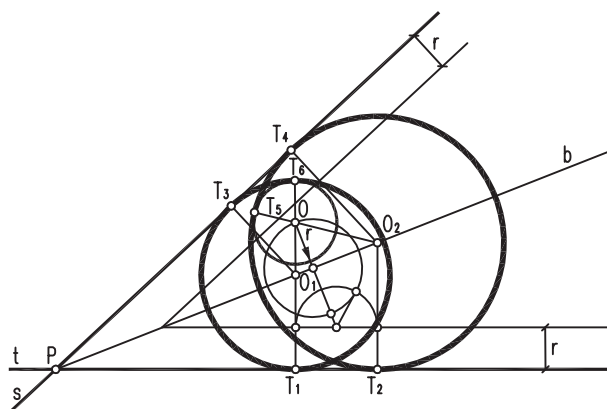
Con centro en O_1 e O_2 e raio ate A trazamos as dúas circunferencias tanxentes ás rectas r e s pasando polo punto A .

4.3.- Circunferencias tanxentes a dúas rectas e a unha circunferencia - F-4.4/5

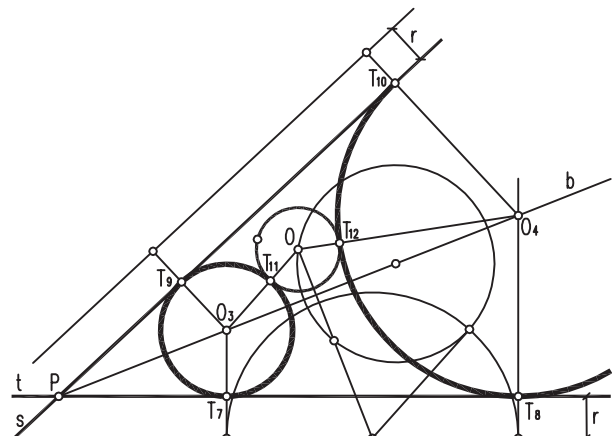
Dadas as rectas r e s e a circunferencia de centro O .

Este problema o resolveremos reducíndoo a outro que xa sabemos resolver. En concreto ó reducimos ó caso resolto anteriormente en 4.2.- Circunferencias tanxentes a dúas rectas pasando por un punto.

Se reducimos a circunferencia ó seu centro O (restandolle ó raio r da circunferencia a medida do raio, quedará unha circunferencia de raio cero, ou sexa o centro da circunferencia) e trazamos paralelas ás rectas s e t á distancia do raio r da circunferencia, as circunferencias solución (tanxentes a s e t pasando por O) serán circunferencias que terán os mesmos centros que as que andamos a buscar pero cun raio superior ou inferior na medida de r .



F-4.4



F-4.5

Trazado 1 (F-4.4).-

Trazamos rectas paralelas a **s** e **t** cara ó interior á distancia de **r** e resolvemos, como vimos no apartado anterior, as circunferencias tanxentes a esas rectas pasando por **O**.

Unha vez obtidos os centros **O**₁ e **O**₂ e os puntos de tanxencia, continuamos as rectas que os unen e obtemos os puntos de tanxencia coas rectas **r** e **s** (**T**₁-**T**₄). Unindo **O**₁ e **O**₂ co centro **O** da circunferencia dada obtemos os puntos de tanxencia con ela, **T**₅ e **T**₆. Estas dúas solucións serán tanxentes interiores á dada.

Trazado 2 (F-4.5).-

Trazamos rectas paralelas a **s** e **t** cara ó exterior á distancia de **r** e resolvemos de novo o problema. Obtemos outras dúas circunferencias (de centros **O**₃ e **O**₄) tanxentes exteriores á dada cos respectivos puntos de tanxencia con ela e coas rectas **s** e **t**. (**T**₇-**T**₁₂).

4.4.- Circunferencias tanxentes a tres rectas que se cortan - F-4.6

Dadas as rectas **r**, **s** e **t**.

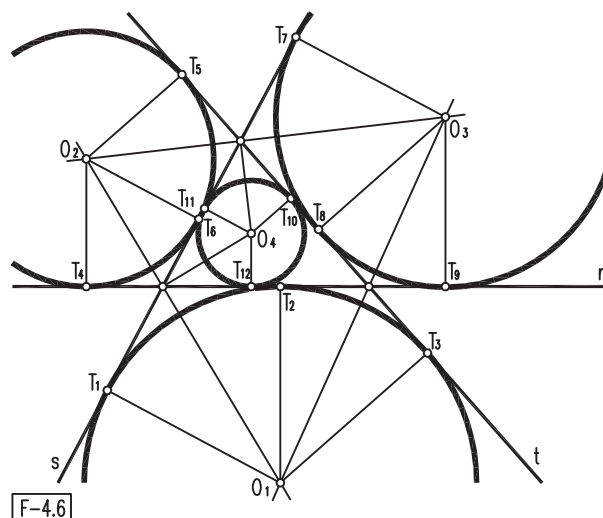
As rectas se cortan dúas a dúas. **Cando unha circunferencia é tanxente a dúas rectas que se cortan, o seu centro estará na bisectriz do ángulo que forman.**

Unha recta tanxente a tres rectas terá o seu centro no punto onde se corten as dúas bisectrices de cada parella de rectas.

Trazado.-

Obtemos as bisectrices de cada parella de rectas (nas catro zonas onde se corten tres rectas) e, nos puntos de intersección entre elas, teremos os centros **O**₁, **O**₂, **O**₃ e **O**₄ das circunferencias solución. Dende estes centros trazamos perpendiculares a cada recta para obter os puntos de tanxencia (**T**₁-**T**₁₂).

Trazamos as catro circunferencias solución dende cadanseu centro e con raio ate os puntos de tanxencia.



F-4.6

4.5.- Circunferencias tanxentes a outra pasando por dous puntos - F-4.7

Dada a circunferencia de centro **O** e os puntos **A** e **B**.

As circunferencias solución teñen que pasar por **A** e **B**, iso quere dicir que:

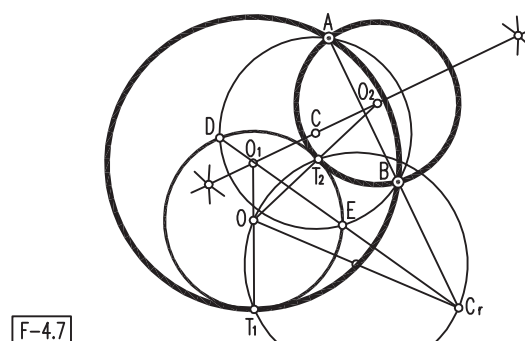
- Os centros das circunferencias estarán na mediatriz do segmento **AB**.

- A recta **AB** será o eixo radical de tódalas circunferencias que pasen por **A** e **B** (as dúas solucións e calquera outra).

Facendo centro nun punto calquera **C** da mediatriz trazamos unha circunferencia que pase por **A** e **B** e que corte á circunferencia dada en dous puntos **D** e **E**.

A recta **DE** será o eixo radical da circunferencia auxiliar de centro **C** e da dada. Onde a recta **DE** corte á recta **AB** teremos **Cr**, centro radical das circunferencias solución, da auxiliar e da dada.

Obtemos a potencia de **Cr** con respecto á circunferencia dada (rectas tanxentes a ela pasando por **Cr**) e obtemos **T**₁ e **T**₂, que serán os puntos de tanxencia das circunferencias solución coa dada. Unimos **O** con **T**₁ e **T**₂ e, onde corten á mediatriz de **AB** teremos os centros das circunferencias solución **O**₁ e **O**₂.



F-4.7

4.6.- Circunferencias tanxentes a outra e a unha recta pasando por un punto

Este problema pode ter tres posibles casos, dependendo da posición do punto.

- Cando o punto está na recta.
- Cando o punto está na circunferencia.
- Cando o punto está fora da recta e da circunferencia.

Circunferencias tanxentes a outra e a unha recta nun punto dado - F-4.8

Dada a recta r , o punto de tanxencia T e a circunferencia de centro O .

As circunferencias solución teñen que pasar por T que é o punto de tanxencia coa recta r , iso quere dicir que:

- Os centros das circunferencias solución estarán nunha recta s perpendicular a r no punto de tanxencia T .

- A recta r será o eixo radical das circunferencias tanxentes a r en T (as dúas solucións e calquera outra).

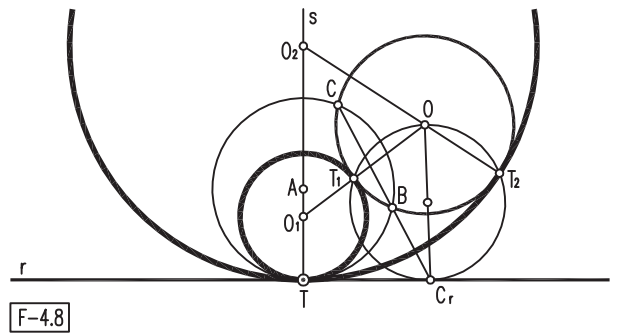
Trazado.-

Facendo centro nun punto calquera A de s trazamos unha circunferencia que pase por T e que corte á circunferencia dada en dous puntos B e C .

A recta BC será o eixo radical da circunferencia auxiliar, de centro A , e da dada. Onde a recta BC corte á recta r teremos Cr , centro radical das dúas circunferencias solución, da auxiliar e da dada.

Obtemos a potencia de Cr con respecto á circunferencia dada (rectas tanxentes a ela pasando por Cr) e obtemos T_1 e T_2 , que serán os puntos de tanxencia das circunferencias solución coa dada. Unimos O con T_1 e T_2 e, onde corten á recta s , teremos os centros das circunferencias solución O_1 e O_2 .

Unha circunferencia será tanxente exterior e outra tanxente interior á dada.



F-4.8

Circunferencias tanxentes a unha recta e a unha circunferencia nun punto dado F-4.9

Dada a recta r , a circunferencia de centro O e o punto de tanxencia T .

As circunferencias solución teñen que pasar por T que é o punto de tanxencia coa circunferencia de centro O , iso quere dicir que:

- Os centros das circunferencias solución estarán nunha recta s que une o centro O co punto de tanxencia T .

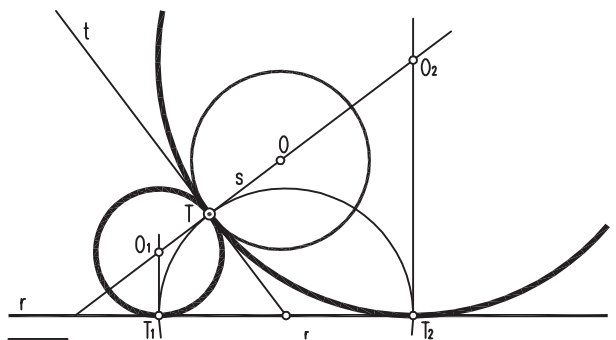
- A recta t será o eixo radical das circunferencias tanxentes á dada en T (as dúas solucións e calquera outra).

Trazado.-

Onde a recta t corta á recta dada r será o centro radical (Cr) das circunferencias solución tanxentes a r , pois a distancia TCr é a potencia e o punto medio da distancia existente entre os puntos de tanxencia.

Facendo centro en Cr con radio TCr trazamos un arco que nos dará, nos puntos de corte con r , os puntos de tanxencia buscados T_1 e T_2 ; levantamos perpendiculares por eles e obtemos (onde se corten con s) os centros das circunferencias solución O_1 e O_2 .

Con centro en O_1 e O_2 e raios O_1T e O_2T obtemos as circunferencias tanxentes á recta r e á circunferencia de centro O en T .



F-4.9

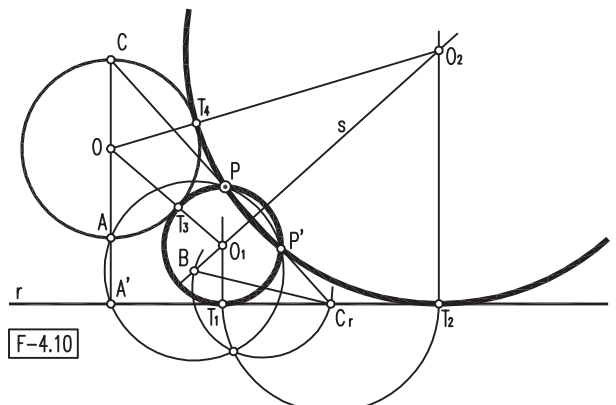
Circunferencias tanxentes a unha recta e a unha circunferencia pasando por un punto - F-4.10/11

Dada a recta r , a circunferencia de centro O e o punto P . Este problema ten catro solucións pero as debemos obter dúas a dúas.

Solucións 1 e 2 - F-4.10

Trazamos un diámetro da circunferencia perpendicular á recta r e supoñemos unha inversión de centro C que transforma a circunferencia dada na recta r , de tal xeito que o inverso de A (na circunferencia) sexa A' (na recta). Obtemos o punto inverso de P trazando unha circunferencia (de centro B) que pase por P , A e A' . Obtemos P' , inverso de P .

As circunferencias solución an pasar por P e P' . Con isto o problema queda reducido a outro máis sinxelo que xa sabemos resolver: **Circunferencias que pasan por dous puntos e son tanxentes a unha recta** (ver o apartado 4.1).



F-4.10

Os centros das dúas circunferencias solución estarán na mediatriz de PP' (a recta s) e PP' será o seu eixo radical. Onde PP' corte a r será o centro radical das circunferencias solución e de tódalas que pasen por P e por P' .

Obtemos a tanxente dende Cr á circunferencia de centro B que xa temos trazada e levamos a potencia sobre a recta r para obter T_1 e T_2 , os puntos de tanxencias das circunferencias solución coa recta r . Levantando perpendiculares por T_1 e T_2 á recta r , onde corten á mediatriz de PP' teremos O_1 e O_2 , centros das circunferencias buscadas.

Unimos O_1 e O_2 con O para obter os puntos de tanxencia (T_3 e T_4) das circunferencias solución coa dada. Trazamos as dúas circunferencias solución.

Solucións 3 e 4 - F-4.11

O procedemento é igual ao visto no apartado anterior.

Trazamos un diámetro da circunferencia perpendicular á recta r e supoñemos unha inversión de centro C que transforma a circunferencia dada na recta r , de tal xeito que o inverso de A (na circunferencia) sexa A' (na recta).

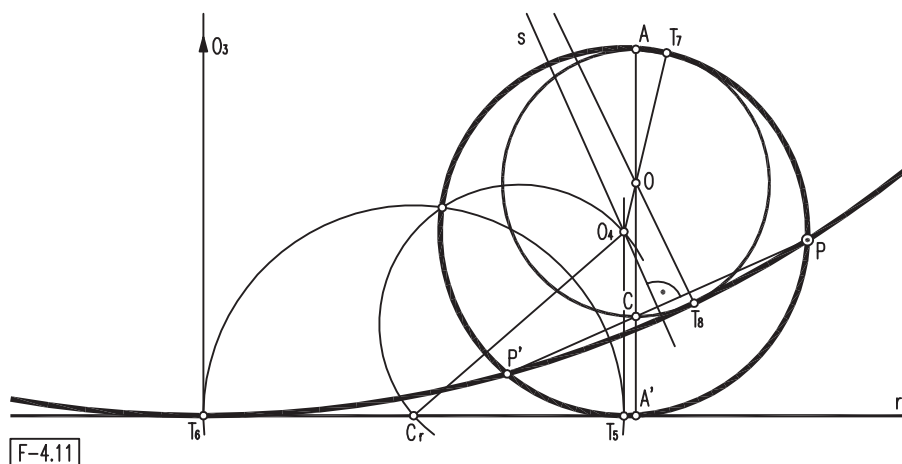
Obtemos o punto inverso de P trazando unha circunferencia (non a vemos porque case coincide con unha das solucións) que pase por P , A e A' . Obtemos P' , inverso de P .

As circunferencias solución an pasar por P e P' . Con isto o problema queda reducido a outro máis sinxelo que xa sabemos resolver: **Circunferencias que pasan por dous puntos e son tanxentes a unha recta** (ver o apartado 4.1).

Os centros das dúas circunferencias solución estarán na mediatriz de PP' (a recta s) e PP' será o seu eixo radical. Onde PP' corte a r será o centro radical das circunferencias solución e de tódalas que pasen por P e por P' .

Obtemos a tanxente dende Cr á circunferencia auxiliar que xa temos trazada e levamos a potencia sobre a recta r para obter T_5 e T_6 , os puntos de tanxencias das circunferencias solución coa recta r . Levantando perpendiculares por T_5 e T_6 á recta r , onde corten á mediatriz de PP' teremos O_4 e O_3 , centros das circunferencias buscadas.

Unimos O_4 e O_3 con O para obter os puntos de tanxencia (T_7 e T_8) das circunferencias solución coa dada e trazamos as dúas circunferencias solución.



F-4.11

4.7.- Circunferencias tanxentes a outras dúas pasando por un punto

Se temos en conta que **unha recta é unha circunferencia de radio infinito**, este problema é o mesmo que o visto no apartado 4.6, con tódalas súas variantes. En calquera caso comprobémolo:

Este problema pode ter dous posibles casos, dependendo da posición do punto.

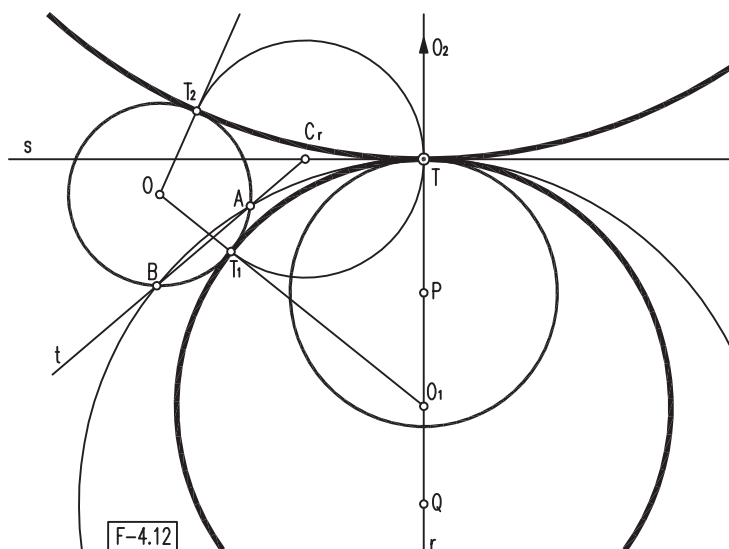
- Cando o punto está nunha circunferencia.
- Cando o punto está fora das circunferencias

Circunferencias tanxentes a unha circunferencia e a outra circunferencia nun punto dado - F-4.12

Dada a circunferencia de centro O , a de centro P e o punto de tanxencia T .

As circunferencias solución teñen que pasar por T que é o punto de tanxencia coa circunferencia de centro P , iso quere dicir que:

- Os centros das circunferencias solución estarán nunha recta r que une o centro P co punto de tanxencia T .
- A recta s será o eixo radical das circunferencias tanxentes á dada en T (as dúas solucións e calquera outra).



F-4.12

Facendo centro nun punto calquera Q de r , trazamos unha circunferencia que pase por T e que corte á de centro O en dous puntos A e B . A recta t será o eixo radical das circunferencias de centro Q e O . Onde a recta t corta á recta dada s será o centro radical (Cr) das circunferencias solución e das de centro O , P e Q . O segmento CrT será a potencia de todas elas. Facendo centro en Cr con raio CrT obtemos os puntos de tanxencia T_1 e T_2 coa circunferencia de centro O . Unindo O con T_1 e T_2 trazamos cadansúa recta que cortarán a r en O_1 e O_2 , centros das circunferencias solución.

Circunferencias tanxentes a dúas circunferencias pasando por un punto exterior a elas - F-4.13/14

Dadas as circunferencias de centros P e Q e o punto R .
Este problema ten catro solucións pero as debemos obter dúas a dúas.

Solucións 1 e 2 - F-4.13

Aplicando o visto en **DEBUXO TÉCNICO I** (páx.- 37. Apdo.- 5.4), trazamos a recta tanxente exterior ás circunferencias dadas, obtendo os puntos de tanxencia A e A' . Unimos os centros das circunferencias dadas P e Q . A tanxente e a recta anterior cortaranse no punto O .

Temos unha inversión de centro O que transforma a circunferencia de centro P na de centro Q , de tal xeito que A' é o punto inverso de A .

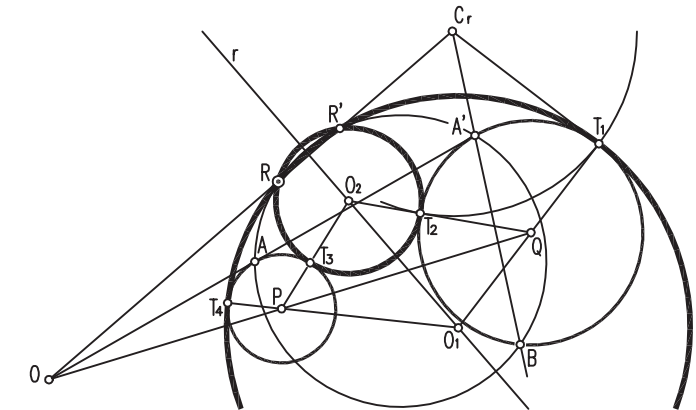
Obtemos o punto inverso de R (mediante unha circunferencia que pase por R , A e A'), R' .

As dúas circunferencias solución pasarán por R e R' . Con isto o problema queda reducido a outro máis sinxelo que xa sabemos resolver: **Circunferencias que pasan por dous puntos e son tanxentes a unha circunferencia** (ver o apartado 4.5).

A circunferencia auxiliar que xa temos trazada (que pasa por R , R' , A e A') corta á de centro Q en A' e B . A recta $A'B$ será o eixo radical de ámbalas dúas. Onde esta recta corte á recta RR' (eixo radical das circunferencias solución) será o punto Cr , centro radical de todas elas.

Obtemos a potencia de Cr con respecto á circunferencia de centro Q e obtemos os puntos de tanxencia T_1 e T_2 ; unindo estes puntos con Q obteremos O_1 e O_2 onde corten á recta r (mediatriz de RR'). O_1 e O_2 serán os centros das dúas circunferencias solución. Unindo O_1 e O_2 con P obtemos os puntos de tanxencia T_3 e T_4 .

Con centro en O_3 e O_4 trazamos as dúas circunferencias solución.



F-4.13

Solucións 3 e 4 - F-4.14

Aplicando o visto en **DEBUXO TÉCNICO I** (páx.- 38. Apdo.- 5.5), trazamos a recta tanxente interior ás circunferencias dadas, obtendo os puntos de tanxencia A e A' . Unimos os centros das circunferencias dadas P e Q . A tanxente e a recta anterior cortaranse no punto O .

Temos unha inversión de centro O que transforma a circunferencia de centro P na de centro Q , de tal xeito que A' é o punto inverso de A .

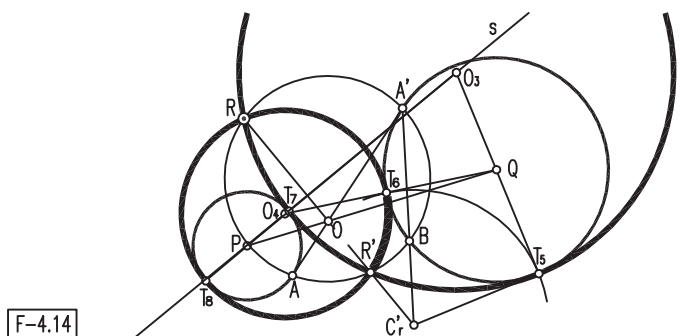
Obtemos o punto inverso de R (mediante unha circunferencia que pase por R , A e A'), R' .

As dúas circunferencias solución pasarán por R e R' . Con isto o problema queda reducido a outro máis sinxelo que xa sabemos resolver: **Circunferencias que pasan por dous puntos e son tanxentes a unha circunferencia** (ver o apartado 4.5).

A circunferencia auxiliar que xa temos trazada (que pasa por R , R' , A e A') corta á de centro Q en A' e B . A recta $A'B$ será o eixo radical de ámbalas dúas. Onde esta recta corte á recta RR' (eixo radical das circunferencias solución) será o punto Cr , centro radical de todas elas.

Obtemos a potencia de Cr con respecto á circunferencia de centro Q e obtemos os puntos de tanxencia T_5 e T_6 ; unindo estes puntos con Q obteremos O_3 e O_4 onde corten á recta s (mediatriz de RR'). O_3 e O_4 serán os centros das dúas circunferencias solución. Unindo O_3 e O_4 con P obtemos os puntos de tanxencia T_7 e T_8 .

Con centro en O_3 e O_4 trazamos as dúas circunferencias solución.



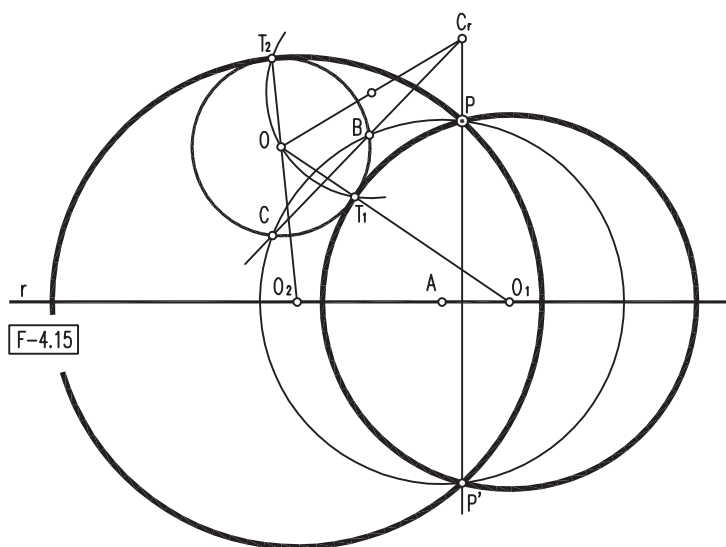
F-4.14

4.8.- Circunferencias tanxentes a unha circunferencia, pasando por un punto e tendo os centros nunha recta dada - F-4.15

Dada a circunferencia de centro O , o punto P e a recta r . (F-4.15).

Como as circunferencias solución van ter os centros na recta r , tamén pasarán polo punto P' , simétrico de P con respecto á recta r ; isto implica que a recta que une P con P' vai ser o eixo radical das circunferencias solución e de calquera outra que pase por eles.

Usando una circunferencia auxiliar, con centro en r , que pase por P e P' e que corte á circunferencia dada en dous puntos B e C , obteremos a recta CB , eixo radical da circunferencia dada e da auxiliar. Unindo o segmento BC co segmento PP' teremos o centro radical Cr . Aplicando potencia obteremos os puntos de tanxencia T_1 e T_2 das circunferencias solución coa dada.



TRAZADO.-

Obtemos P' , simétrico de P con respecto á recta r dada.

Con centro nun punto calquera A da recta r , trazamos unha circunferencia que pase por P e P' e que corte á dada en dous puntos B e C .

Unimos o segmento BC co PP' e, onde se corten, teremos o centro radical Cr .

Obtemos a potencia de Cr con respecto á circunferencia dada: Unindo Cr con O e trazando a circunferencia de diámetro OCr obtemos, onde se corte coa circunferencia dada, os puntos T_1 e T_2 , que serán os puntos de tanxencia das dúas circunferencias solución coa dada.

Para obter os centros das circunferencias solución unimos T_1 e T_2 con O e, onde os dous segmentos corten a r teremos os puntos O_1 e O_2 , centros das circunferencias solución.

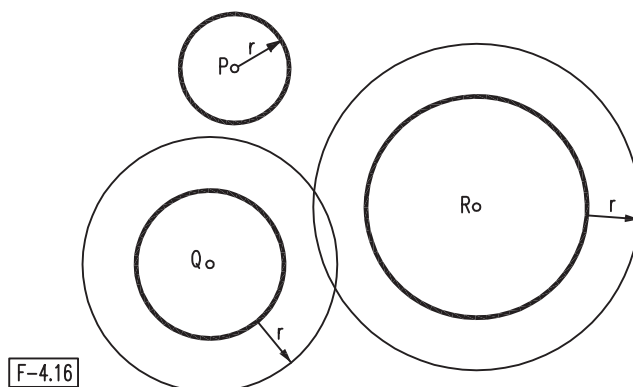
4.9.- Circunferencias tanxentes a tres circunferencias (problema de Apolonio) F-4.16/19

Dadas as circunferencias de centros P , Q e R . (F-4.16).

Este problema o resolveremos reducíndoo a outro que xa sabemos resolver. En concreto o reducimos ó caso resolto anteriormente en 4.7.- **Circunferencias tanxentes a dúas circunferencias pasando por un punto exterior a elas.**

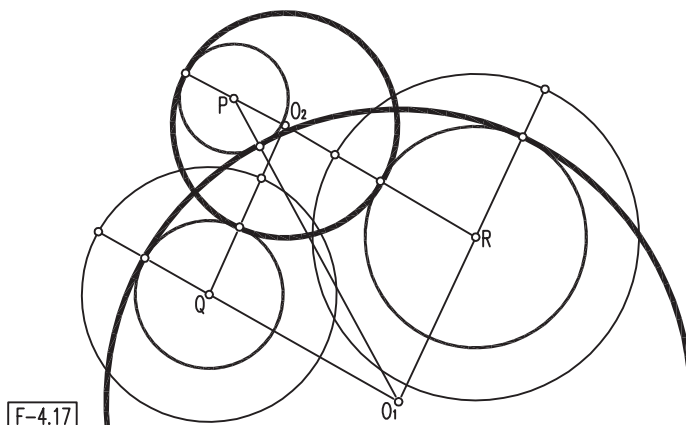
Se reducimos a circunferencia de centro P ó seu centro (o punto P) restandolle ó raio r da circunferencia, quedará unha circunferencia de raio cero, ou sexa o centro P da circunferencia.

Trazamos circunferencias con centro en Q e R e raios iguais ós delas máis o radio r . Se resolvemos o problema, obteremos as circunferencias tanxentes ás de centros R e Q (co raio incrementado na medida de r) e pasando polo punto P . As circunferencias solución que nós buscamos terán os mesmos centros pero co raio reducido na distancia de r e serán así tanxentes á circunferencia orixinal de centro P e raio r .

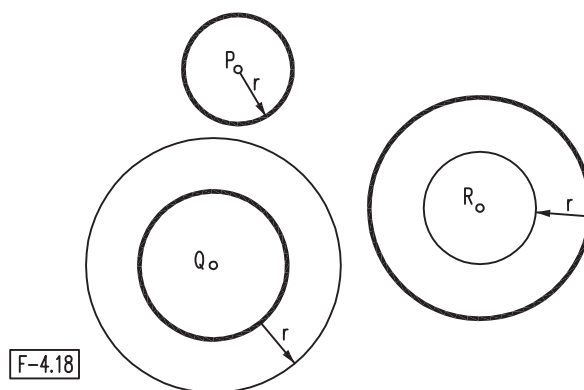


Na F-4.17 temos as **dúas solucións** que obteríamos por este procedemento (non están debuxados tódolos pasos por seren iguais ós vistos anteriormente). Se facemos o mesmo pero en lugar de engadir o raio r o restamos dos raios das circunferencias de centros Q e R , repetindo o proceso anterior teríamos outras **dúas solucións** ó noso problema.

As outras **catros solucións** saírían de restarlle o raio r a unha e engadirlllo á outra e viceversa.

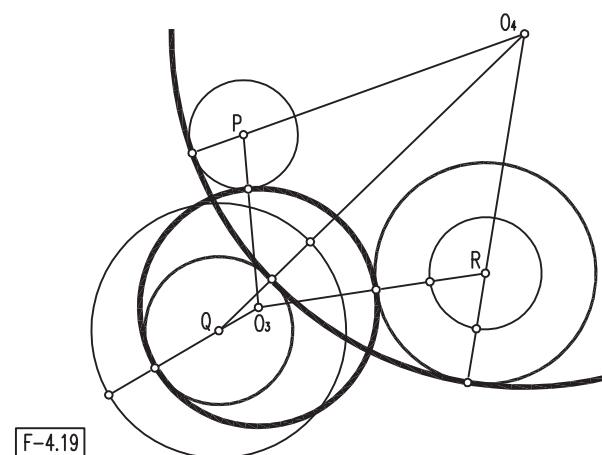


Na **F-4.17** temos un dos casos: Sumámoslle o raio á de centro **Q** e restámosllo á de centro **R**. Na **F-4.18** podemos ver as dúas solucións ó problema deste caso.



F-4.18

Obviamente, cando resolvamos este problema, debere-mos facelo en catro exercicios diferentes pois sería virtualmente imposible facelo no mesmo e, ademais, non se entendería nada.



F-4.19

5 - CURVAS CÍCLICAS E TÉCNICAS

CONCEPTOS

Unha **CURVA CÍCLICA** é aquela xerada polo movemento dun punto dunha circunferencia (ou dunha recta) que roda sobre unha recta ou sobre outra circunferencia. Chámanse curvas cíclicas porque se van repetindo unha e outra vez por ciclos (cando o punto que as xera volve á súa posición inicial)

Existen moitas e moi fermosas curvas cíclicas. Nós veremos as máis salientables (a xuízo do autor), que son: A **cicloide**, a **epicicloide**, a **hipocicloide** e a **cardioide**.

Existen moitas outras curvas técnicas (algunhas delas xa as vimos en **DEBUXO TÉCNICO I**, no capítulo 6). Estudaremos aquí o trazado da que eu considero máis salientable: A **evolvente dunha circunferencia**.

CICLOIDE

A **CICLOIDE** é unha **curva xerada por un punto dunha circunferencia no movemento da circunferencia sobre unha liña recta**.

A curva remata cando o punto volve a súa posición primitiva despois de que a circunferencia dea unha volta completa (se seguimos teremos outro ciclo da curva igual ó anterior).

Aquí veremos o trazado da **cicloide normal** (cando o punto está na circunferencia); poderíamos trazar unha **cicloide acurtada** ou **alongada** cando o punto é interior ou exterior á circunferencia. Os trazados destas dúas cicloides son similares ós da cicloide normal.

A cicloide, igual que o resto das cíclicas, é unha curva que teremos que obter por puntos (que logo uniremos a man alzada ou con plantilla de curvas). Canta máis exactitude queiramos maior número de puntos deberemos coller.

5.1.- Trazado da CICLOIDE - F-5.1

Dada a circunferencia de centro **O**, o punto **P** e a recta **PP₁₂**

A lonxitude da recta **PP₁₂** ten que ser igual á lonxitude da circunferencia polo que deberemos rectificar a circunferencia de centro **O** para obter a súa lonxitude equivalente (ver apartado 1.6, páx. 13).

Como temos que obter puntos da cicloide colleremos **12 posicións do punto P** de partida, polo que teremos que dividir a circunferencia en **12 partes iguais** (coa lonxitude do radio dividímola circunferencia en seis partes e, coa mediatriz dunha delas, en doce). Temos as divisións do **1** ao **12**.

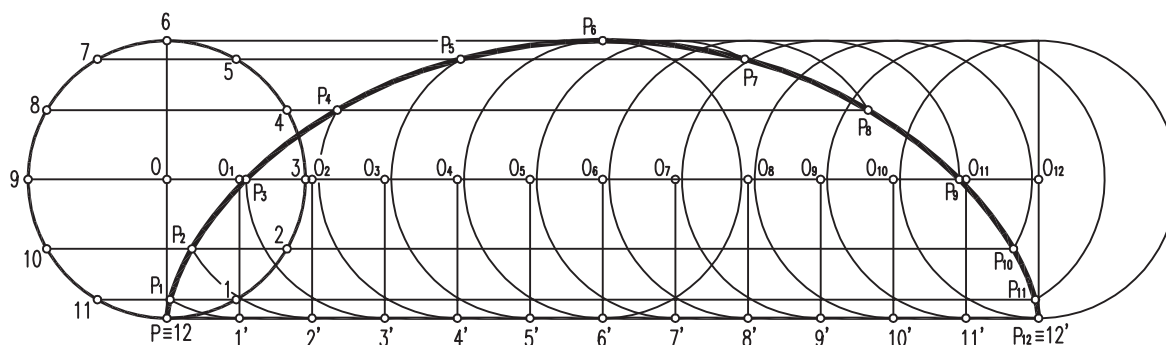
Dividímola recta **PP₁₂** en doce partes iguais (teorema de **Thales**). Cada unha destas partes será a rectificación de cada un dos doce arcos nos que temos dividida a circunferencia de centro **O**. Temos as divisións do **1'** ó **12'**.

Levantando perpendiculares polos puntos **1'-12'** teremos, onde se corten coa recta horizontal trazada polo centro **O**, os sucesivos centros (**O₁-O₁₂**) das doce posicións da circunferencia no seu movemento sobre a recta **PP₁₂**.

As sucesivas posicións do punto **P** (de **P₁** a **P₁₂**) obterémolas nas interseccións das sucesivas circunferencias coas rectas horizontais trazadas polas divisións respectivas. **P₁** estará onde o arco de circunferencia de centro **O₁** e radio **O₁1'** corte á recta horizontal trazada polo punto **1** da circunferencia... E así sucesivamente.

Unha vez obtidas as sucesivas posicións do punto **P** (**P₁-P₁₂**) as uniremos a man alzada ou con plantilla de curvas.

Se queremos aforrar traballo no trazado, podemos ter en conta que a cicloide é simétrica con respecto ao eixo **P6'6'** e podemos polo tanto obter os puntos da dereita do eixo coma simétricos dos da esquerda.



F-5.1

EPICICLOIDE

A **EPICICLOIDE** é unha **curva xerada por un punto dunha circunferencia no movemento da circunferencia sobre o exterior de outra circunferencia**.

A curva remata cando o punto volve á súa posición primitiva despois de que a circunferencia dea unha volta completa.

Aquí veremos o trazado da **epicicloide normal** (cando o punto está na circunferencia); poderíamos trazar unha **epicicloide acurtada** ou **alongada** cando o punto é interior ou exterior á circunferencia. Os trazados destas dúas epicicloides son similares ós da epicicloide normal.

Como xa quedou dito, a epicicloide é unha curva que teremos que obter por puntos (que logo uniremos a man alzada ou con plantilla de curvas). Canta máis exactitude queiramos maior número de puntos deberemos coller.

5.2.- Trazado da EPICICLOIDE - F-5.2

Dada a circunferencia de centro **O**, o punto **P** e o arco de circunferencia **PP₁₂** de centro **O'**.

A lonxitude do arco **PP₁₂** ten que ser igual á lonxitude da circunferencia polo que (dado que o arco é unha semicircunferencia) o radio do arco **PP₁₂** será o dobre do da circunferencia de centro **O**.

Como temos que obter puntos da epicicloide colleremos 12 posicións do punto **P** de partida, polo que teremos que dividir a circunferencia en 12 partes iguais (coa lonxitude do radio dividímola circunferencia en seis partes e, coa mediatriz dunha delas, en doce). Temos as divisións do **1** ó **12**.

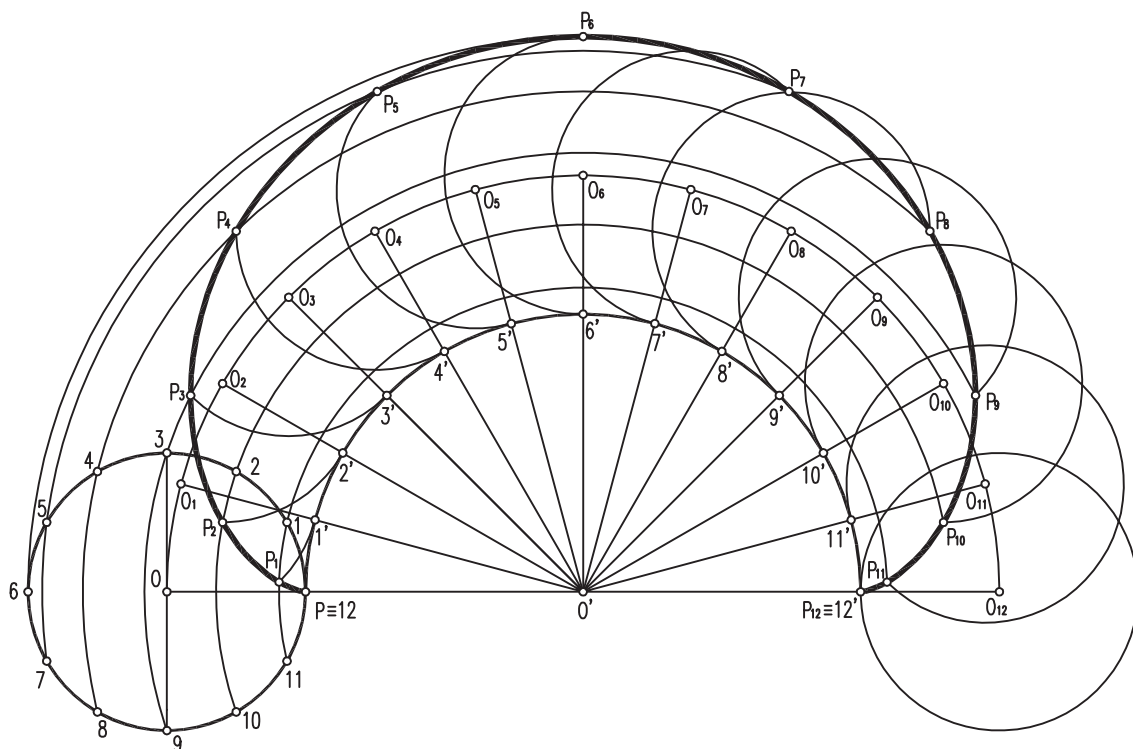
Dividimos igualmente o arco **PP₁₂** en doce partes iguais de xeito similar. Cada unha das partes do arco **PP₁₂** será a rectificación (terá a mesma lonxitude) de cada unha das partes nas que dividimos a circunferencia de centro **O**. Temos as divisións do **1'** ó **12'**.

Unindo os puntos **1'-12'** co centro **O'** teremos, onde se corten coa circunferencia de centro **O'** e radio **O'O**, os centros (**O₁-O₁₂**) das doce posicións da circunferencia no seu movemento sobre a semicircunferencia **PP₁₂**.

As sucesivas posicións do punto **P** (de **P₁** a **P₁₂**) obterémolas nas interseccións das sucesivas circunferencias coas circunferencias de centro **O'** e radio ate cada unha das divisións da circunferencia de centro **O**. **P₁** estará onde o arco de circunferencia de centro **O₁** e radio **O₁1'** corte á circunferencia de centro **O'** e radio **O'1**... E así sucesivamente.

Unha vez obtidas as sucesivas posicións do punto **P** (**P₁ - P₁₂**) as uniremos a man alzada ou con plantilla de curvas.

Se queremos aforrar traballo no trazado, podemos ter en conta que a cicloide é simétrica con respecto ao eixo **O₆O'** e podemos polo tanto obter os puntos da dereita do eixo coma simétricos dos da esquerda.



F-5.2

HIPOCICLOIDE

A **HIPOCICLOIDE** é unha **curva xerada por un punto dunha circunferencia no movemento da circunferencia sobre o interior de outra circunferencia**.

A curva remata cando o punto volve á súa posición primitiva despois de que a circunferencia dea unha volta completa.

Aquí veremos o trazado da **hipocicloide normal** (cando o punto está na circunferencia); poderíamos trazar unha **hipocicloide acurtada** ou **alongada** cando o punto é interior ou exterior á circunferencia. Os trazados destas dúas hipocicloides son similares ós da hipocicloide normal.

Como xa quedou dito, a hipocicloide é unha curva que teremos que obter por puntos (que logo uniremos a man alzada ou con plantilla de curvas). Canta máis exactitude queiramos maior número de puntos deberemos coller.

5.3.- Trazado da HIPOCICLOIDE - F-5.3

Dada a circunferencia de centro **O**, o punto **P** e o arco de circunferencia **PP₁₂** de centro **O'**.

A lonxitude do arco **PP₁₂** ten que ser igual á lonxitude da circunferencia polo que (dado que o arco é un cuarto de circunferencia) o radio do arco **PP₁₂** será catro veces maior que o da circunferencia de centro **O**.

Como temos que obter puntos da hipocicloide colleremos 12 posicións do punto **P** de partida, polo que teremos que dividir a circunferencia en 12 partes iguais. Temos as divisións do **1** ó **12**.

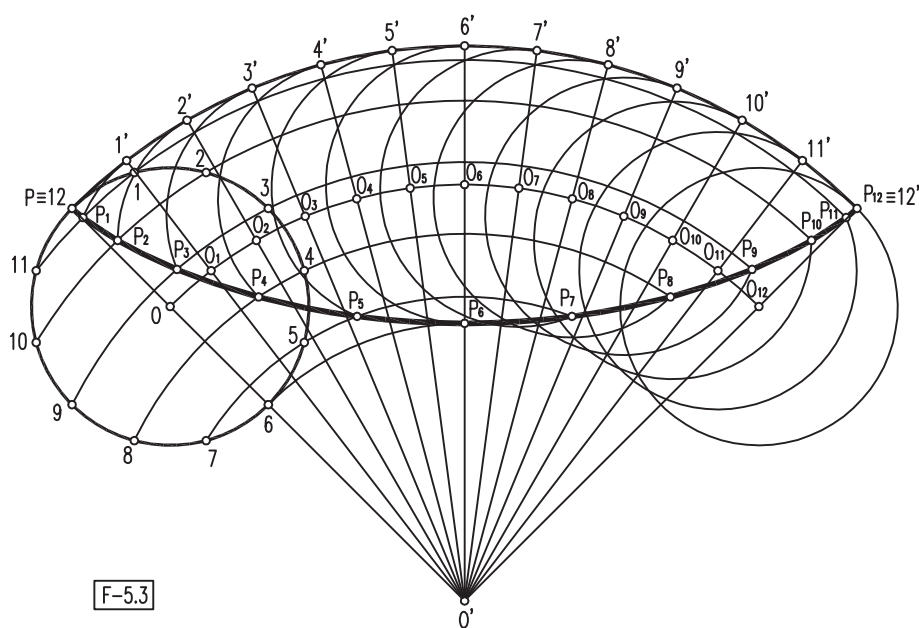
Dividimos igualmente o arco **PP₁₂** en doce partes iguais de xeito similar. Cada unha das partes do arco **PP₁₂** será a rectificación (terá a mesma lonxitude) de cada unha das partes nas que dividimos a circunferencia de centro **O**. Temos as divisións do **1'** ao **12'**.

Unindo os puntos **1'-12'** co centro **O'** teremos, onde se corten coa circunferencia de centro **O'** e radio **O'O**, os centros (**O₁-O₁₂**) das doce posicións da circunferencia no seu movemento sobre a semicircunferencia **PP₁₂**.

As sucesivas posicións do punto **P** (de **P₁** a **P₁₂**) obterémolas nas interseccións das sucesivas circunferencias coas circunferencias de centro **O'** e radio ate cada unha das divisións da circunferencia de centro **O**. **P₁** estará onde o arco de circunferencia de centro **O₁** e radio **O₁1'** corte á circunferencia de centro **O'** e radio **O'1**... E así sucesivamente.

Unha vez obtidas as sucesivas posicións do punto **P** (**P₁ - P₁₂**) as uniremos a man alzada ou con plantilla de curvas.

Se queremos aforrar traballo no trazado, podemos ter en conta que a hipocicloide é simétrica con respecto ao eixo **6'O'** e podemos polo tanto obter os puntos da dereita do eixo coma simétricos dos da esquerda.



F-5.3

CARDIOIDE OU CARACOL DE PASCAL

A **CARDIOIDE** ou **CARACOL DE PASCAL** é unha curva xerada por un punto dunha circunferencia no movemento da circunferencia sobre o exterior doutra circunferencia igual ca ela.

A curva remata cando o punto volve á súa posición primitiva despois de que a circunferencia dea unha volta completa.

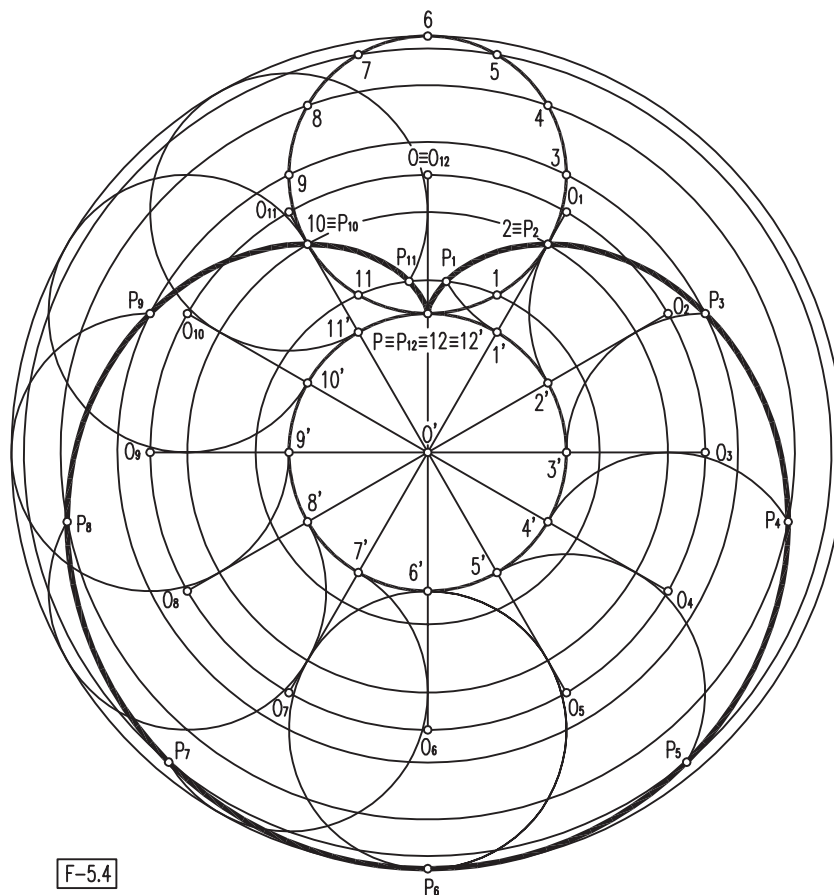
O **cardioide** é en realidade un caso particular de **epicicloide** e, polo tanto, o trazado coincide co xa visto no apartado 5.2.

5.4.- Trazado da CARDIOIDE - F-5.4

Dada a circunferencia de centro **O**, o punto **P** e a circunferencia de centro **O'**.

As dúas circunferencias son iguais, razón pola que as divisións dunha e doutra serán as mesmas e medirán o mesmo.

O procedemento de trazado é o mesmo que o visto no caso da epicicloide e podemos, coma en ela, usar a simetría para obter a metade dos puntos.



F-5.4

EVOLVENTE DUNHA CIRCUNFERENCIA

A **EVOLVENTE** dunha circunferencia é a curva xerada por un punto dunha recta tanxente á circunferencia que se move, rodando, sobre ela.

5.5.- Trazado da EVOLVENTE - F-5.5

Dada a circunferencia de centro **O** e o punto **P**.

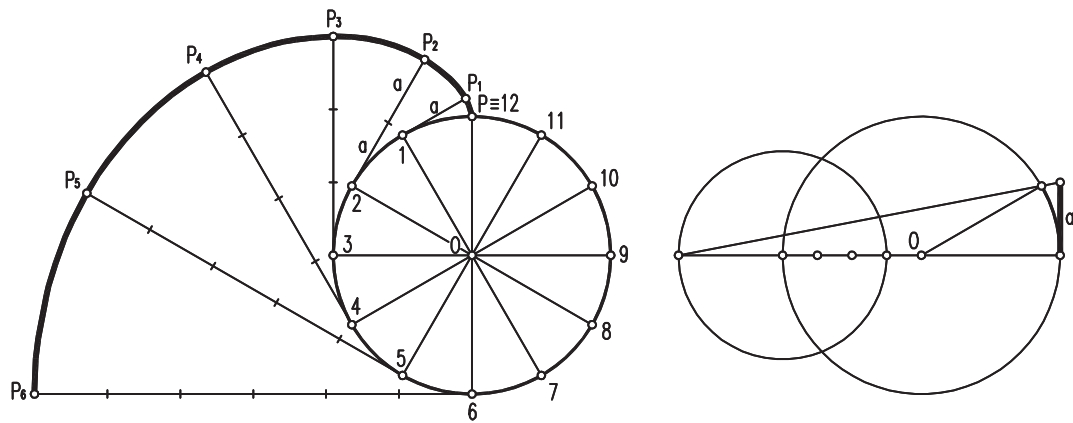
Temos que facer a curva por puntos, razón pola que dividiremos a circunferencia en 12 partes iguais (xa sabemos, cantas máis partes máis exactitude).

A recta que roda pola circunferencia ten que ser tanxente a ela en cada un dos puntos. Trazamos, por cada punto da circunferencia (1-12) un radio da circunferencia. As sucesivas posicións da recta tanxente serán perpendiculares ó radio respectivo da circunferencia.

En primeiro lugar rectificaremos o arco dunha das doce partes nas que temos dividida a circunferencia. Obtemos a lonxitude **a**.

Polo punto **1** trazamos unha perpendicular ó radio **1O**. A partir de **1** levamos sobre a recta a distancia **a**, o que nos dará o punto **P₁**.

Polo punto **2** trazamos unha perpendicular ó radio **2O**. A partir de **2** levamos sobre a recta a distancia **a** dúas veces, o que nos dará o punto **P₂**, e así sucesivamente.
Unha vez obtidos tódolos puntos, unimos a man alzada ou con plantilla de curvas.



F-5.5

6 - CURVAS CÓNICAS

CONCEPTOS E CURIOSIDADES

Como xa quedou dito (**DEBUXO TÉCNICO I, capítulo 7**), tódalas cónicas, tamén a circunferencia, son no fondo a mesma curva e, polo tanto, todas elas responden ao mesmo trazado. Outro tanto pasa con calquera outro aspecto da súa xeometría e o caso das tanxencias ou da intersección con rectas non é unha excepción.

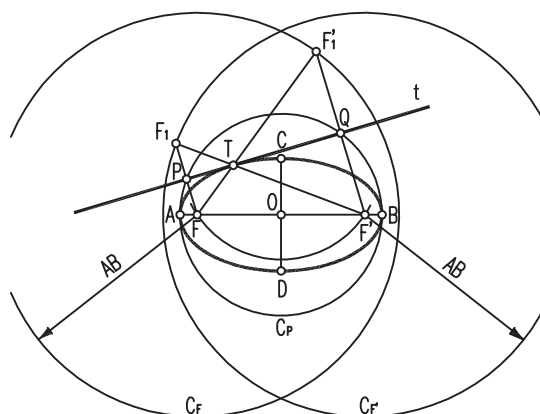
Circunferencia focal: A circunferencia que ten por centro un dos focos e por radio o eixo maior

Circunferencia principal.- A circunferencia que ten por centro o centro da cónica e por diámetro o eixo maior.

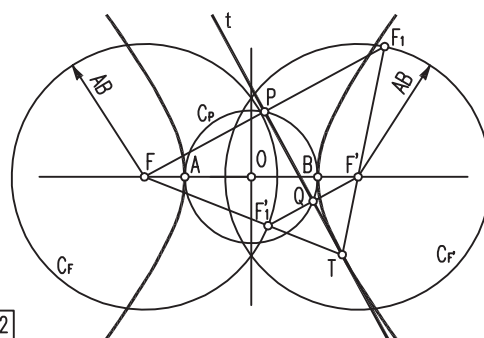
Dada a particular xeometría das cónicas, podemos comprobar que, en determinados casos, pasan determinadas cousas:

- Se temos unha recta tanxente **t** a unha cónica (**F-6.1/3**) terá un punto **T** (o de tanxencia) común coa cónica.
- O punto **P** (ou **Q**) de corte da recta tanxente coa circunferencia principal estará, sempre, no punto medio entre o foco que non é centro da circunferencia focal e o seu simétrico con respecto á recta tanxente. Na **F-6.1** (recta tanxente á elipse) vemos como o punto **P** de corte da recta coa circunferencia principal está á mesma distancia de **F** e de **F₁**, que está na circunferencia focal de centro **F'**. Do mesmo xeito, o punto **Q** de corte da recta coa circunferencia principal está á mesma distancia de **F'** e de **F'₁**, que está na circunferencia focal de centro **F**. Outro tanto pasa no caso da hipérbole (**F-6.2**).
- No caso da parábola (**F-6.3**) teremos que a directriz **d** é a circunferencia focal e a recta **c** paralela a ela pasando polo vértice **V** será a circunferencia principal. Igual que no caso da elipse e da hipérbole, o punto **P** de tanxencia entre a recta e a parábola está á mesma distancia de **F** e de **F₁**, o seu simétrico con respecto á recta tanxente.
- En calquera das tres cónicas, unindo o punto simétrico do foco con respecto á recta tanxente co centro da circunferencia focal, esa recta cortará á cónica no punto de tanxencia **T**.

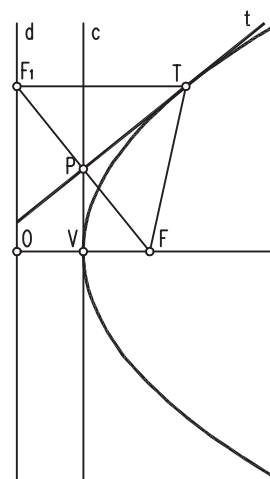
Tendo en conta estas propiedades, poderemos obter os puntos de tanxencia e as rectas tanxentes a unha cónica sen necesidade de ter debuxada a cónica.



F-6.1



F-6.2



F-6.3

RECTAS TANXENTES ÁS CÓNICAS

6.1.- Rectas tanxentes á elipse dende un punto exterior (F-6.4)

Dados os eixos **AB** e **CD** da elipse e o punto **X**.

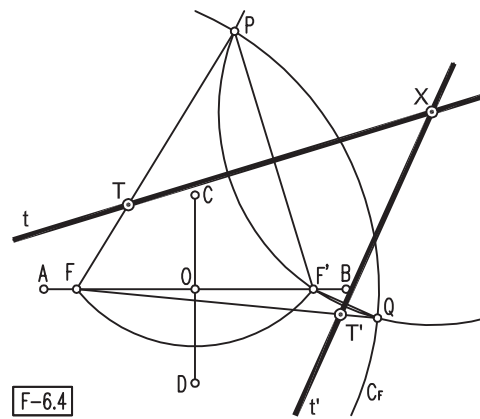
Obtemos os focos da elipse: Con centro en **C** e radio **AO** trazamos un arco que cortará ó eixo maior **AB** nos focos **F** e **F'**.

Trazamos unha circunferencia focal das dúas posibles. Facendo centro en **F** con radio **AB** trazamos a circunferencia focal.

Tendo en conta o que vimos no apartado anterior e dado que **X** vai ser un punto das rectas tanxentes, sabemos que facendo centro en **X** con radio ata **F'** (o foco que non é centro da circunferencia focal), os puntos de corte coa focal serán simétricos de **F'** con respecto ás rectas tanxentes. Deste xeito, unindo os puntos **P** e **Q** con **F'** e facendo as mediatrices dos segmentos **PF'** e **QF'** obteremos **t** e **t'**, rectas tanxentes á elipse.

Unindo os puntos **P** e **Q** con **F** (centro da circunferencia focal) obteremos, onde se corten con **t** e **t'**, os puntos de tanxencia **T** e **T'**.

Como podedes ver non tivemos necesidade de trazar a elipse.



F-6.4

6.2.- Rectas tanxentes á elipse paralelas a unha dirección (F-6.5)

Dados os eixos **AB** e **CD** da elipse e a dirección **d**.

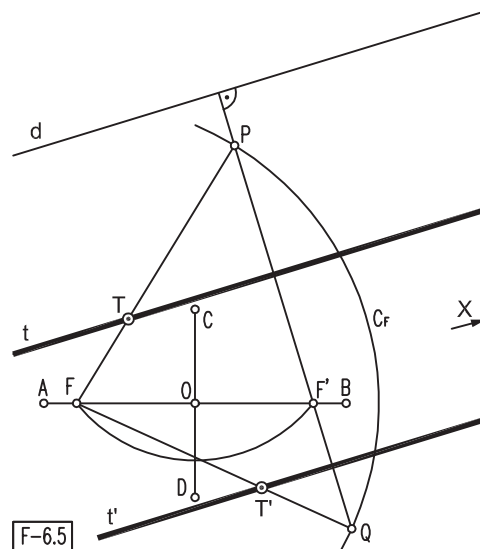
O procedemento de resolución é o mesmo que o do punto anterior:

Obtemos os focos da elipse: Con centro en **C** e radio **AO** trazamos un arco que cortará o eixo maior **AB** nos focos **F** e **F'**. Con centro en **F** e radio **AB** trazamos a circunferencia focal **C_F**.

As rectas tanxentes serán paralelas a **d** e iso quere dicir que, como todas as paralelas, se cortarán no infinito nun hipotético punto **X**. Se facemos centro nese punto **X** con radio ata **F'** (o foco que non é centro da circunferencia focal), dado que o radio é infinito, a circunferencia será unha recta que pasa por **F'** e é perpendicular a **d**.

Os puntos de corte coa focal serán simétricos de **F'** con respecto ás rectas tanxentes. Deste xeito, unindo os puntos **P** e **Q** con **F'** e facendo as mediatrices dos segmentos **PF'** e **QF'** obteremos **t** e **t'**, rectas tanxentes á elipse.

Unindo os puntos **P** e **Q** con **F** (centro da circunferencia focal) obteremos, onde se corten con **t** e **t'**, os puntos de tanxencia **T** e **T'**.



F-6.5

6.3.- Rectas tanxentes á hipérbole dende un punto exterior (F-6.6)

Dado os eixo **AB**, os focos **F** e **F'** e o punto **X**.

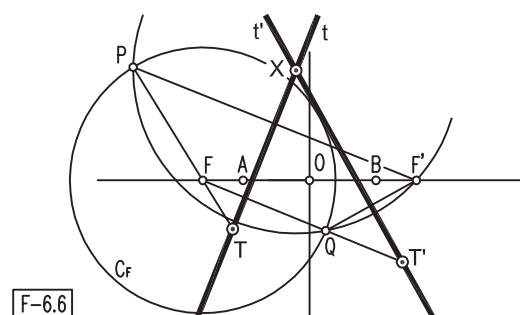
De novo facemos o mesmo que o indicado no apartado 6.1.

Con centro en **F** e radio **AB** trazamos a circunferencia focal **C_F**.

Con centro en **X** e radio **XF'** trazamos un arco de circunferencia que cortará a **C_F** en **P** e **Q**.

Os puntos de corte coa focal serán simétricos de **F'** con respecto ás rectas tanxentes. Deste xeito, unindo os puntos **P** e **Q** con **F'** e facendo as mediatrices dos segmentos **PF'** e **QF'** obteremos **t** e **t'**, rectas tanxentes á hipérbole.

Unindo os puntos **P** e **Q** con **F** (centro da circunferencia focal) obteremos, onde se corten con **t** e **t'**, os puntos de tanxencia **T** e **T'**.



F-6.6

6.4.- Rectas tanxentes á hipérbole paralelas a unha dirección (F-6.7)

Dado o eixo **AB**, os focos **F** e **F'** e a dirección **d**.

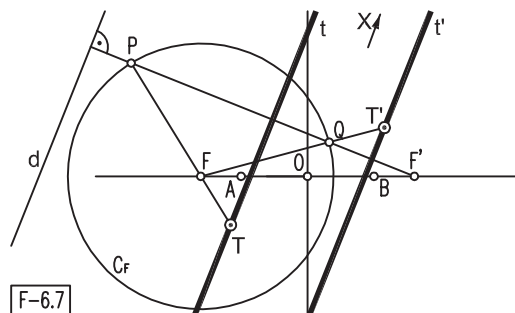
De novo facemos o mesmo que o indicado no apartado 6.2.

As rectas tanxentes serán paralelas a d e iso quere dicir que, como todas as paralelas, se cortarán no infinito nun hipotético punto X . Se facemos centro nese punto X con radio ata F' (o foco que non é centro da circunferencia focal), dado que o radio é infinito, a circunferencia será unha recta que pasa por F' e é perpendicular a d .

Trazamos unha perpendicular á dirección d pasando por F' que cortará a C_F en P e Q .

Os puntos de corte coa focal serán simétricos de F' con respecto ás rectas tanxentes. Deste xeito, unindo os puntos P e Q con F' e facendo as mediatrices dos segmentos PF' e QF' obteremos t e t' , rectas tanxentes á hipérbole.

Unindo os puntos P e Q con F (centro da circunferencia focal) obteremos, onde se corten con t e t' , os puntos de tanxencia T e T' .



F-6.7

6.5.- Rectas tanxentes á parábola dende un punto exterior (F-6.8)

Dada a directriz d , o eixo OF e o punto X .

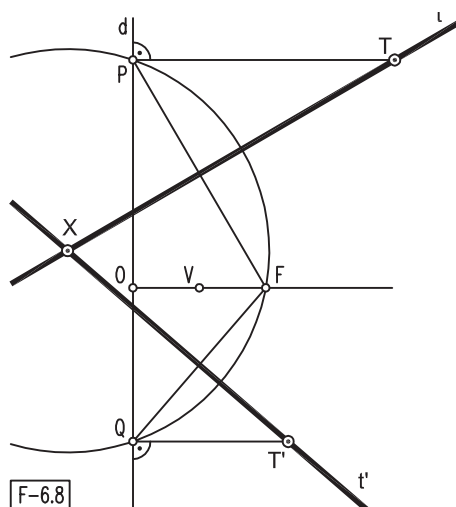
De novo facemos o mesmo que o indicado no apartado 6.1.

Facendo a mediatriz de OF obtemos o vértice V da parábola.

Con centro en X e radio XF (que non é centro da circunferencia focal d) trazamos un arco que cortará a d en dous puntos P e Q .

Os puntos de corte coa focal (neste caso a directriz d) serán simétricos de F con respecto ás rectas tanxentes. Deste xeito, unindo os puntos P e Q con F e facendo as mediatrices dos segmentos PF e QF obteremos t e t' , rectas tanxentes á hipérbole.

Unindo os puntos P e Q con F' (centro da circunferencia focal que está no infinito) ou sexa, trazando perpendiculares a d obteremos, onde se corten con t e t' , os puntos de tanxencia T e T' .



F-6.8

6.6.- Rectas tanxentes á parábola paralelas a unha dirección (F-6.9)

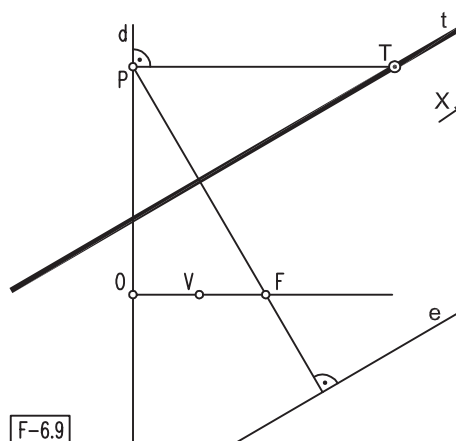
Dada a directriz d , o eixo OF e a dirección e .

Facendo a mediatriz de OF obtemos o vértice V da parábola.

Trazamos unha perpendicular á dirección e pasando por F , que cortará á directriz d no punto P .

O punto de corte coa focal (d) será simétrico de F con respecto á recta tanxente. Deste xeito, unindo o punto P con F e facendo a mediatriz do segmento PF obteremos t , recta tanxente á parábola.

Unindo o punto P con F' (centro da circunferencia focal que está no infinito) ou sexa, trazando unha perpendicular a d obteremos, onde se corte con t o punto de tanxencia T .

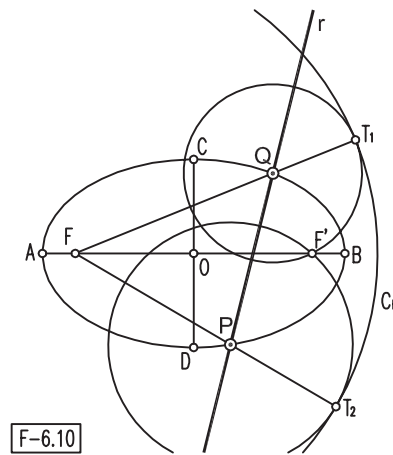


F-6.9

INTERSECCIÓN DUNHA RECTA COAS CÓNICAS

Xa vimos as curiosidades das cónicas e que, como no fondo todas elas son a mesma curva, o final facemos sempre o mesmo para resolver calquera problema. Non ía pasar menos cando se cortan cunha recta.

Dada a marabillosa xeometría da superficie cónica, cando unha recta se corta cunha cónica (por exemplo cunha elipse) podemos comprobar (F-6.10) que os puntos de intersección **P** e **Q** da elipse coa recta **r** son, ó mesmo tempo, os centros de cadansúa circunferencia que pasando polo foco **F'** (que non é centro da circunferencia focal) son tanxentes á circunferencia focal **C_F**. Como consecuencia, os puntos de tanxencia destas circunferencias coa focal estarán na recta que une os puntos de intersección **P** e **Q** co centro **F** da circunferencia focal **C_F**. Tendo isto en conta e aplicando o que xa sabemos de xeometría plana seremos quen de resolver a intersección dunha recta con calquera das cónicas.



F-6.10

6.7.- Intersección dunha recta coa elipse (F-6.11)

Dados os eixos **AB** e **CD** da elipse e a recta **r**. Obtemos os focos da elipse e, con centro en **F** e radio **AB** trazamos a circunferencia focal **C_F**. Tendo en conta que os puntos de intersección da recta coa elipse son os centros de dúas circunferencias que pasan por **F'** (o foco que non é centro da circunferencia focal), podemos deducir o seguinte:

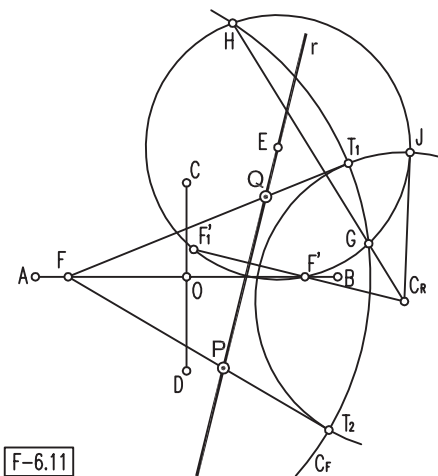
- As circunferencias cuxos centros estamos a buscar pasarán por **F'** e, ademais, polo simétrico de **F'** con respecto á recta **r**.
- A recta **F'F'₁** será o eixo radical de tódalas circunferencias que pasen por **F'** e por **F'₁**.

Obtemos, en primeiro lugar, **F'₁**, simétrico de **F'** con respecto a **r**.

Con centro en **E** (un punto calquera de **r**) e radio **EF'** trazamos unha circunferencia que corte ademais a **C_F** en dous puntos **H** e **G**. A recta **F'F'₁** será o eixo radical das circunferencias buscadas e da auxiliar de centro **E**; a recta **HG** será o eixo radical da circunferencia auxiliar e da **C_F**. Como consecuencia, onde se corten os dous eixos radicais será **Cr**, centro radical de todas elas.

Aplicando o concepto de potencia (ver apartado 1.2 e seguintes), obtemos a recta tanxente á circunferencia auxiliar dende **Cr**. Obtemos o punto de tanxencia **J**. **CrJ** será a potencia de **Cr** con respecto a tódalas circunferencias (incluídas as que teñen o seu centro nos puntos de intersección). Con centro en **Cr** e radio **CrJ** cortamos á circunferencia focal nos puntos de tanxencia **T₁** e **T₂**.

Unindo **T₁** e **T₂** con **F** (centro da circunferencia focal **Cr**) obteremos os puntos de intersección **P** e **Q** da recta **r** coa elipse, sen necesidade de debuxar a curva.



F-6.11

6.8.- Intersección dunha recta coa hipérbole (F-6.12)

Dado o eixo **AB**, os focos **F** e **F'** e a recta **r**.

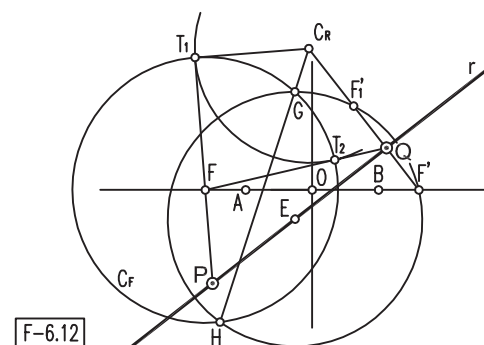
Facemos o mesmo que o indicado no apartado 6.7.

con centro en **F** e radio **AB** trazamos a circunferencia focal **C_F**.

Dende un punto calquera **E** da recta **r** e radio **EF'** trazamos unha circunferencia (que pasará tamén por **F'₁**, simétrico de **F'** con respecto a **r**) e cortará a **C_F** nos puntos **G** e **H**. Onde a recta **GH** (eixo radical da circunferencia de centro **E** e a focal) se corte coa recta **F'F'₁** (eixo radical da circunferencia de centro **E** e de tódalas que pasan por **F'** e **F'₁**) teremos o centro radical **Cr**.

Obtemos os puntos de tanxencia dende **Cr** á circunferencia focal **C_F**. Temos **T₁** e **T₂**.

Unindo **T₁** e **T₂** con **F** (centro da circunferencia focal **Cr**) obteremos os puntos de intersección **P** e **Q** da recta **r** coa hipérbole.



F-6.12

6.9.- Intersección dunha recta coa parábola (F-6.13)

Dada a directriz d , o eixo OF e a recta r .

Facendo a mediatriz de OF obtemos o vértice V da parábola.

Facemos o mesmo que o indicado no apartado 6.7.

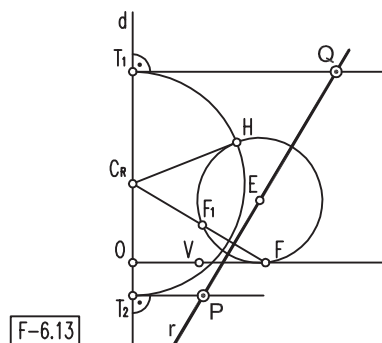
Xa temos a circunferencia focal que, neste caso é a directriz d .

Dende un punto calquera E da recta r e radio EF trazamos unha circunferencia que pasará tamén por F_1 , simétrico de F con respecto a r .

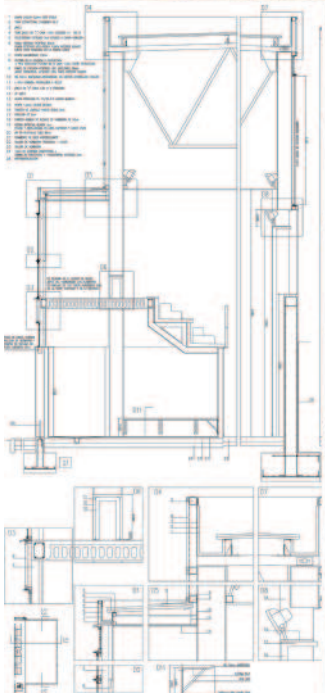
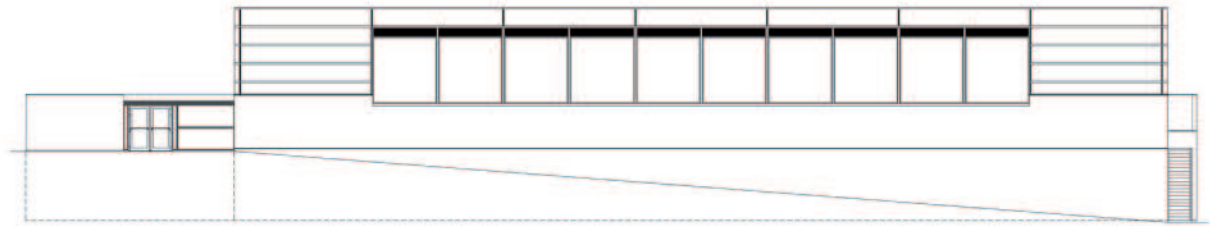
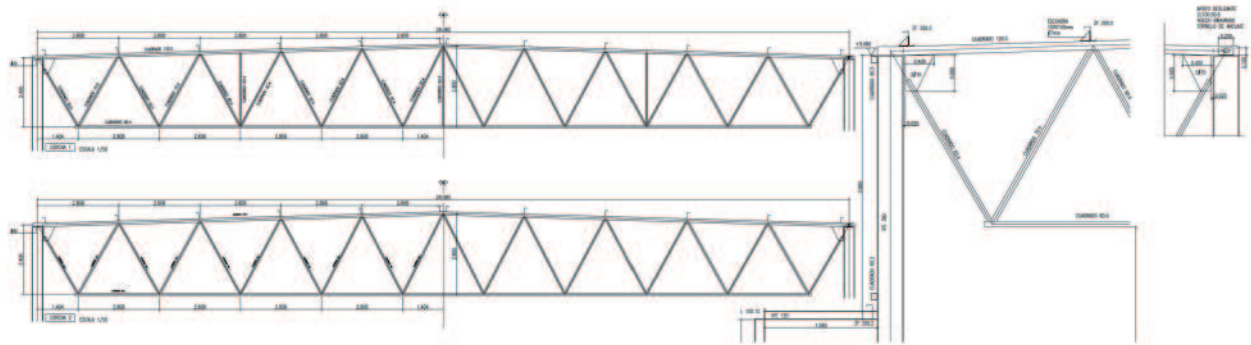
Onde a recta FF_1 (eixo radical da circunferencia de centro E e de tódalas que pasan por F e F_1) corta á directriz d teremos o centro radical C_r .

Obtemos o punto de tanxencia dende C_r á circunferencia de centro E . Temos H .

Con centro en C_r e radio C_rH obtemos os puntos T_1 e T_2 (puntos de tanxencia coa circunferencia focal). Trazando perpendiculares a d por T_1 e T_2 obteremos os puntos de intersección P e Q da recta r coa parábola.



F-6.13



1 - FERRAMENTAS DE TRABALLO (2)

No libro anterior (**DEBUXO TÉCNICO I – 2-FERRAMENTAS DE TRABALLO**, páx. 69 e seguintes) vimos varias ferramentas de traballo que nos serven para resolver calquera tipo de problemas en Sistema Diédrico.

Unha das máis salientables era o **ABATEMENTO**. Temos, xunto con ela, outras dúas que tamén nos poden axudar a resolver os mesmos ou outros problemas: Os **xiros** e os **cambios de plano**.

Nun momento dado necesitaremos poñer unha recta en verdadeira magnitude (con unha das proxeccións paralelas a algún dos planos de proxección) ou transformar un plano en outro máis sinxelo (un plano oblicuo nun plano proxectante); para estas cousas temos os xiros ou os cambios de plano.

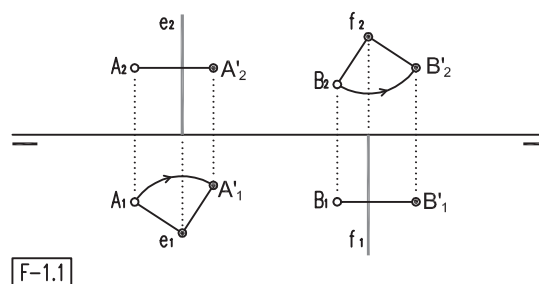
XIROS

1.1.- Xiro dun punto - F-1.1

Para facer un xiro necesitamos un eixo de xiro. Temos dúas opcións, xirar ao redor dun **eixo vertical** ou xirar ao redor dun **eixo de punta**.

Cando **xiramos ao redor dun eixo vertical "e"** podemos ver o xiro na proxección horizontal. Facendo centro en e_1 , con radio ate a proxección horizontal do punto A_1 , trazamos un arco (no sentido e co ángulo que nos pidan ou necesitemos) e obtemos a nova posición de A_1 despois do xiro: A'_1 .

Cando un punto xira ao redor dun eixo vertical mantén a súa cota, o que implica que A'_2 estará nunha paralela á **LT** na vertical de A'_1 .



Cando **xiramos ao redor dun eixo de punta f** podemos ver o xiro na proxección vertical. Facendo centro en f_2 , con radio ate a proxección vertical do punto B_2 , trazamos un arco (no sentido e co ángulo que nos pidan ou necesitemos) e obtemos a nova posición de B_2 despois do xiro: B'_2 .

Cando un punto xira ao redor dun eixo de punta mantén o seu alonxamento, o que implica que B'_1 estará nunha paralela á **LT** na vertical de B'_2 .

1.2.- Xiro dunha recta - F-1.2/3

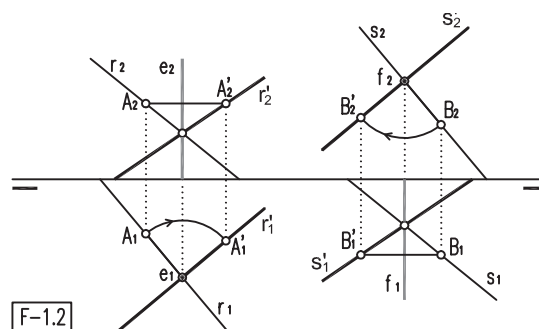
Temos dúas posibles situacións: Que a recta se corte co eixo ou que non se corte.

Xiro dunha recta entornando a un eixo co que se corta. F-1.2

Podemos ver os dous posibles casos. Xiro en torno a un **eixo vertical e** ou en torno a un **eixo de punta f**.

Para obter a nova posición da recta despois do xiro non temos máis que obter as novas posicións de dous puntos dela. Neste caso, dado que a recta se corta co eixo **e** ou **f** de xiro, o punto de intersección non varía e xa temos un punto da nova posición da recta despois do xiro.

Collemos outro punto calquera da recta (**A** ou **B**, segundo o xiro sexa ao redor de **e** ou de **f**) e obtemos a súa posición (**A'** ou **B'**) despois do xiro tal e como quedou explicado no punto anterior. Unindo **A'** ou **B'** co punto de intersección da recta co eixo teremos **r'** ou **f'** que son as novas posicións de cada unha das rectas despois de cadanseu xiro.

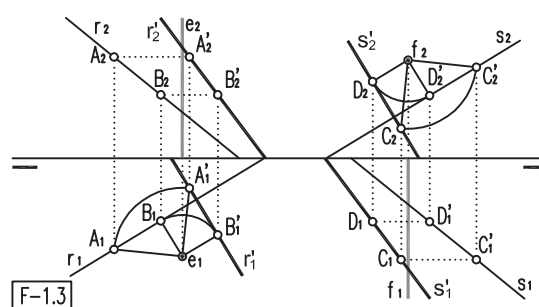


Xiro dunha recta entornando a un eixo co que non se corta. F-1.3

Podemos ver os dous posibles casos. Xiro en torno a un **eixo vertical e** ou en torno a un **eixo de punta f**.

Para obter a nova posición da recta despois do xiro non temos máis que obter as novas posicións de dous puntos dela. Collemos dous puntos calquera da recta (**A** e **B** no caso da recta **r** e **C** e **D** no caso da recta **s**) e os xiramos, obtendo **A'** e **B'** ou **C'** e **D'**.

Unindo os puntos teremos a nova posición de cada recta despois do xiro: **r'** ou **s'**.



1.3.- Xiro dun plano - F-1.4

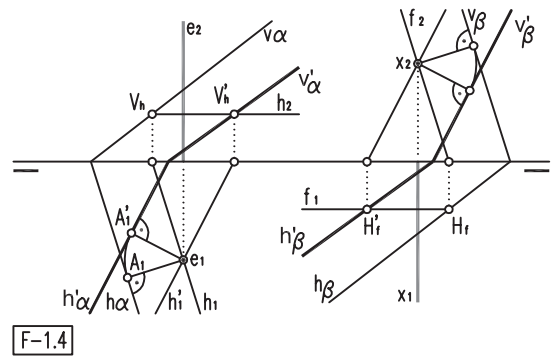
De novo, cando xiramos un plano, o podemos facer en torno a un eixo vertical ou de punta.

Cando **xiramos un plano α en torno a un eixo vertical e** podemos xirar directamente a traza horizontal. Trazamos dende e_1 unha perpendicular a $h\alpha$ obtendo A_1 . Con centro en e_1 e radio e_1A_1 trazamos o arco de xiro (no sentido e co ángulo que necesitemos ou nos pidan) e obtemos A'_1 . Por A'_1 trazamos unha perpendicular a A'_1e_1 e temos $h'\alpha$ que será a traza horizontal do plano α xirado.

$v'\alpha$ sairá do punto onde $h'\alpha$ corta á **LT**, pero necesitamos outro punto máis dela.

Collemos unha recta horizontal h de α que se corte co eixo e e a xiramos o mesmo ángulo (h'_1 deberá quedar paralela a $h'\alpha$). Obtemos Vh' , traza vertical de h' , e por ela deberá pasar a traza vertical de α' .

Cando xiramos un plano β en torno a un eixo de punta x facemos o mesmo pero na traza vertical do plano e usamos como recta auxiliar unha recta frontal f . A resolución é semellante.



F-1.4

CAMBIOS DE PLANO

Facer un **cambio de plano** consiste en mover un dos planos de proxección e poñelo noutra posición. Soamente podemos mover un dos dous planos de proxección de cada vez; se queremos facer dous cambios de plano deberemos facer primeiro un e despois o outro.

Cando movemos un dos planos de proxección **LT** cambia de posición e a diferenciamos da orixinal poñendo dous trazos grosos nos extremos (en lugar de un só) e indicando que plano movemos (o que denominaremos con un ou máis apóstrofes segundo sexa o primeiro cambio de plano, o segundo, etc.).

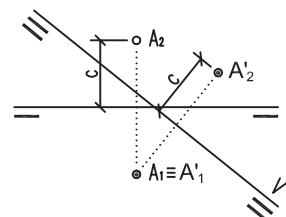
As novas proxeccións as denominamos igual que as orixinais pero co apóstrofo ' , ' , etc. segundo sexa o primeiro, segundo... cambio de plano.

1.4.- O punto no cambio de plano – F-1.5/6

Cambio de plano vertical (F-1.5)

Cando movemos o plano vertical, o punto (que non se move) mantén a súa proxección horizontal ($A_1=A'_1$) e a súa **cota** (a distancia do punto ó plano horizontal).

Dende a proxección horizontal A'_1 levamos unha perpendicular á nova liña de terra e, a partir dela, levamos a cota para obter A'_2 .

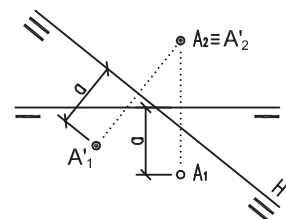


F-1.5

Cambio de plano horizontal (F-1.6)

Cando movemos o plano horizontal, o punto mantén a súa proxección vertical ($A_2=A'_2$) e o seu **aloxamento** (a distancia do punto ó plano vertical).

Dende a proxección vertical A'_2 levamos unha perpendicular á nova liña de terra e, a partir dela, levamos o aloxamento para obter A'_1 .



F-1.6

1.5.- A recta no cambio de plano – F-1.7/8

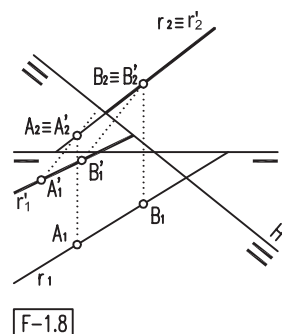
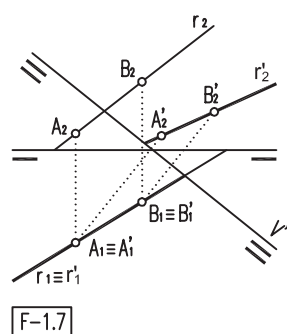
Para obter a nova posición dunha recta r non temos máis que obter as novas posicións de dous dos seus puntos (tal e como vimos no apartado anterior) e unilas.

Cambio de plano vertical (F-1.7)

Collemos dous puntos A e B . Como movemos o plano vertical mantéñense as proxeccións horizontais ($A_1=A'_1$ e $B_1=B'_1$); dende elas levamos perpendiculares á nova **LT** e levamos, a partir dela, a cota de cada punto obtendo A'_2 e B'_2 . A proxección horizontal da recta mantense $r_1=r'_1$. Unindo A'_2 con B'_2 obtemos r'_2 .

Cambio de plano horizontal (F-1.8)

Facemos o mesmo que antes pero tendo en conta que se mantén a proxección vertical dos puntos e da recta ($r_2=r'_2$). A proxección horizontal dos dous puntos a obteremos como xa vimos no **apartado 1.4** e obtemos r'_1 .



1.6.- O plano no cambio de plano – F-1.9/10

Cambio de plano vertical – F-1.9

Cando movemos o plano vertical a traza horizontal do plano $h\alpha$ non varía e coincide con $h'\alpha$. $v'\alpha$ sairá do punto onde $h\alpha=h'\alpha$ corta á nova LT, pero necesitaremos outro punto de $v'\alpha$ para poder trazala.

Se collemos o punto de $v\alpha$ onde se cortan as dúas liñas de terra (A), este punto vai seguir sendo un punto de $v'\alpha$ posto que, en ámbolos dous casos, ten a proxección horizontal na liña de terra ($A_1=A'_1$); levantando unha perpendicular á nova LT e levando a súa cota obteremos A'_2 por onde pasará $v'\alpha$.

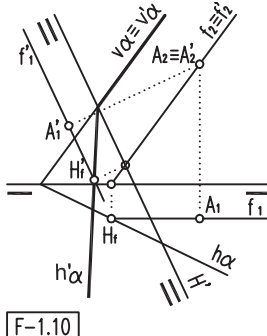
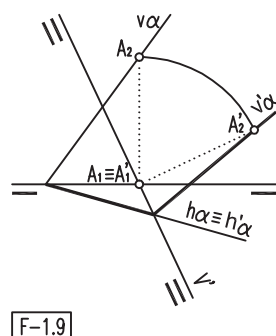
Cambio de plano horizontal – F-1.10

Fariamos o mesmo que no caso anterior pero tendo en conta que se mantén a traza vertical.

De tódolos xeitos imos usar outro método que non implique que as dúas liñas de terra se corten. No caso do cambio de plano vertical se faría de xeito similar.

$v\alpha=v'\alpha$. $h'\alpha$ sairá do punto onde $v'\alpha$ corta á LT.

Collemos unha recta frontal f de α e obtemos a súa nova posición despois do cambio de plano: $f_2=f'_2$. Obtemos as novas proxeccións de dous puntos (un deles é a propia traza horizontal Hf) de f e obtemos f' . A traza horizontal $h'\alpha$ terá que pasar por $H'f$ e teremos así α' .



2 - ÁNGULOS

2.1.- Ángulo dunha recta cos planos de proxección - F-2.1/2

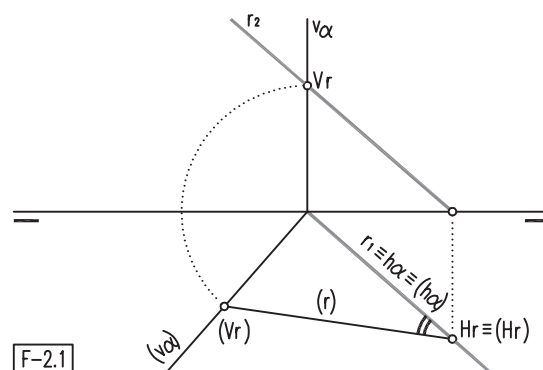
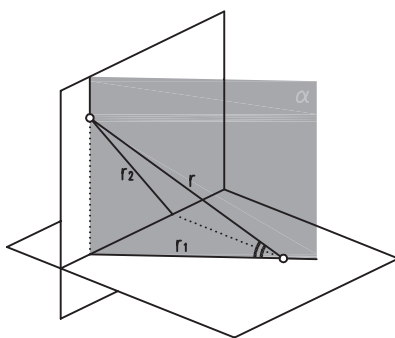
Temos dúas posibilidades: O ángulo que forma a recta co PH ou co PV.

Cando falamos do ángulo referímonos, sempre, ao ángulo menor. O ángulo que forma unha recta con un dos planos de proxección é o que forma a recta coa súa proxección sobre ese plano.

Ángulo dunha recta co PH - F-2/1

Dada a recta r

Concepto.- Para obter o ángulo que forma a recta co PH deberemos obter o que forma coa súa proxección horizontal; para obtelo usaremos un plano proxeccionante horizontal que conteña á recta, o abatemos e o ángulo será o que forme a recta abatida coa traza horizontal do plano abatido.



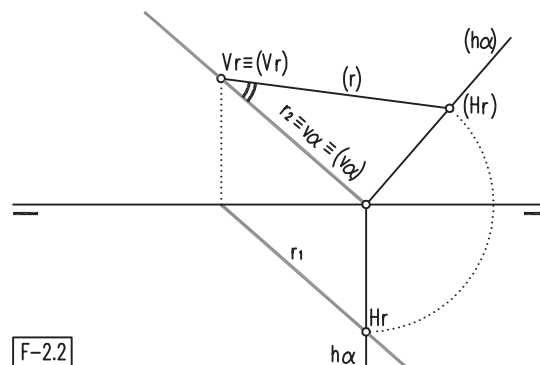
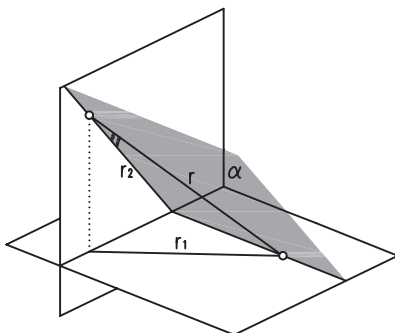
F-2.1

Solución.- Collemos un plano α que conteña á recta r . Abatemos o plano sobre o PH (as trazas abatidas formarían 90°) e o ángulo pedido será o que forman (r) e $(h\alpha)$.

Ángulo dunha recta co PV - F-2/2

Dada a recta r

Concepto.- Para obter o ángulo que forma a recta co PV deberemos obter o que forma coa súa proxección vertical; para obtelo usaremos un plano proxeccionante vertical que conteña á recta, o abatemos e o ángulo será o que forme a recta abatida coa traza vertical do plano abatido.



F-2.2

Solución.- Collemos un plano α que conteña á recta r . Abatemos o plano sobre o PV (as trazas abatidas formarían 90°) e o ángulo pedido será o que forman (r) e $(v\alpha)$.

2.2.- Ángulo dun plano cos planos de proxección – F-2.3/4

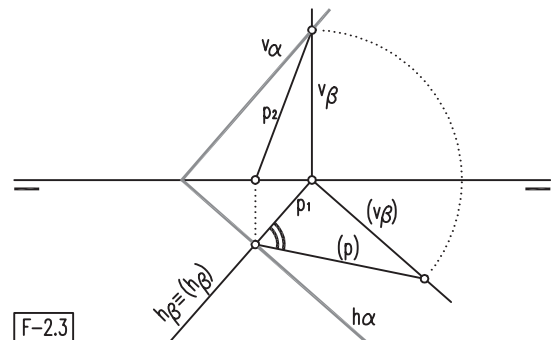
O mesmo que coa recta, o ángulo que forma un plano con un dos planos de proxección será o ángulo menor; tendo isto en conta, o ángulo que forma un plano co **PH** coincidirá co que forma unha das súas rectas de **máxima pendente** co **PH**. Do mesmo xeito, o ángulo dun plano co **PV** será o que forme unha das súas rectas de **máxima inclinación** co **PV**.

Ángulo dun plano co PH - F-2.3

Dado o plano α

Concepto.- A solución do problema se reduce ao xa visto no apartado anterior.

Solución.- Collemos unha recta **p** de máxima pendente do plano. Collemos un plano β , que conteña a **p** e o abate-mos sobre o **PH** (ver **apdo. 2.1**). O ángulo de (**p**) con (**h β**) será o ángulo de α co **PH**.



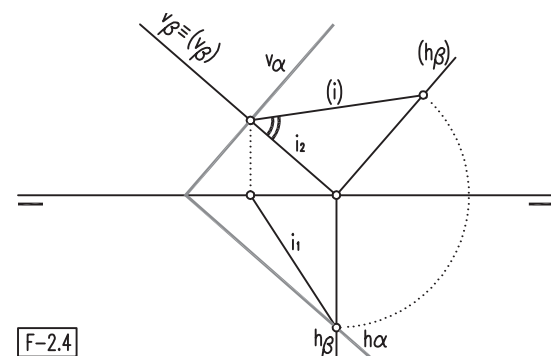
F-2.3

Ángulo dun plano co PV - F-2.4

Dado o plano α

Concepto.- A solución do problema se reduce ao xa visto no apartado 2.1.

Solución.- Collemos unha recta **i** de máxima inclinación do plano. Collemos un plano β , que conteña a **i** e o abate-mos sobre o **PV** (ver **apdo. 2.1**). O ángulo de (**i**) con (**v β**) será o ángulo de α co **PV**.



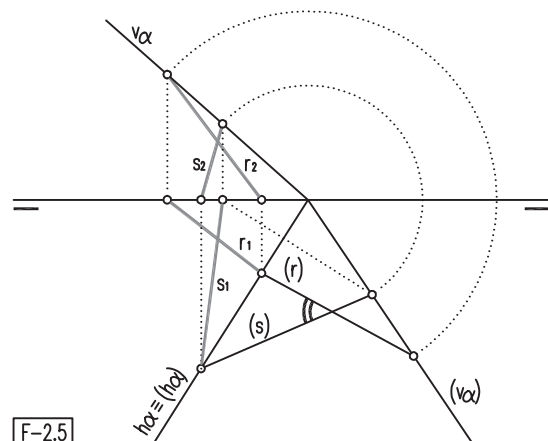
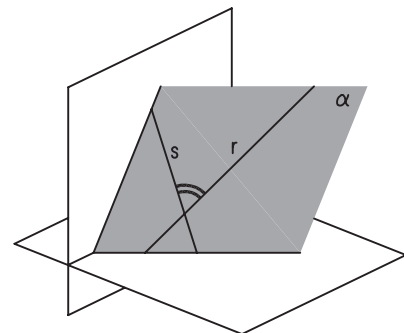
F-2.4

2.3.- Ángulo entre dúas rectas que se cortan – F-2.5

Dadas as rectas **r** e **s**.

Concepto.- Para obter o ángulo que forman as rectas só temos que abater o plano que forman e teremos o ángulo que forman as dúas rectas abatidas.

Solución.- A partir das trazas das rectas obtemos as trazas do plano α que forman. Abatemos o plano (neste caso sobre o **PH**) e tamén as dúas rectas. O ángulo buscado é o menor do que forman (**r**) e (**s**).



F-2.5

2.4.- Ángulo entre recta e plano – F-2.6

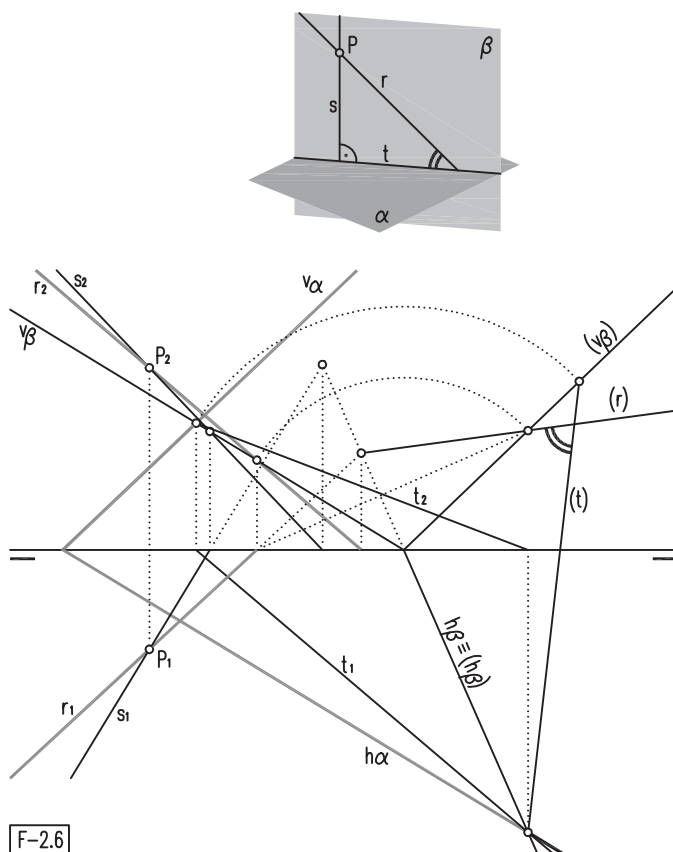
Dada a recta r e o plano α .

Concepto.- Tal e como vemos no esquema adxunto, o ángulo entre a recta e o plano será o ángulo entre dita recta e a recta intersección dun plano que a conteña e sexa perpendicular ao plano dado.

Solución.- Debemos trazar un plano β , que conteña a r e sexa perpendicular a α ; para obter este plano trazamos, dende un punto P de r , unha recta s perpendicular a α (as proxeccións da recta son perpendiculares ás trazas respectivas do plano). A recta r e a recta s córtanse no punto P polo que forman un plano; obtemos o plano unindo as trazas respectivas das rectas. Xa temos o plano β .

Obtemos a recta intersección entre α e β (onde se corten as trazas respectivas teremos as trazas da recta) á que chamamos t . O ángulo buscado será o que forman as rectas r e t que están, ámbalas dúas contidas en β .

Para obter o ángulo en verdadeira magnitude abatemos o plano β (na imaxe está abatido sobre o PH), e abatemos r e t polo procedemento xa coñecido (ver **DEBUXO TÉCNICO I, apdo. 2.20**). Cando temos (r) e (t) o ángulo buscado é o que forman.



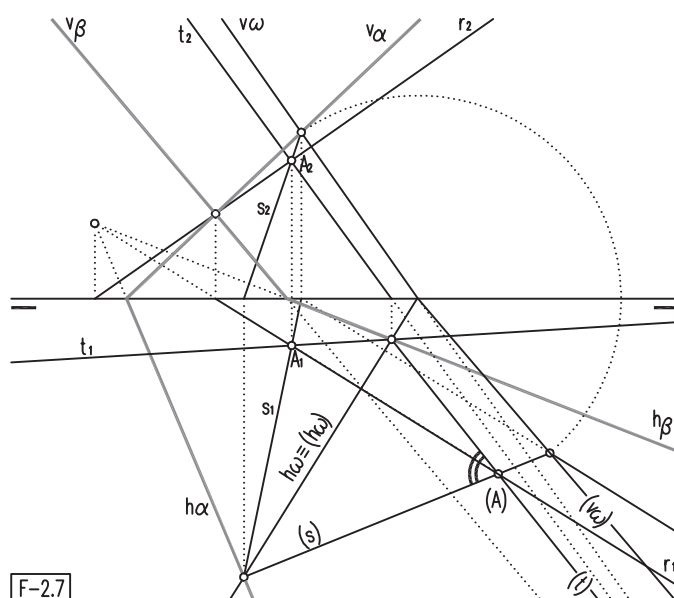
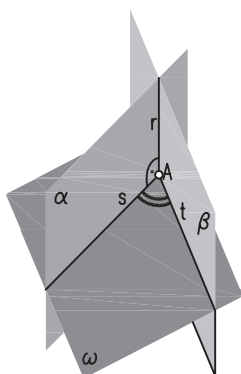
F-2.6

2.5.- Ángulo entre dous planos – F-2.7

Dados os planos α e β .

Concepto.- O ángulo que forman dous planos que se cortan será o que formen as dúas rectas de intersección entre eses planos e outro que sexa perpendicular a eles.

Solución.- Obtemos a recta r de intersección entre α e β . Agora trazamos un plano ω perpendicular a esta recta ($h\omega$ perpendicular a r_1 e $v\omega$ perpendicular a r_2) e teremos o plano perpendicular a α e β . Obtemos a intersección de ω con α (a recta s). Obtemos a intersección de ω con β (a recta t). Abatemos o plano ω sobre o PH e abatemos as rectas s e t , obtendo (s) e (t) . O ángulo entre (s) e (t) é o ángulo buscado.



F-2.7

3 - VOLUMES

CONCEPTOS XERAIS

3.0.- Tódolos volumes son o mesmo

Xa vimos no libro anterior (**DEBUXO TÉCNICO I – 3 – REPRESENTACIÓN DE VOLUMES**, páx. 81 e ss.) o que eran os volumes máis salientables: **Prisma**, **pirámide**, **cilindro** e **cono**. Tamén vimos as ferramentas de traballo do Sistema Diédrico (interseccións, abatements, xiros, cambios de plano...), agora aplicaremos estas ferramentas ó traballo cos volumes.

Se somos quen de demostrar que tódolos volumes son, no fondo, o mesmo, poderemos simplificar e entender mellor os procedementos de resolución de calquera problema.

Unha **pirámide** é un volume formado por unha base poligonal da que saen arestas que se xuntan no vértice. Se imaxinamos que, mantendo fixa a base, estiramos polo vértice (supoñendo arestas laterais elásticas) ata o infinito; chegados a ese punto as arestas laterais serían rectas paralelas que, cortadas por un plano paralelo á base, nos darían un **prisma**. Isto quere dicir que **un prisma sería o mesmo que unha pirámide de altura infinita**.

Un **cono** tamén o poderíamos definir como **unha pirámide regular cuxa base é un polígono de infinitos lados**.

Un **cilindro** tamén o poderíamos definir como **un prisma regular cuxas bases son polígonos regulares de infinitos lados**.

Vemos entón como **os catro volumes son, no fondo, o mesmo e polo tanto responderán á mesma xeometría**.

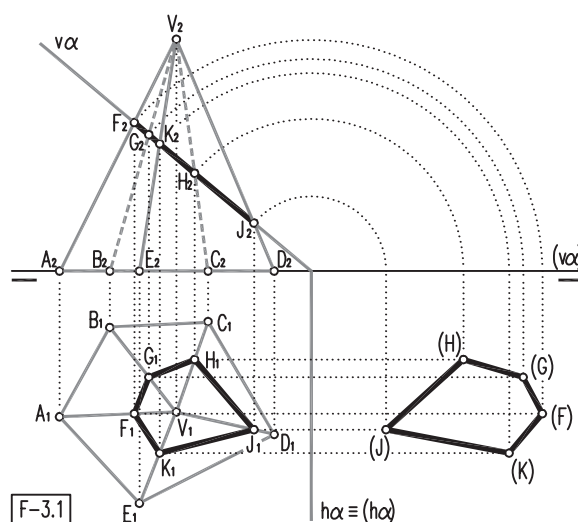
INTERSECCION DUN VOLUME CUN PLANO

3.1.- Intersección dunha pirámide cun plano proxeitante - F-3.1

Dada a **pirámide** e o plano α .

O plano α é un plano proxeitante vertical, o que implica que a proxección vertical da intersección coincidirá na traza vertical $v\alpha$. Unha vez obtidos os puntos de corte coas arestas laterais na proxección vertical non temos máis que baixar os puntos á proxección horizontal de cada unha delas.

Para obter a verdadeira magnitude da sección abatemos α sobre o plano horizontal.



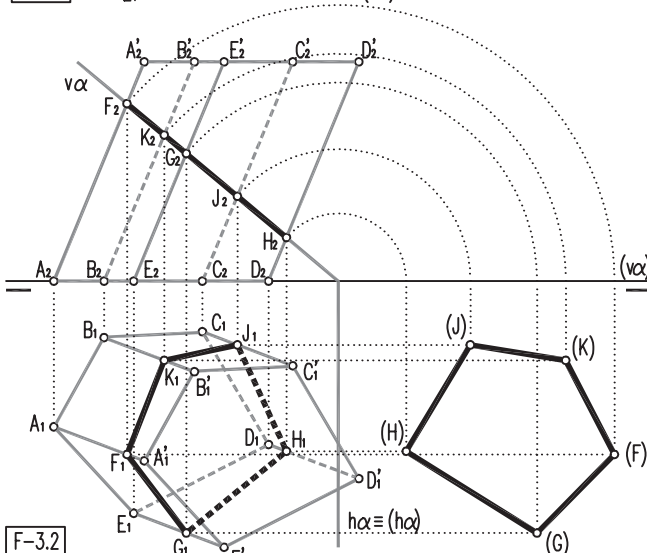
3.2.- Intersección dun prisma cun plano proxeitante - F-3.2

Dado o **prisma oblicuo** e o plano α .

Un prisma é unha pirámide de altura infinita polo que a resolución da intersección coincide coa do punto anterior.

O plano α é un plano proxeitante vertical, o que implica que a proxección vertical da intersección coincidirá coa traza vertical $h\alpha$. Unha vez obtidos os puntos de corte coas arestas laterais na proxección vertical non temos máis que baixar os puntos á proxección horizontal de cada unha delas.

Para obter a verdadeira magnitude da sección abatemos α sobre o plano horizontal.



3.3.- Intersección dun cono cun plano proxeitante

Dado o **cono recto** e o plano α .

Un cono é unha pirámide cuxa base é un polígono regular de infinitos lados polo que a resolución da intersección coincide coa vista no apartado 1.1.

O corte dun cono por un plano oblicuo dará unha elipse e temos dúas maneiras de resolver o problema.

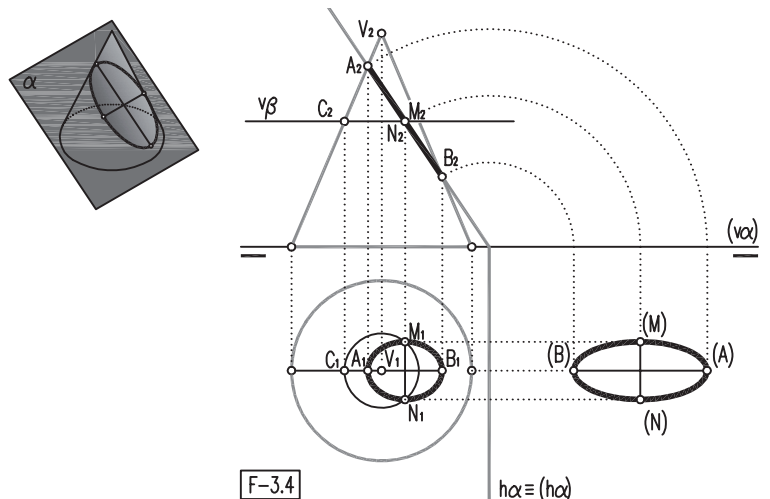
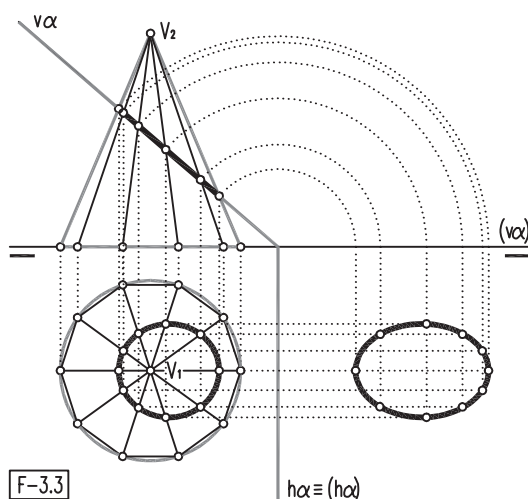
Método 1 (F-3.3).- Transformamos o cono nunha pirámide (cantos máis lados teña o polígono da base máis exactitude teremos ó trazar a elipse) e resolvemos a intersección coma no apartado 2.1. Se queremos obter a verdadeira magnitude non temos máis que abater o plano α sobre o horizontal de proxección.

Método 2 (F-3.4).- Imos obter os eixos da elipse intersección. A_2B_2 é a proxección vertical do eixo maior da elipse intersección e está en verdadeira magnitude posto que é unha recta frontal; baixando á proxección horizontal obtemos A_1B_1 .

Facendo a mediatriz de A_2B_2 obtemos o punto medio M_2 que será onde estea o eixo menor da elipse que é unha recta de punta (polo que estará en verdadeira magnitude na proxección horizontal). Para obter este eixo usaremos un plano horizontal β ($v\beta$ será a traza vertical) que corte ó cono no punto M . A intersección de β co cono será unha circunferencia horizontal cuxo radio será V_1C_1 . Trazando a circunferencia na proxección horizontal obtemos o eixo menor (MN) da elipse onde a circunferencia corte á proxección horizontal da recta de punta. M_1N_1 será a súa proxección horizontal.

AB e MN son os eixos da elipse intersección. A proxección horizontal da elipse intersección a obteremos a partir dos seus eixos A_1B_1 e M_1N_1 , aplicando o trazado visto en **DEBUXO TÉCNICO I** (páx. 51).

Para obter a verdadeira magnitude da sección abatemos α sobre o plano horizontal e obtemos $(A)(B)$, eixo maior da elipse e $(M)(N)$, eixo menor da elipse; a partir deles facemos o trazado da elipse en verdadeira magnitude.



3.4.- Intersección dun cilindro cun plano proxeitante - F-3.5

Dado o **cilindro recto** e o plano α .

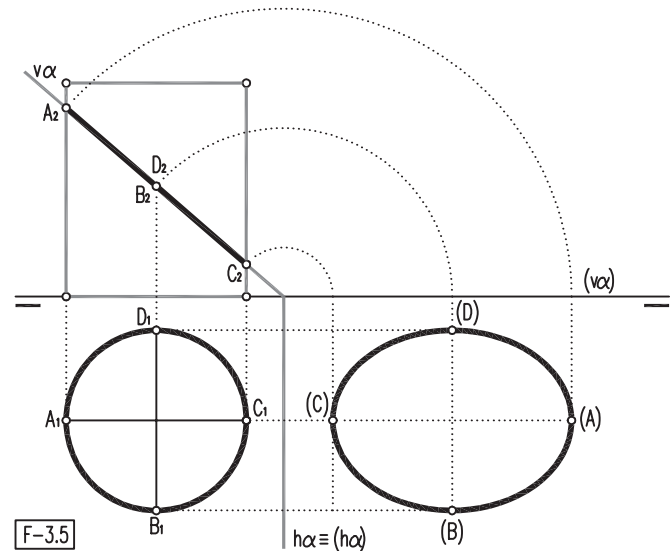
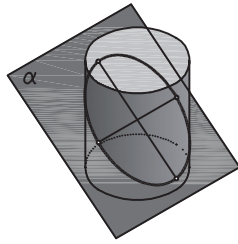
Un cilindro é un prisma cuxas bases son polígonos regulares de infinitos lados polo que a resolución da intersección coincide coa vista no apartado 1.2; non temos máis que transformar as dúas circunferencias das bases en polígonos (cantos máis lados teñan máis exactitude teremos ó trazar a elipse intersección nas súas proxeccións).

No caso do **cilindro recto** cortado por un plano proxeitante vertical é máis aconsellable obter a elipse intersección de xeito directo (a partir dos seus eixos).

A elipse intersección terá un eixo maior AC (que temos en verdadeira magnitude na súa proxección vertical posto que é unha recta frontal) e un eixo menor BD (que teremos en verdadeira magnitude na súa proxección horizontal posto que é unha recta de punta).

A proxección horizontal da elipse intersección coincidirá coas circunferencias das bases.

Para obter a verdadeira magnitude da elipse intersección abatemos os dous eixos AC e BD , obtendo $(A)(C)$ e $(B)(D)$; a partir deles trazamos a elipse intersección en verdadeira magnitude.

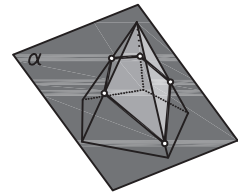


F-3.5

3.5.- Intersección dunha pirámide cun plano calquera - F-3.6/7

Dada a **pirámide** e o plano α .

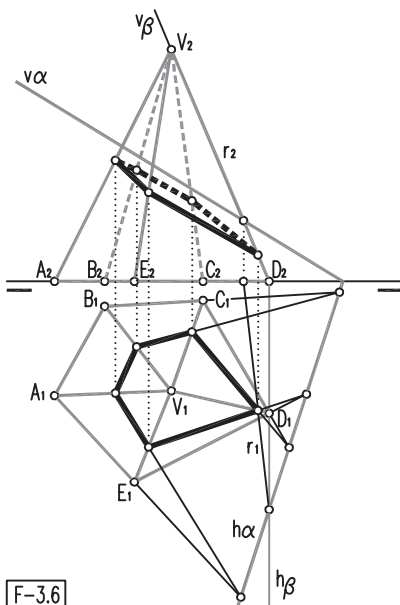
Concepto: Obter a intersección entre o plano e a pirámide é algo tan sinxelo como obter a intersección de α con cada unha das rectas laterais da pirámide (ou sexa, intersección entre recta e plano: **DEBUXO TÉCNICO I** (páx. 70 – apdo. 2.3). De tódolos xeitos, facer a intersección de α con cada unha das rectas da pirámide levaría consigo facer moitas liñas que ensuciarían o debuxo final.



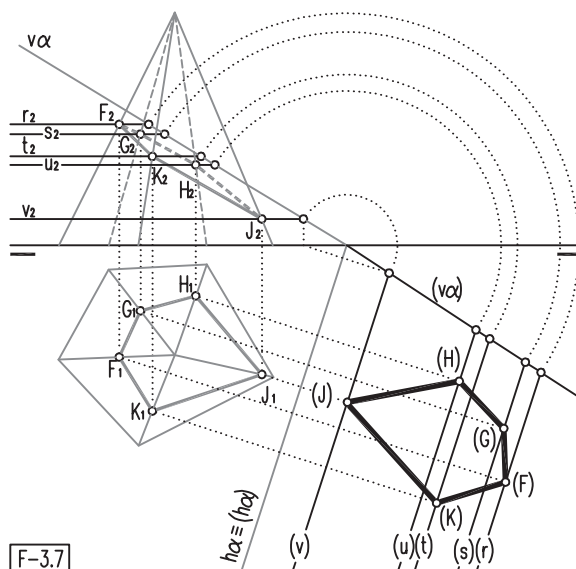
Solución: Facemos a intersección de α con unha das arestas laterais da pirámide (no noso caso coa **VD** que é a que queda máis á dereita). Collemos un plano auxiliar β (proxeitante vertical) que contén á recta **VD**. A intersección entre α e β é a recta **r**. Obtemos na proxección horizontal o punto de intersección entre **r** e **V₁D₁**. Aplicamos **homoloxía** e obtemos a proxección horizontal dos puntos de intersección co resto das arestas laterais da pirámide. Para aplicar homoloxía deberemos ter en conta que **h α** é o eixo de homoloxía, **V₁** é o centro de homoloxía e o segmento **B₁C₁** (aresta da base da pirámide) é homólogo do **G₁H₁** (recta de corte da cara respectiva da pirámide co plano α) e, polo tanto, ámbolos dous se cortan no eixo de homoloxía **h α** . Obtemos as proxeccións verticais respectivas.

Unha vez obtida a intersección, se queremos obter a verdadeira magnitude da mesma (**F-3.7**):

- Abatemos o plano α sobre o horizontal de proxección.
- Collemos rectas horizontais (**r, s, t, u, v**) que conteñan os puntos de intersección.
- Abatemos as rectas e obtemos (**r**), (**s**), (**t**), (**u**), (**v**).
- Levando perpendiculares a (**h α**) dende **F₁**, **G₁**, **H₁**, **J₁**, **K₁** obtemos os puntos abatidos (**F**), (**G**), (**H**), (**J**), (**K**). Unimos e obtemos a verdadeira magnitude da sección.



F-3.6



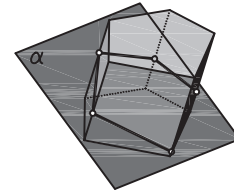
F-3.7

3.6.- Intersección dun prisma cun plano calquera - F-3.8/9

Dado o **prisma oblicuo** e o plano α .

Un prisma é unha pirámide de altura infinita polo que a resolución da intersección coincide coa do punto anterior.

Concepto: Do mesmo xeito que no caso da pirámide, deberemos obter os puntos de intersección das arestas laterais do prisma co plano α . Obtemos a intersección de α con unha delas e aplicamos afinidade (o que era a homoloxía no caso da pirámide, que ten un vértice, é agora afinidade: Unha homoloxía de centro impropio xa que o prisma é unha pirámide de altura infinita, ou sexa co vértice no infinito).

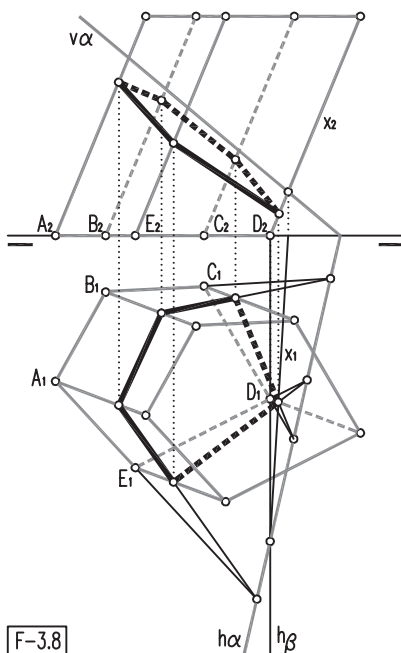


Solución: Facemos a intersección de α con unha das arestas laterais do prisma (no noso caso coa correspondente co punto **D** da base apoiada no **PH**). Collemos un plano auxiliar β (proyectante vertical) que contén á aresta. A intersección entre α e β é a recta **x**. Obtemos na proxección horizontal o punto de intersección entre **x**₁ e a proxección horizontal da aresta que pasa por **D**₁. Aplicamos **afinidade** e obtemos a proxección horizontal dos puntos de intersección co resto das arestas laterais do prisma. O que era homoloxía na pirámide do apartado anterior é afinidade neste (do mesmo xeito que un prisma é unha pirámide de altura infinita, unha afinidade é, como dixemos no seu momento, unha homoloxía de centro impropio ou co centro no infinito). Para aplicar afinidade deberemos ter en conta que **h α** é o eixo de afinidade, calquera das arestas do prisma en proxección horizontal son a dirección de afinidade e o segmento **B**₁**C**₁ (aresta da base do prisma) é afín do **G**₁**H**₁ (recta de corte da cara respectiva do prisma co plano α) e, polo tanto, ámbolos dous se cortan no eixo de afinidade **h α** .

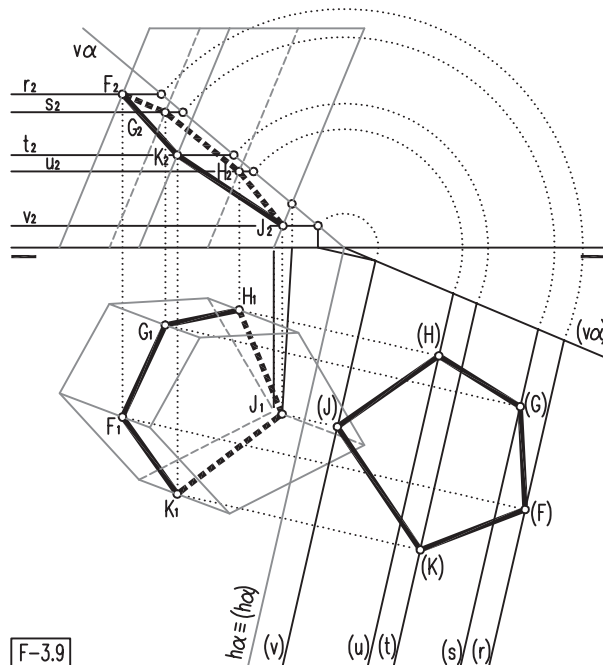
Obtemos as proxeccións verticais respectivas.

Unha vez obtida a intersección, se queremos obter a verdadeira magnitude da mesma (**F-3.9**):

- Abatemos o plano α sobre o horizontal de proxección.
- Collemos rectas horizontais (**r, s, t, u, v**) que conteñan os puntos de intersección.
- Abatemos as rectas e obtemos (**r**), (**s**), (**t**), (**u**), (**v**).
- Levando perpendiculares a (**h α**) dende **F**₁, **G**₁, **H**₁, **J**₁, **K**₁ obtemos os puntos abatidos (**F**), (**G**), (**H**), (**J**), (**K**). Unimos e obtemos a verdadeira magnitude da sección.



F-3.8



F-3.9

INTERSECCIÓN DUN VOLUME CUNHA RECTA

3.7.- Intersección dunha pirámide cunha recta - F-3.10/11

Dada a **pirámide** e a recta **r**.

Concepto.- Temos dous métodos para resolver este problema. Podemos coller un plano sinxelo que conteña á recta, obter a súa intersección coa pirámide e, onde a intersección corte á recta, teremos os dous puntos de intersección buscados. O outro método consiste en obter un plano que conteña á recta e pase polo vértice da pirámide; deste xeito o plano cortará á pirámide nun triángulo (a base será onde a traza horizontal do plano corte á base da pirámide e os lados laterais serán rectas que unirán estes puntos co vértice) e onde este triángulo corte á recta serán os puntos de intersección buscados.

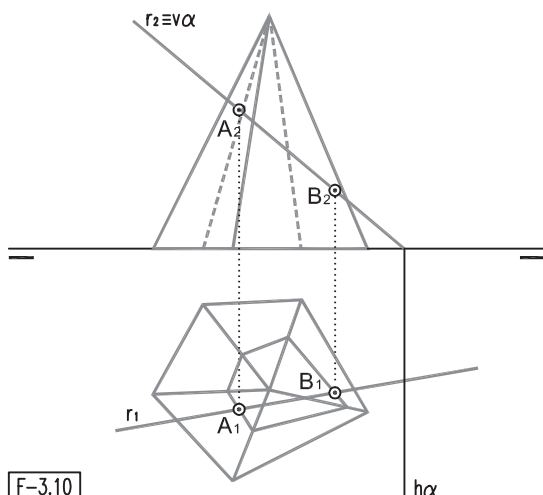
Solución polo MÉTODO DO PLANO PROXECTANTE – F-3.10

Collemos un plano proxeccionante vertical α que conteña á recta **r**. Obtemos a intersección de α coa pirámide (ver **apdo. 3.1**) e, onde a proxección horizontal corte a r_1 , teremos a proxección horizontal (**A₁** e **B₁**) dos puntos de intersección; os levamos en perpendicular á **LT** e obtemos **A₂** e **B₂** en r_2 .

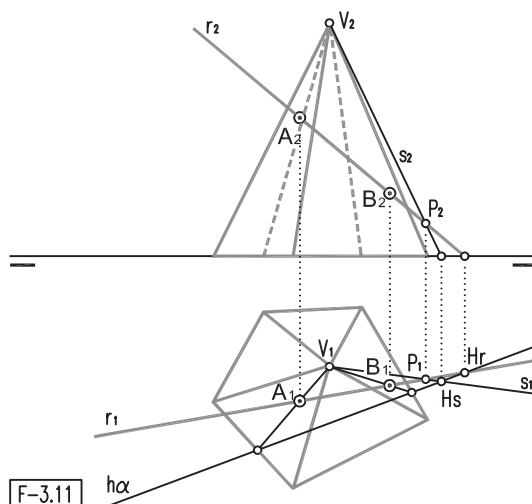
Solución polo MÉTODO DA RECTA AUXILIAR – F-3.11

Collemos un punto **P** calquera da recta e trazamos outra recta **s** que pase por **P** e polo vértice **V** da pirámide. A recta **s** e a recta **r** se cortan en **P** e forman un plano que contén á recta dada **r** e pasa polo vértice da pirámide.

Obtemos a traza horizontal, **H α** , do plano (unindo **H_r** e **H_s**). **H α** corta á base da pirámide en dous puntos, unindo estes puntos con **V₁** obteremos a proxección horizontal da intersección de α coas caras laterais da pirámide; onde estas rectas corten a r_1 obteremos **A₁** e **B₁**, proxección horizontal dos puntos de intersección. Obtemos a proxección vertical **A₂** e **B₂** e temos o problema resolto.



F-3.10



F-3.11

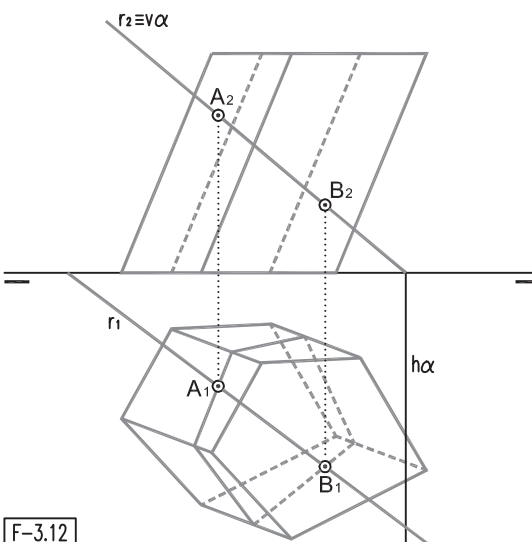
3.8.- Intersección dun prisma cunha recta F-3.12/13

Dado o **prisma** e a recta **r**.

Concepto.- Tendo en conta que un prisma é igual a unha pirámide, temos os mesmos dous métodos de resolución que xa vimos no apartado anterior. Un prisma é unha pirámide de altura infinita (polo que as arestas laterais unidas co vértice pasan a ser paralelas); non temos máis que ter isto en conta e seguir os procesos descritos para a intersección de pirámide e recta.

Solución polo MÉTODO DO PLANO PROXECTANTE F-3.12

Collemos un plano proxeccionante vertical α que conteña á recta **r**. Obtemos a intersección de α co prisma (ver **apdo. 2.2**) e, onde a proxección horizontal corte a r_1 teremos a proxección horizontal (**A₁** e **B₁**) dos puntos de intersección; os levamos en perpendicular á **LT** e obtemos **A₂** e **B₂** en r_2 .

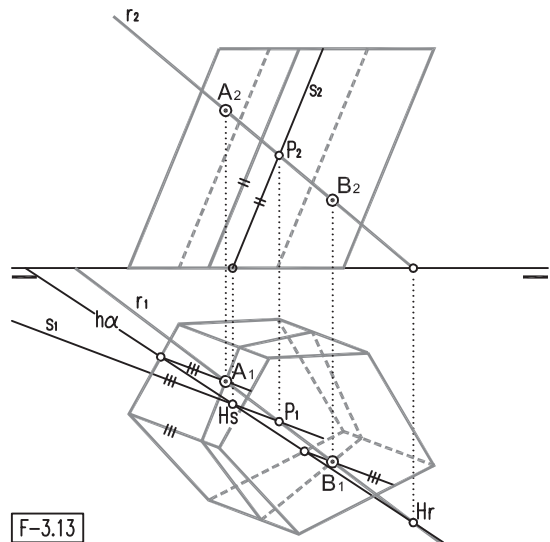


F-3.12

Solución polo MÉTODO DA RECTA AUXILIAR**F-3.13**

Collemos un punto **P** calquera da recta e trazamos outra recta **s** que pase por **P** e sexa paralela ás arestas laterais do prisma.

Obtemos a traza horizontal, **H α** , do plano (unindo **H_r** e **H_s**). **H α** corta á base do prisma en dous puntos, trazando paralelas ás arestas laterais do prisma obteremos a proxección horizontal da intersección de α coas caras laterais do prisma; onde estas rectas corten a **r₁** obteremos **A₁** e **B₁**, proxección horizontal dos puntos de intersección. Obtemos a proxección vertical **A₂** e **B₂** e temos o problema resolto.



F-3.13

3.9.- Intersección dun cono cunha recta - F-3.14

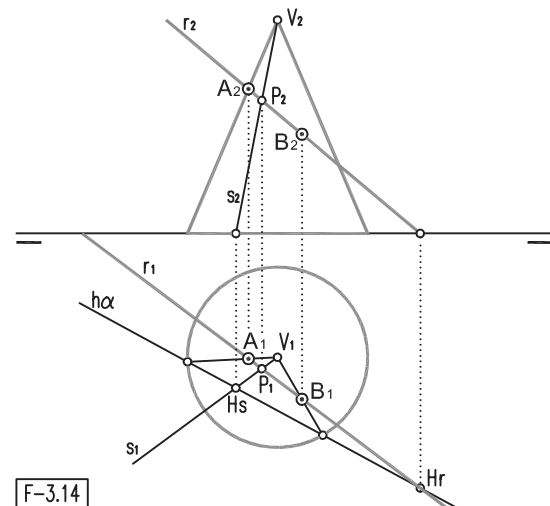
Dado o **cono** e a recta **r**.

Concepto.- Aquí tamén podemos ter os dous métodos pero só é aconsellable usar o segundo. Se collemos un plano proxeitante que conteña á recta teremos unha elipse en proxección horizontal o que faría que a resolución do problema con este método nos levara moito máis tempo.

Solución polo MÉTODO DA RECTA AUXILIAR – F-3.14

Collemos un punto **P** calquera da recta e trazamos outra recta **s** que pase por **P** e polo vértice **V** do cono. A recta **s** e a recta **r** se cortan en **P** e forman un plano que contén á recta dada **r** e pasa polo vértice da pirámide.

Obtemos a traza horizontal, **H α** , do plano (unindo **H_r** e **H_s**). **H α** corta á base do cono en dous puntos, unindo estes puntos con **V₁** obteremos a proxección horizontal da intersección de α co cono; onde estas rectas corten a **r₁** obteremos **A₁** e **B₁**, proxección horizontal dos puntos de intersección. Obtemos a proxección vertical **A₂** e **B₂** e temos o problema resolto.



F-3.14

3.10.- Intersección dun cilindro cunha recta - F-3.15

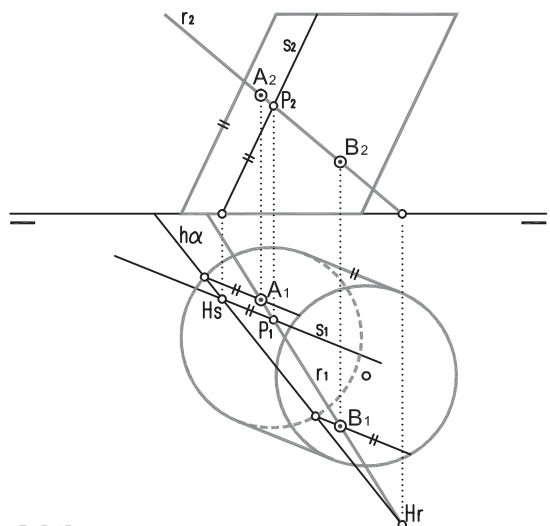
Dado o **cilindro** e a recta **r**.

Concepto.- Neste caso, igual que no do cono, convén usar o método da recta auxiliar para aforrar tempo na resolución do exercicio.

Solución polo MÉTODO DA RECTA AUXILIAR – F-3.15

Collemos un punto **P** calquera da recta e trazamos outra recta **s** que pase por **P** e sexa paralela á xeratriz do cilindro.

Obtemos a traza horizontal, **H α** , do plano (unindo **H_r** e **H_s**). **H α** corta á circunferencia da base do cilindro en dous puntos, trazando paralelas á xeratriz do cilindro obteremos a proxección horizontal da intersección; onde estas rectas corten a **r₁** obteremos **A₁** e **B₁**, proxección horizontal dos puntos de intersección. Obtemos a proxección vertical **A₂** e **B₂** e temos o problema resolto.



F-3.15

A ESFERA

3.11.- Intersección dunha esfera cun plano proxeccionante - F-3.16

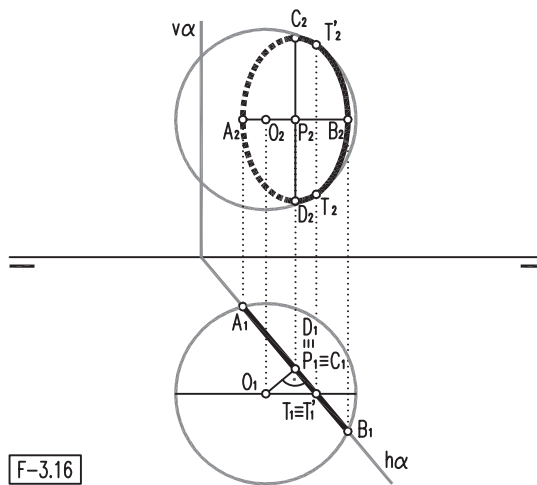
Dada a **esfera** e a recta **r**.

Concepto.- Unha esfera ten as proxeccións (calquera delas) en forma de circunferencia. A intersección dunha esfera cun plano será sempre unha circunferencia; se o plano é proxeccionante a intersección será recta en unha das proxeccións e unha elipse na outra.

Solución.- Como o plano é proxeccionante horizontal a proxección horizontal da intersección será o segmento **A₁B₁**.

A proxección vertical da intersección será a proxección vertical da circunferencia real (cuxo diámetro mide **A₁B₁**). A elipse terá dous eixos: O **eixo horizontal** será o segmento **A₂B₂** (proxección vertical do diámetro horizontal da circunferencia intersección) e o **eixo vertical** (perpendicular ao anterior no seu punto medio **P**) medirá igual que **A₁B₁** pois será a proxección vertical do diámetro vertical da circunferencia intersección (**A₂B₂** mide o mesmo que **A₁B₁**).

A elipse da proxección vertical da intersección será tanxente á circunferencia en **T₂** e **T'₂**.



F-3.16

3.12.- Intersección dunha esfera cunha recta - F-3.17

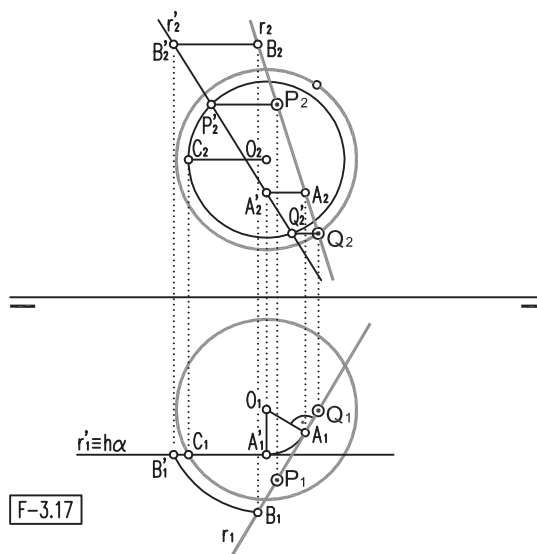
Dada a **esfera** e a recta **r**.

Concepto.- Para resolver a intersección poderíamos usar un plano proxeccionante auxiliar que conteña á recta pero teríamos que debuxar unha elipse en unha das proxeccións. Temos outro método máis rápido.

Dado que a esfera mantén as proxeccións se a xiramos con respecto a un eixo vertical que pase polo centro, xiramos o conxunto (a esfera e a recta) transformando a recta en frontal. Collemos un plano vertical que conteña a recta e debuxamos a intersección coa esfera (que será unha circunferencia concéntrica coa da esfera) e, como consecuencia, coa recta. Desfacemos o xiro e temos o problema resolto.

Solución.- Collemos un eixo vertical que pase polo centro da esfera (non o debuxamos para manter a limpeza do debuxo) e transformamos **r** en frontal: Trazamos dende **O₁** unha perpendicular a **r₁** en **A₁** e xiramos **r₁** ate transformala en **r'₁**, paralela á **LT**. **A'₂** estará na horizontal de **A₂** (mantén a cota). Como necesitamos outro punto, collemos un punto **B** e o xiramos o mesmo ángulo. Unimos **A'₂** e **B'₂** e obtemos **r'₂**.

Collemos un plano vertical **α** que conteña a **r'** (**hα** coincidirá con **r'₁**) e debuxamos, en proxección vertical, a circunferencia intersección deste plano coa esfera, que será a circunferencia de centro **O₂** e radio **O₂C₂**; esta circunferencia cortará á recta **r'** nos puntos **P'₂** e **Q'₂**. Desfacemos o xiro e obtemos os puntos **P** e **Q** de intersección da **esfera** con **r**.



F-3.17

PLANO TANXENTE A UN VOLUME

3.13.- Plano tanxente a un cono - F-3.18

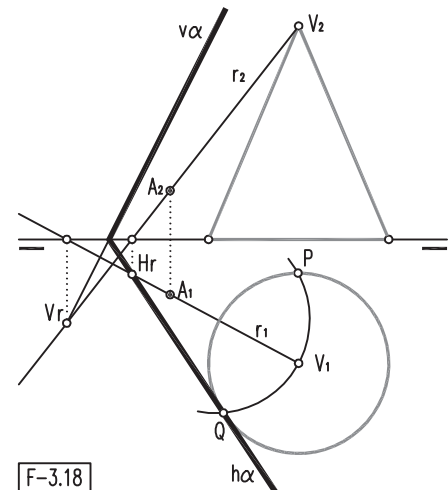
Dado o punto **A** e o **cono recto**.

O problema tería a mesma solución, independentemente de que o cono sexa ou non recto.

Concepto: O plano resultante ten que conter ó punto **A** e ser tanxente ó cono. Calquera plano tanxente ó cono cumprirá dúas condicións:

- O plano conterá ó vértice **V** do cono.
- A traza horizontal do plano será tanxente á circunferencia da base, que está apoiada no **PH**.

Solución: Como o plano contén os puntos **A** e **V**, trazamos a recta **r** que forman. Obtemos as trazas de **r**: **Hr** e **Vr**. Como a traza horizontal do plano ten que pasar por **Hr** e ser tanxente á circunferencia da base, trazamos a recta tanxente a ela dende **Hr** (temos dúas posibles solucións, os puntos **P** e **Q**. Eliximos **Q**) e obtemos **Hα** unindo **Q** e **Hr**. Onde **Hα** corte á liña de terra unimos con **Vr** e obtemos **Vα**.



F-3.18

3.14.- Plano tanxente a un cilindro - F-3.19

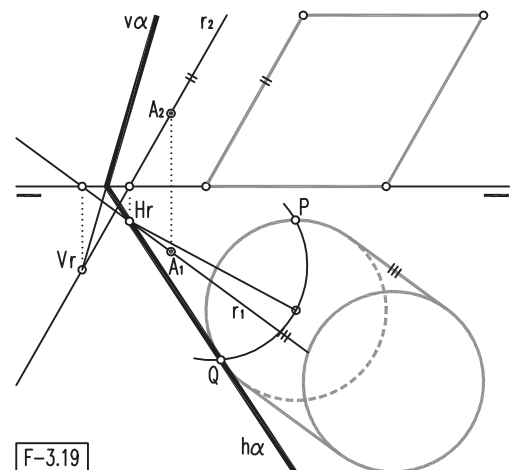
Dado o punto **A** e o **cilindro oblicuo**.

O problema tería a mesma solución, independentemente de que o cilindro sexa ou non recto.

Concepto: O plano resultante ten que conter ó punto **A** e ser tanxente ó cilindro. Calquera plano tanxente ó cilindro cumprirá dúas condicións:

- O plano conterá a unha recta paralela á xeratriz do cilindro pasando polo punto **A**.
- A traza horizontal do plano será tanxente á circunferencia da base, que está apoiada no **PH**.

Solución: Trazamos por **A** a recta **r**, paralela á xeratriz do cilindro. Obtemos as trazas de **r**: **Hr** e **Vr**. Como a traza horizontal do plano ten que pasar por **Hr** e ser tanxente á circunferencia da base, trazamos a recta tanxente a ela dende **Hr** (temos dúas posibles solucións, os puntos **P** e **Q**. Eliximos **Q**) e obtemos **Hα** unindo **Q** e **Hr**. Onde **Hα** corte á liña de terra unimos con **Vr** e obtemos **Vα**.



F-3.19

DEBUXO DUN VOLUME EN CALQUERA POSICIÓN

3.15.- Volume apoiado nun plano calquera - F-3.20

Dado o plano α , debuxar unha pirámide regular recta de base cadrada de lado a e altura h , tendo en conta que un dos vértices da base é o punto A .

Concepto.- Primeiro debuxaremos a cara apoiada no plano (abatemos o plano, debuxamos o cadrado da base apoiada en α e desabatemos para obter as súas proxeccións) e despois levamos, a partir do centro da base, a altura da pirámide. Cando teñamos o vértice superior da pirámide unimos cos da base e debuxamos as proxeccións da pirámide coas arestas vistas e ocultas.

Solución.- Collemos unha recta r auxiliar (neste caso horizontal) que conteña ó punto A . Abatemos o plano α sobre o PH ($h\alpha$ coincide con $(h\alpha)$) e obtemos $v\alpha$ polo método xa visto en **DEBUXO TÉCNICO I – páx. 77**) e abatemos r obtendo (r) . Dende A_1 levamos unha perpendicular a $h\alpha$ e obtemos (A) en (r) . Levamos a medida a sobre (r) e debuxamos o **cadrado** de lado a .

Para obter as proxeccións do cadrado collemos outra recta horizontal abatida (s) que conteña os vértices (C) e (D) . Desabatemos (s) e levamos perpendiculares a $(h\alpha)$ para obter C_1, D_1 e B_1 . Levantamos perpendiculares á LT ata as respectivas proxeccións verticais de r e s e obtemos C_2, D_2 e B_2 . Unimos e xa temos as proxeccións diédricas da base cadrada.

Trazamos (nas dúas proxeccións) unha diagonal da base e, a partir do seu punto medio M , trazamos unha recta t perpendicular a α (t_2 será perpendicular a $v\alpha$ e t_1 perpendicular a $h\alpha$).

A partir do punto M deberemos medir a altura h na recta t . A recta t é unha recta oblicua polo que non ten ningunha proxección en verdadeira magnitude; deberemos resolver o problema.

Temos diferentes procedementos para poñer a recta t de xeito que podamos medir a distancia h sobre ela (abatemento, xiro e cambio de plano. Ver **DEBUXO TÉCNICO I – páx.77** e os **apdos. 1.1 e seguintes** deste libro). Eu persoalmente nestes casos prefiro usar o xiro pois é o que menos liñas de debuxo require, e iso vai en favor da claridade do debuxo.

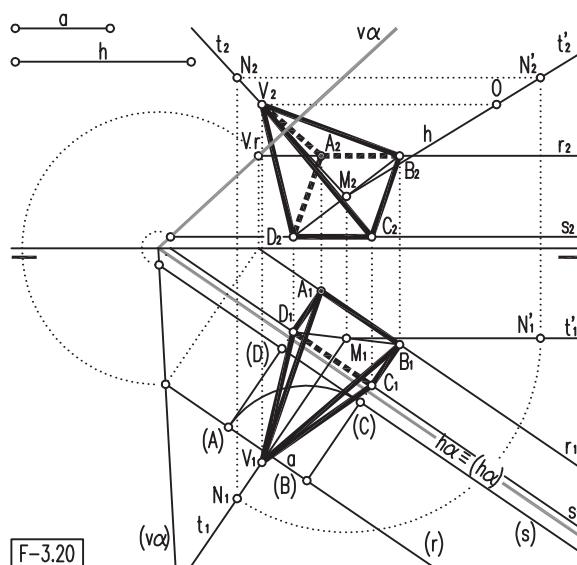
Vou coller (inda que non o debuxo) un eixo vertical que corte á recta t no punto M .

Collo un punto calquera N de t e, facendo centro en M_1 co compás e con radio M_1N_1 , obteño N'_1 en t'_1 (que deberá ser paralela á LT). Cando xiro en torno a un eixo vertical os puntos manteñen a súa cota, razón pola cal N'_2 estará na vertical de N'_1 e na horizontal de N_2 . Unindo M_2 (que coincide con M'_2) con N'_2 obteño t'_2 e teño xa a recta t transformada nunha recta frontal que terá a proxección vertical en verdadeira magnitude.

Mido a distancia h en t'_2 a partir de M_2 e obteño o punto O . Eu necesito a altura na recta t orixinal polo que desfago o xiro trazando unha liña horizontal dende O ate t_2 , obtendo a proxección vertical do vértice da pirámide V_2 . Baixo unha perpendicular á LT e obteño V_1 en t_1 .

Uno V con A, B, C e D (nas dúas proxeccións) e obteño as proxeccións diédricas da pirámide.

Para saber as partes vistas e ocultas das rectas soamente deberemos imaxinar como está colocada a pirámide no plano e ollala de fronte (na proxección vertical) e dende arriba (na horizontal). Con un pouquiño de práctica non teremos problemas para ver as arestas vistas e ocultas en cadansúa proxección e, ademais, mellorará a nosa visión espacial, cousa ben importante en sistema diédrico en particular e na Xeometría en xeral.



DESENVOLVIMENTO DE VOLUMES

Cando falamos de “**desenvolvimento**” de volumes estamos a falar de **obter a verdadeira magnitude de tódalas caras ou superficies** deles.

Utilizando as ferramentas xa coñecidas (abatements, xiros e cambios de plano) podemos obter facilmente a verdadeira magnitude e o desenvolvemento de calquera volume, tendo en conta ademais como xa dixemos, que tódolos volumes son o mesmo.

Veremos a continuación o desenvolvemento dunha pirámide oblicua e dun prisma oblicuo (os desenvolvementos dos mesmos volumes na súa versión recta sería máis sinxelo pero o procedemento sería similar).

Se queremos desenvolver un cono ou un cilindro, deberemos transformalos nunha pirámide ou nun prisma respectivamente con suficientes lados na base ou bases para, despois, transformar a liña quebrada nunha curva continua a man alzada ou con plantilla de curvas.

3.16.- Desenvolvemento dunha pirámide oblicua - F-3.21

Dada a **pirámide oblicua** de base pentagonal.

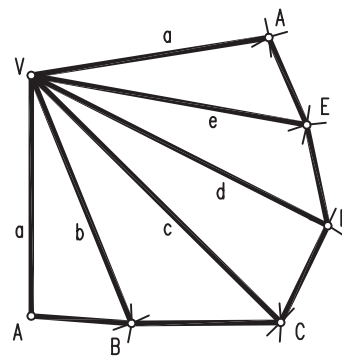
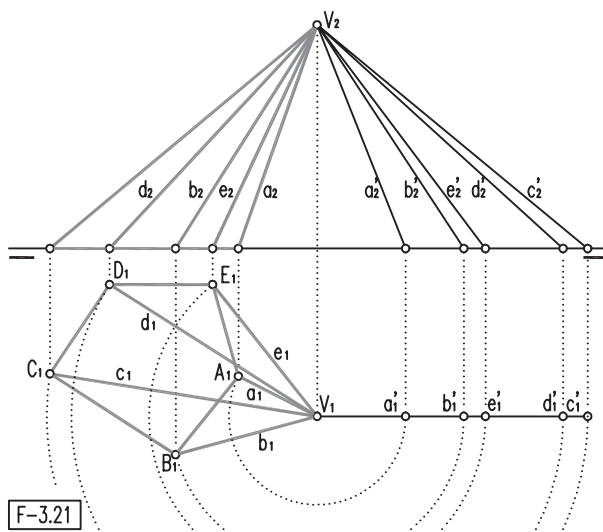
Concepto.- A base xa está en verdadeira magnitude. Teremos que desenvolver as caras laterais que son triángulos, dos que coñecemos a medida dun dos lados (o lado da base); o único que temos que obter é a verdadeira magnitude das arestas laterais e o faremos mediante xiros.

Solución.- Collemos un eixo vertical (que non debuxamos por limpeza do debuxo) que pase polo vértice **V**. Facendo centro en **V** xiramos as proxeccións horizontais das arestas laterais (**a₁-e₁**) de xeito que queden transformadas en rectas frontais. As proxeccións verticais delas (**a'₂-e'₂**) estarán en verdadeira magnitude.

Desenvolvemento:

Trazamos a aresta **a** coa medida de **a'₂**. Facendo centro en **A** con radio **A₁B₁** trazamos un arco e facendo centro en **V** con radio **b'₂** o cortamos obtendo o punto **B**. Xa temos unha cara lateral da pirámide.

Con centro en **B** e radio **B₁C₁** trazamos un arco e facendo centro en **V** con radio **c'₂** o cortamos... Así sucesivamente ata rematar tódalas caras laterais e xa teremos o desenvolvemento da pirámide completa.



3.17.- Desenvolvemento dun prisma oblicuo - F-3.22

Dado o **prisma oblicuo** de bases pentagonais.

Concepto.- As bases xa están en verdadeira magnitude. Teremos que desenvolver as caras laterais que son cadriláteros, dos que coñecemos a medida de dous lados (os lados das bases); o único que temos que obter é a verdadeira magnitude das arestas laterais.

Se cortamos as caras laterais do prisma por un plano perpendicular a elas e abatemos a sección producida teremos os alicerces para facer o desenvolvemento buscado.

Solución: Collemos un plano α perpendicular ás arestas laterais do prisma (**va** será perpendicular á proxección vertical das arestas laterais e **ha** á horizontal).

Tal e como quedou explicado no **apartado 2.6** obtemos a intersección de α co prisma e obtemos a verdadeira magnitude da sección mediante o abatemento da mesma.

Desenvolvemento:

Collemos os lados da sección en verdadeira magnitude e os poñemos, ordenadamente, na mesma liña

(A-B-C-D-E-A); as arestas laterais do prisma serán perpendiculares á eles. Por cada un dos puntos levantamos rectas perpendiculares.

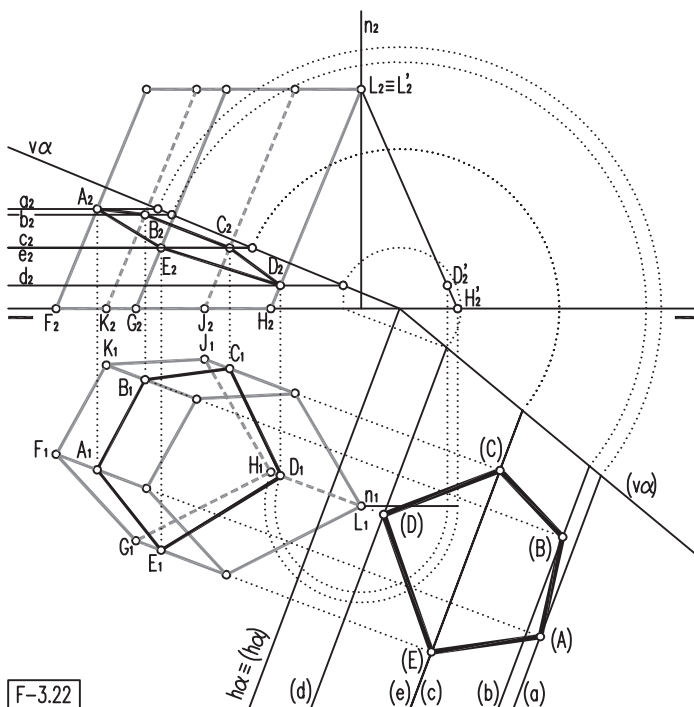
Necesitamos obter a verdadeira magnitude dunha das arestas laterais (son todas da mesma medida). Collemos a aresta que contén ó punto de corte **D** e a xiramos con respecto ó eixo **n** para transformala en frontal. Na proxección vertical teremos **L₂D₂H₂** en verdadeira magnitude.

Na liña da sección desenvolvida levamos, a partir do punto **D** a distancia **D₂L₂** cara a arriba e a distancia **D₂H₂** cara a abaixo e temos a aresta correspondente no desenvolvemento.

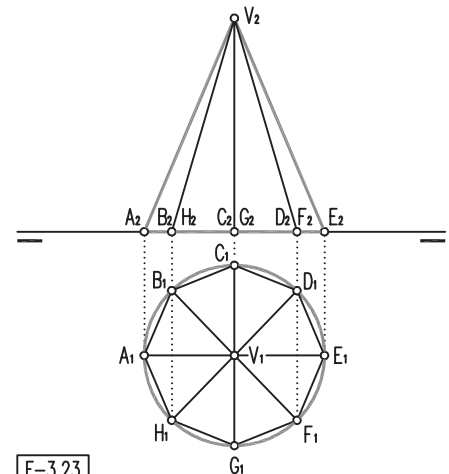
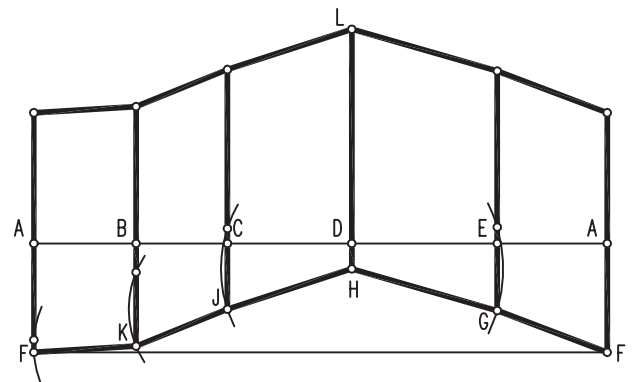
Collemos co compás a distancia **H₁J₁**, facemos centro en **H** e trazamos un arco cara a esquerda. Este arco cortará á liña que pasa por **C** en dous puntos. Na proxección vertical do prisma seccionado podemos ver que a distancia de **D₂** a **H₂** é máis pequena que a de **C₂** a **J₂**, o que nos indica que deberemos tomar o punto de corte de abaixo, que será o punto **J**. Unimos **H** con **J** e temos o lado inferior desa cara do prisma. Polo punto **L** trazamos unha paralela a **HJ** e temos a primeira cara do prisma desenvolva.

Collemos co compás a distancia **J₁K₁**, facemos centro en **J** e trazamos un arco cara a esquerda. Este arco cortará á liña que pasa por **B** en dous puntos. Na proxección vertical do prisma seccionado podemos ver que a distancia de **C₂** a **J₂** é máis pequena que a de **B₂** a **K₂**, o que nos indica que deberemos tomar o punto de corte de abaixo, que será o punto **K**. Unimos **J** con **K** e temos o lado inferior desa cara do prisma. Trazamos unha paralela a **JK** pola parte superior e temos a segunda cara do prisma desenvolva.

Repetimos o mesmo (cara á esquerda e cara á dereita) e rematamos o desenvolvemento.



F-3.22



F-3.23

3.18.- Desenvolvemento dun cono recto - F-3.23

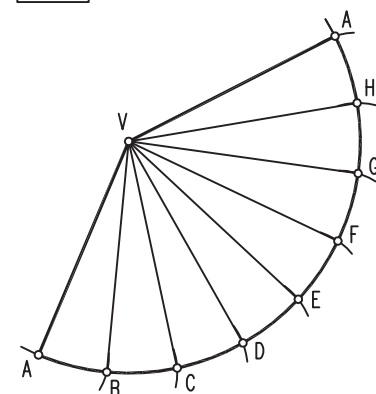
Dado o **cono recto**.

Concepto.- Como xa vimos anteriormente, un cono é unha pirámide polo que resolvemos o desenvolvemento transformando a circunferencia da base nun polígono (cantos máis lados teña teremos máis exactitude no desenvolvemento) e facendo o desenvolvemento tal e como quedou explicado no apdo. 3.16. Debemos ter en conta que este trazado (coma sempre que tratamos coa rectificación da circunferencia) é aproximado

Solución.- Dividimos a base nun octógono regular e trazamos a pirámide correspondente. Como o cono é recto podemos facer o desenvolvemento directamente.

Desenvolvemento:

O segmento **A₂V₂** é a xeratriz do cono en verdadeira magnitude, polo que debuxamos o segmento **AV** coa súa dimensión. Con centro en **V** e radio **VA** trazamos un arco de circunferencia. Con radio o lado do octógono (**A₁B₁**) e, partindo de **A**, levamos esta medida oito veces sobre o arco anterior. Unindo de novo con **V** teremos o desenvolvemento do cono.



3.19.- Desenvolvimento dun cono oblicuo - F-3.24

Dado o **cono oblicuo**.

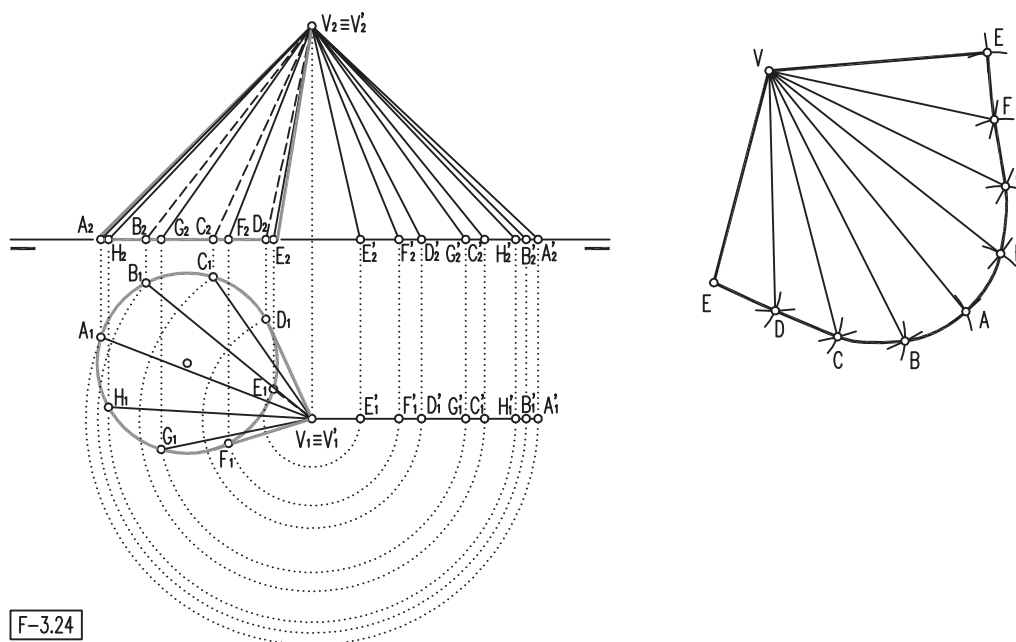
Concepto.- O concepto é o mesmo que no caso anterior pero agora a resolución é un pouco máis traballosa por seren o cono oblicuo. Transformamos a circunferencia da base nun polígono (cantos máis lados teña teremos máis exactitude no desenvolvemento) e facemos o desenvolvemento tal e como quedou explicado no apdo. 3.16.

Solución.- Dividimos a base nun octógono e trazamos a pirámide correspondente. Obtemos (mediante un xiro en torno a un eixo vertical que pasa por **V** e que non debuxamos) a verdadeira magnitude de tódalas arestas laterais da pirámide.

Desenvolvemento:

Debuxamos un segmento **EV** coa medida de **E'zV'z**. Con centro en **E** e radio **E₁D₁** trazamos un arco, e o cortamos con outro de centro **V** e radio **V'zD'z**. Xa temos a primeira cara lateral da pirámide.

Con centro en **D** e radio **D₁C₁** trazamos un arco, e o cortamos con outro de centro **V** e radio **V'zC'z**. Temos a segunda cara da pirámide. Seguimos así ata o final, coma se fose o desenvolvemento dunha pirámide oblicua. Como a base é unha circunferencia e non un polígono, trazamos (a man alzada ou con plantilla de curvas) unha curva que una tódolos puntos da poligonal e teremos o desenvolvemento do cono oblicuo rematado.



3.20.- Desenvolvemento dun cilindro oblicuo - F-3.25

Non estudaremos o desenvolvemento do cilindro recto por razóns obvias: O desenvolvemento do cilindro recto é un rectángulo de lado maior igual á rectificación da circunferencia e lado menor igual á altura do cilindro.

Dado o **cilindro oblicuo**.

Concepto.- Para o desenvolvemento dun cilindro oblicuo o transformamos nun prisma. Transformamos as circunferencias das bases en polígonos (cantos máis lados teñan teremos máis exactitude no desenvolvemento) e facemos o desenvolvemento tal e como quedou explicado no apdo. 3.17.

Solución.- Dividimos as bases en oito partes e trazamos as arestas do prisma correspondente.

Facemos a intersección do cilindro con un plano α perpendicular á xeratriz (ou sexa perpendicular ás arestas laterais do prisma) e obtemos a súa verdadeira magnitude por abatemento.

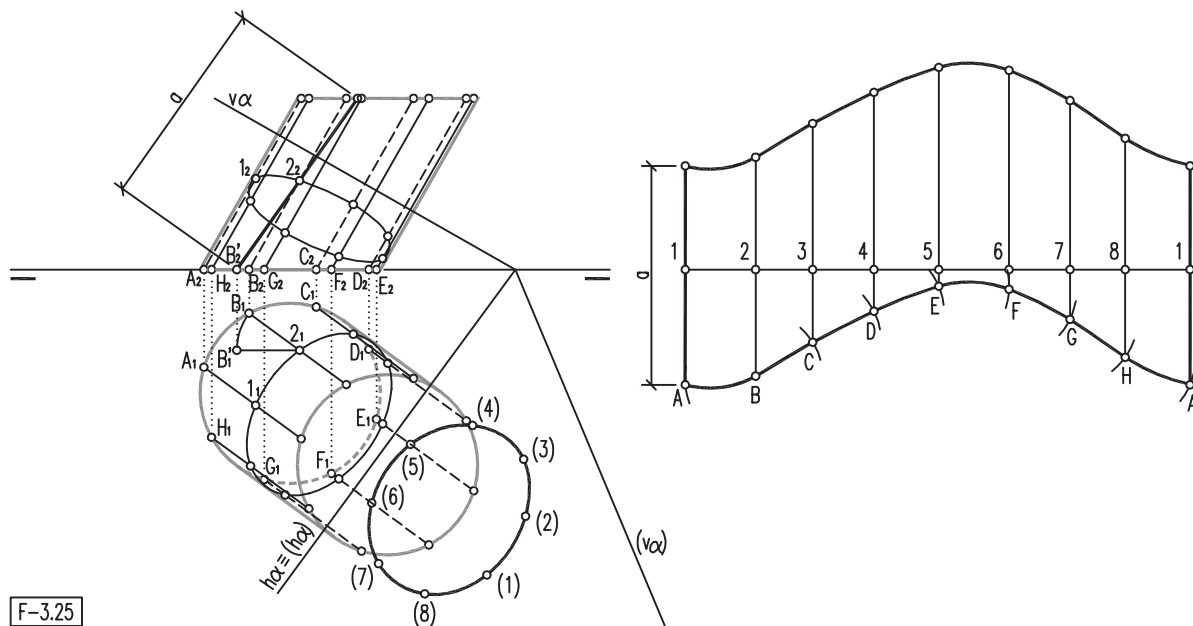
Obtemos (mediante un xiro en torno a un eixo vertical que pasa polo punto de intersección **2**) a verdadeira magnitude dunha aresta lateral do prisma.

Desenvolvimento:

Sobre unha liña horizontal levamos as medidas **1-2**, **2-3... 8-1** (as levamos como se fosen rectas, xa rectificaremos despois). Por cada un dos puntos levantamos perpendiculares. A partir do punto **2** levamos, cara a abaixo a medida **2₂B'₂** (obtendo o punto **B**) e, cara a arriba, a correspondente ata completar a medida **a**.

Seguimos como se estiveramos a desenvolver o prisma: Con centro en **B** e radio **B₁C₁** trazamos un arco que cortará á liña vertical trazada por **3** en dous puntos e collemos o que corresponde, neste caso o de arriba, obtendo o punto **C**. Seguimos cos demais puntos, tal e como quedou explicado no **apdo. 3.17**.

Para rematar e dado que temos un cilindro, unimos os puntos **A, B... H, A**, e os seus correspondentes da parte superior, mediante unha curva a man alzada e teremos rematado o desenvolvemento do cilindro oblicuo.



4 - POLIEDROS

O **POLIEDRO** é un volume limitado por caras poligonais planas.

O **POLIEDRO REGULAR** é un volume cuxas caras son **polígonos regulares** iguais.

TETRAEDRO

O **TETRAEDRO** é un poliedro regular formado por **4 triángulos equiláteros**.

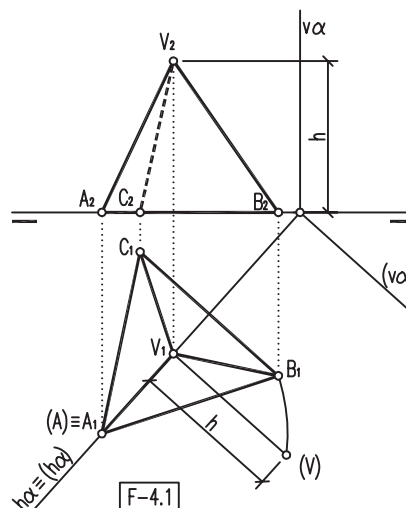
4.1.- TETRAEDRO cunha cara apoiada no plano horizontal – F-3.1

Partindo do lado do tetraedro debuxamos un triángulo equilátero **ABC** (**A₂**, **B₂** e **C₂** estarán na **LT**). Dende cada vértice trazamos unha perpendicular ó lado oposto e teremos **V₁** (proxección horizontal do vértice **V**) onde se corten.

Para obter a altura do tetraedro o cortamos por un plano proxeccante horizontal α que conteña a unha das arestas laterais do tetraedro. Abatemos α .

Con centro en **A₁** e radio **A₁B₁** trazamos un arco que cortará á perpendicular á **h α** trazada por **V₁** no punto (**V**). A distancia **V₁(V)** será **h**, a altura do tetraedro.

Levamos **h** sobre **LT** e debuxamos a proxección vertical do tetraedro.



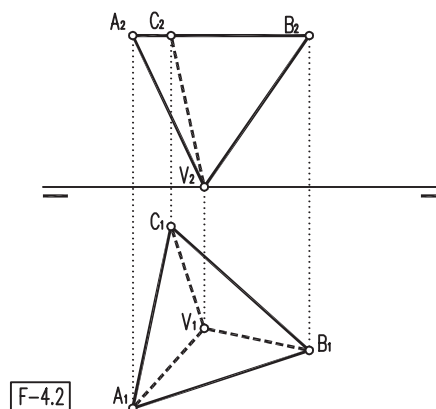
4.2.- TETRAEDRO cunha cara paralela ao PH e un vértice no PH – F-3.2

Este trazado é moi similar ao anterior.

Debuxamos a proxección horizontal do tetraedro (tendo en conta que as arestas laterais quedarán ocultas e deberemos debuxalas con liña de trazos).

Dende **V₁** levamos unha perpendicular á **LT** e obtemos **V₂**.

Obtemos, coma no apartado anterior, a altura do tetraedro e a levamos en perpendicular á **LT** a partir de **V₂**. Trazamos unha paralela a **LT** e levantamos perpendiculares á **LT** dende **A₁**, **B₁** e **C₁** para obter as súas proxeccións verticais **A₂**, **B₂** e **C₂**.

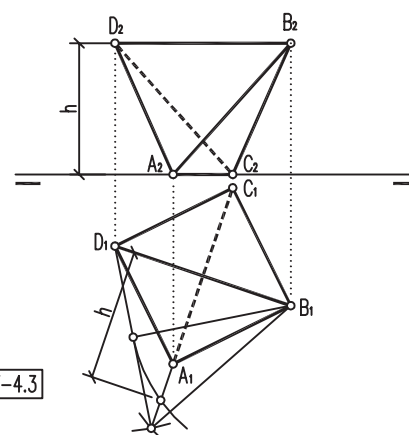


4.3.- TETRAEDRO cunha aresta paralela ao PH e outra no PH – F-3.3

A aresta apoiada no **PH** e a paralela ó **PH** son, pola morfoloxía do tetraedro, perpendiculares entre si e están en verdadeira magnitude na proxección horizontal.

A proxección horizontal do tetraedro será un cadrado cuxas diagonais son a aresta contida no **PH** e a paralela ao **PH**.

A altura **h** da proxección vertical sería a dun triángulo isósceles que teña por base o lado do tetraedro e por lados iguais a altura do triángulo equilátero dunha cara. Se abatemos sobre o **PH** un plano proxeccante horizontal (que non debuxamos) que corte o tetraedro por **D₁B₁** podemos obter **h** como se ve na **F-3.3**.



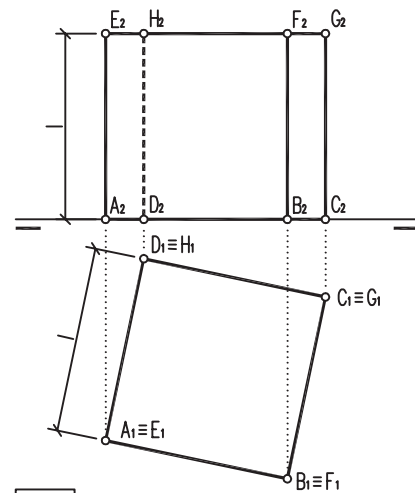
HEXAEDRO OU CUBO

O **HEXAEDRO** ou **CUBO** é un poliedro regular formado por **6** cadrados.

4.4.- CUBO cunha cara apoiada no plano horizontal – F-4.4

O **hexaedro** ou **cubo** apoiado cunha cara no **PH** terá a proxección horizontal formando un cadrado, en verdadeira magnitude, con lado o lado do cubo.

A proxección vertical a obteremos levando perpendiculares á **LT** e tendo en conta que a proxección vertical das arestas laterais está en verdadeira magnitude.



F-4.4

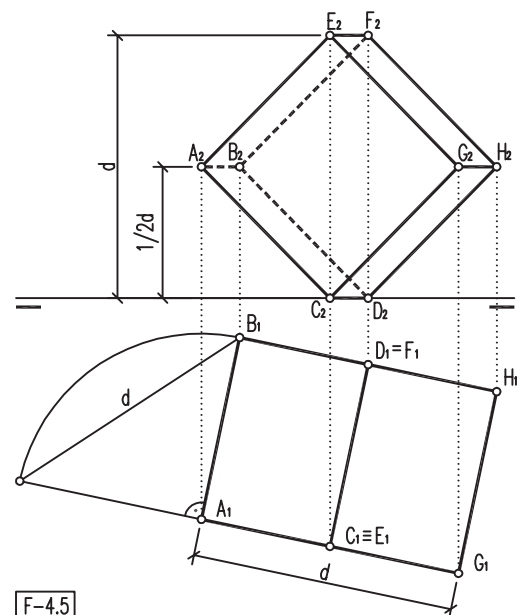
4.5.- CUBO cunha aresta no PH – F-4.5

Concepto.- Imos supoñer que, ademais da aresta no **PH**, as caras laterais forman o mesmo ángulo co **PH**; isto significa que a altura do cubo, nesta posición, será a diagonal dunha cara.

O cubo terá dúas das caras formando 90° co plano horizontal o que, ademais do indicado no parágrafo anterior, significa que en proxección horizontal o ancho tamén será a lonxitude da diagonal dunha cara.

Solución.- Debuxamos un lado **AB** en proxección horizontal (**A1B1**). Partindo deste lado obtemos a medida **d** da diagonal da cara (a cara é un cadrado) e a levamos en perpendicular a **A1B1**, obtendo **H1** e **G1**. Trazamos unha paralela a **A1G1** e temos a proxección horizontal do cubo nesta posición.

Agora non temos máis que levar perpendiculares á **LT** dende as proxeccións horizontais dos vértices, tendo en conta que **E2** e **F2** terán cota **d** e **A2**, **B2**, **G2** e **H2** terán cota **d/2**.



F-4.5

4.6.- CUBO cunha diagonal vertical – F-4.6

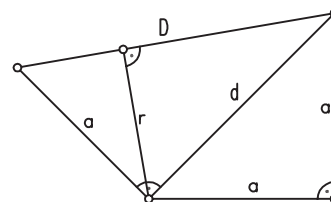
Concepto.- Cando temos o cubo cunha diagonal vertical, o perímetro da proxección horizontal é un hexágono. Na proxección vertical teremos os vértices situados de tal xeito que as cotas serán a medida da diagonal ou distancias de $1/3$ dela.

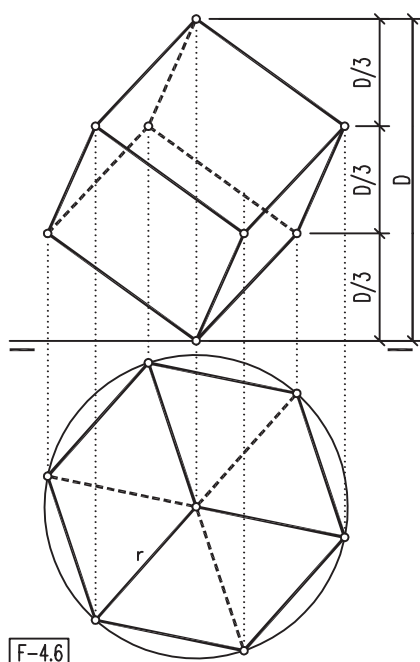
Para obter a medida da diagonal do cubo teremos en conta que é a hipotenusa dun triángulo rectángulo que ten por catetos a diagonal dunha cara e o lado do cubo. A altura (con respecto á hipotenusa) no triángulo rectángulo anterior será o radio da circunferencia na que está inscrito o hexágono da proxección horizontal.

Solución.- Debuxamos un triángulo rectángulo a partir de dous catetos (que forman 90°) que teña por medida o lado do cubo **a** e a diagonal dunha cara **d**. A hipotenusa **D** do triángulo rectángulo será a diagonal do cubo. A altura **r** será o radio da circunferencia necesaria para facer a proxección horizontal do cubo.

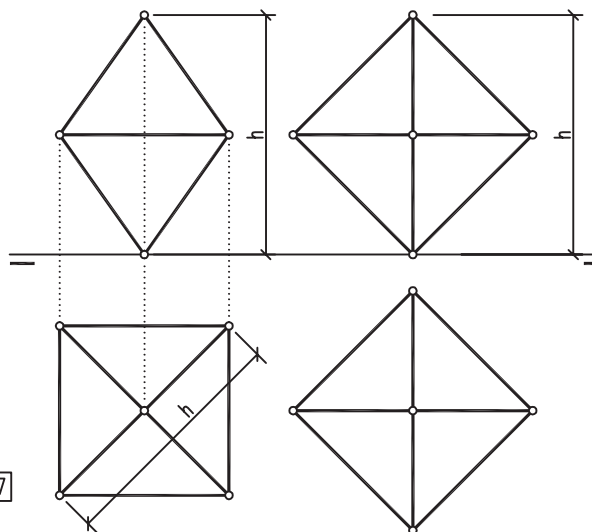
Co radio **r** trazamos unha circunferencia e debuxamos o **hexágono** inscrito. Unimos os vértices co centro (ollo ás arestas vistas e ocultas) e teremos a proxección horizontal do cubo.

Levamos perpendiculares á **LT** dende tódolos vértices do cubo en proxección horizontal. As cotas das proxeccións verticais dos diferentes vértices estarán en fraccións de **D/3**.





F-4.7



OCTAEDRO

O **OCTAEDRO** é un poliedro regular formado por **8 triángulos equiláteros**.

4.7.- OCTAEDRO cunha diagonal vertical – F-4.7

Concepto.- Cando o octaedro ten unha diagonal vertical, a proxección horizontal é un cadrado de lados iguais á medida do lado do octaedro (son rectas horizontais). Pola súa morfoloxía, as proxeccións verticais dos vértices terán cotas iguais á propia diagonal do cadrado da proxección horizontal (que é o que mide a diagonal do octaedro) ou á metade dela.

Solución.- Partindo do lado do octaedro debuxamos un cadrado e trazamos as diagonais; esta será a proxección horizontal do octaedro. Segundo a posición no que o coloquemos variará a proxección vertical que, de calquera xeito terá a altura h igual á diagonal do cadrado da base.

Aquí vedes dúas posicións do octaedro cunha diagonal vertical.

4.8.- OCTAEDRO cunha cara apoiada no PH – F-4.8

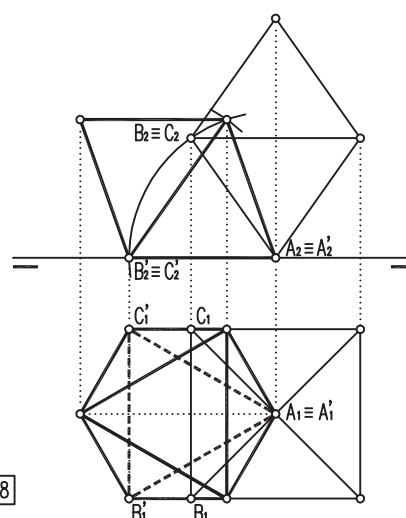
Concepto: Para facer o octaedro cunha cara apoiada no **PH** utilizaremos un recurso básico para debuxar calquera volume nunha posición rara: O debuxamos nunha posición sinxela e logo, mediante xiros ou cambios de plano, o colocamos como ten que quedar.

Neste caso debuxaremos o octaedro cunha diagonal vertical e, mediante un xiro, porémolo cunha cara no **PH**.

Solución.- Co lado dado debuxamos as proxeccións do octaedro cunha diagonal vertical. Collemos un eixo de punta (non está debuxado) que conteña ao punto **A** (o vértice inferior que está no **PH**). Xiramos na proxección vertical de xeito que os puntos **B** e **C** queden no plano horizontal (con centro en A_2 levamos $B_2=C_2$ ata **LT** onde teremos $B'_2=C'_2$). Como a proxección vertical do octaedro son dous triángulos, obtemos por triangulación a nova proxección vertical (ver **DEBUXO TÉCNICO I – páx. 21. Apdo. 2.3**).

Trazando por cada proxección vertical dos vértices rectas perpendiculares a **LT** e, polas proxeccións horizontais paralelas á **LT**, obteremos a proxección horizontal do octaedro cunha cara (a cara **ABC**) apoiada no **PH**. É importante ter en conta que a proxección horizontal do octaedro cunha cara no **PH** ten un perímetro con forma de **hexágono regular**.

F-4.8



DEBUXAR UN POLIEDRO EN CALQUERA POSICIÓN

Co xa visto nos puntos anteriores podemos debuxar un poliedro en calquera posición.

Concepto.- O procedemento será sempre o mesmo: O debuxamos nunha das posicións coñecidas (a que mellor se adapte á que nos piden) e, mediante xiros e/ou cambios de plano o levamos á posición pedida. Isto pode chegar a ser un problema complexo (non polo concepto senón polos múltiples pasos do trazado) en algúns casos. Veremos, a continuación, un deles.

4.9.- Debuxar un CUBO dada a súa diagonal – F-4.9/13

Concepto.- A diagonal **AB** é unha recta oblicua. Nos sabemos debuxar o cubo cunha diagonal vertical (ver o **apdo. 4.6**). Transformaremos a diagonal dada en unha recta vertical mediante un xiro (para transformala nunha recta frontal) e un cambio de plano (para transformar a recta frontal nunha vertical).

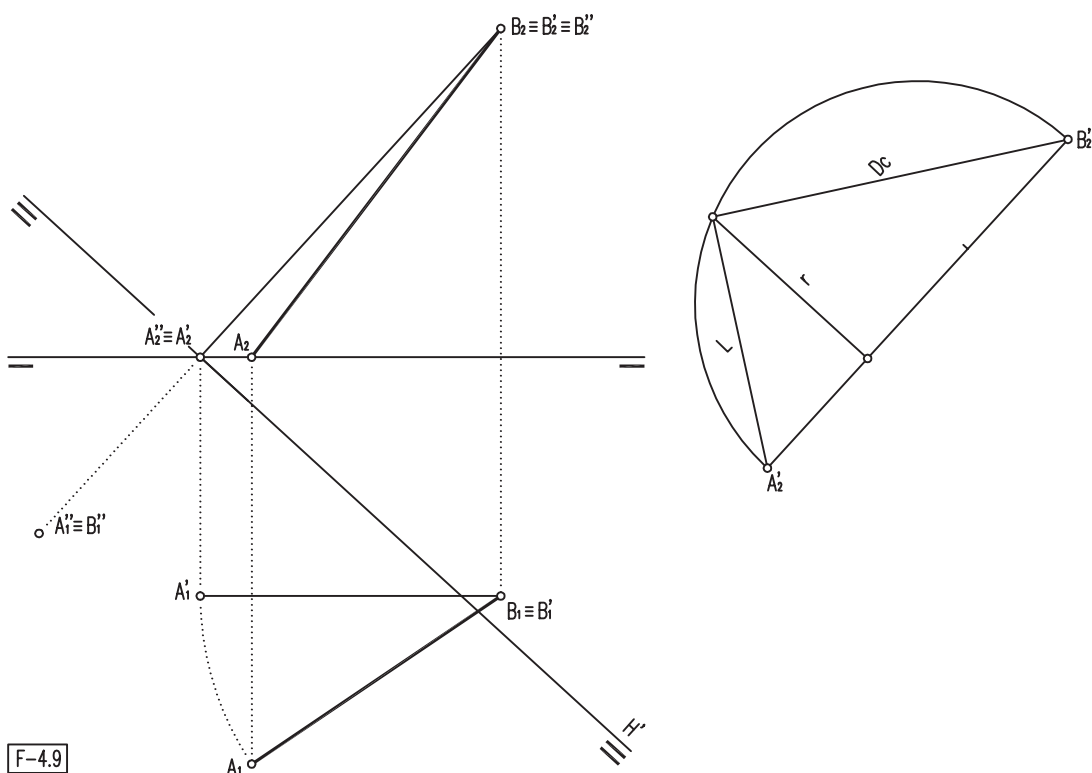
Unha vez que temos á diagonal vertical debuxaremos as proxeccións do cubo como xa sabemos. Desfaceremos o cambio de plano e, despois, desfaceremos o xiro co que teremos o cubo na posición pedida.

Solución.-

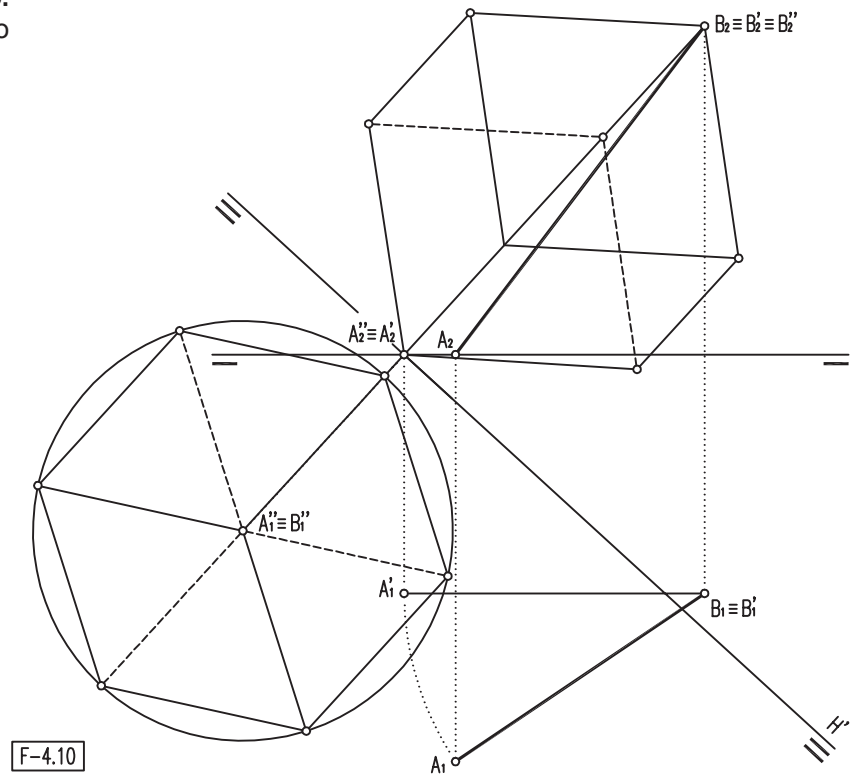
F-4.9.- Para facer o xiro (ver **apdo. 1.2**) collemos un eixo vertical que pase polo punto B (non o debuxamos). Facendo centro en B1 poñemos **A'1B'1** paralela á **LT**. En proxección vertical teremos **A'2B'2** e o segmento **AB** transformado en recta frontal.

Para facer o cambio de plano horizontal (ver **apdo. 1.5**) poñemos a nova **LT'** perpendicular a **A'2B'2**, que agora coincidirá con **A''2B''2**. Na proxección horizontal **A''1=B''1** terán a cota de **A'1** e **B'1**. Temos a nosa diagonal do cubo transformada nunha recta vertical **A''B''**.

Partindo da medida da diagonal (**A''2B''2** está en verdadeira magnitude) e, como vimos no **apdo. 3.6**, obtemos o lado do cubo **L**, a diagonal dunha cara **Dc** e o radio **r** da circunferencia na que está inscrito o hexágono da proxección horizontal do cubo coa diagonal vertical.

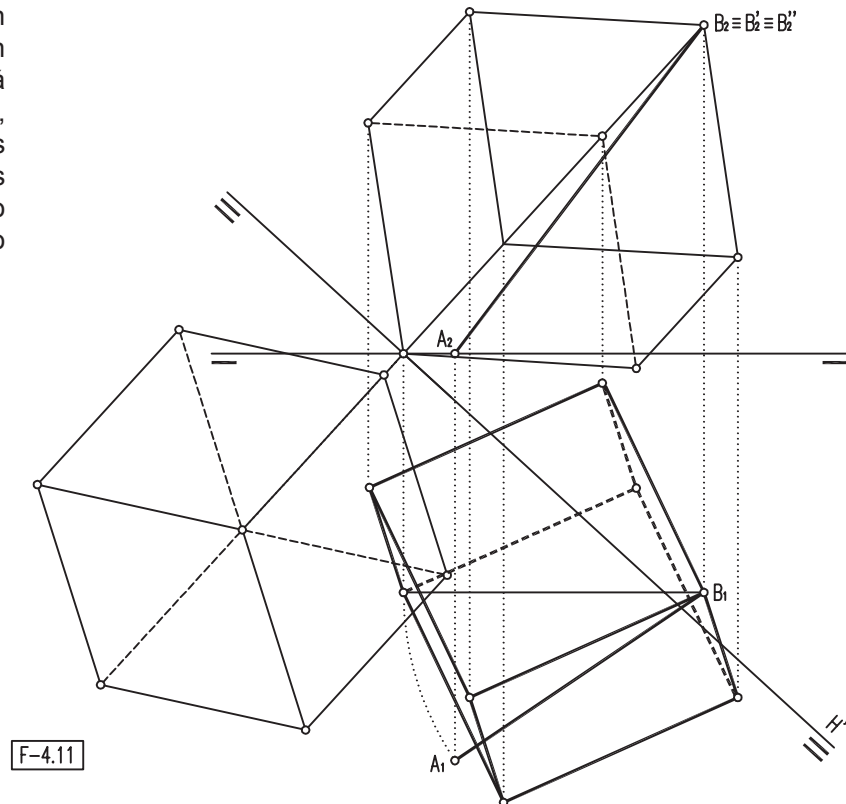


F-4.10.- Aplicando o visto no **apdo. 3.6** debuxamos as proxeccións do cubo de diagonal **A''B''**.



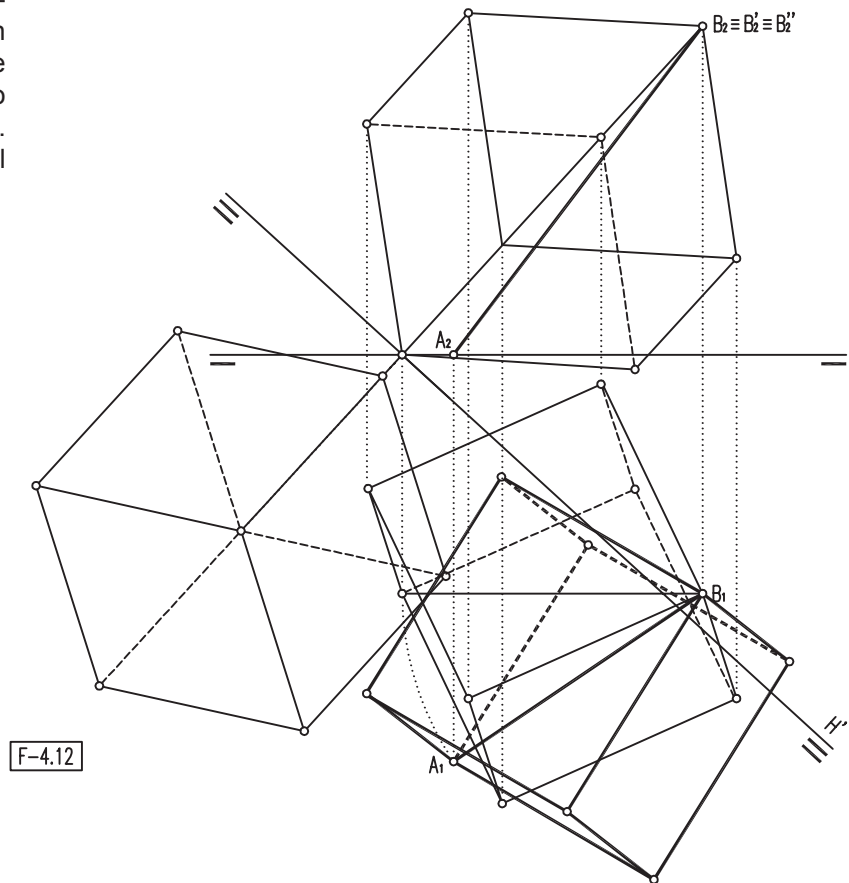
F-4.10

F-4.11.- Desfacemos o cambio de plano (ver **apdo. 1.6**): Dende cada un dos vértices do cubo na proxección vertical levamos perpendiculares á primeira **LT** e, con respecto a ela, levamos o alonxamento de tódalas proxeccións horizontais dos vértices e obtemos a proxección horizontal do cubo despois de desfacer o cambio de plano feito.



F-4.11

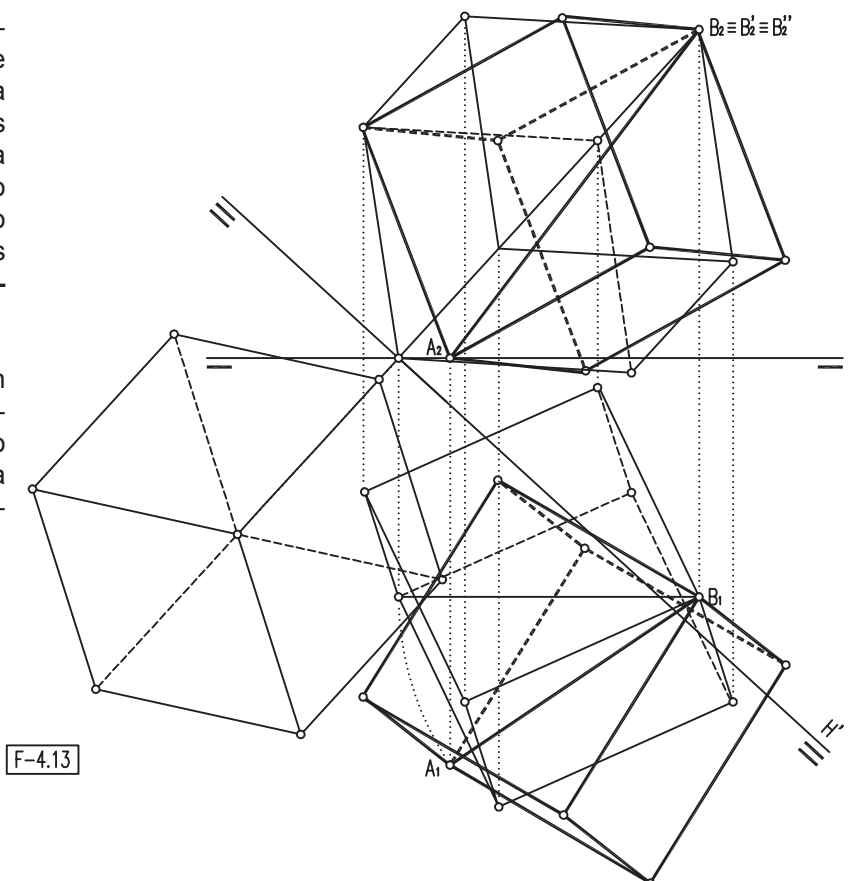
F-4.12.- Desfacemos o xiro: Facendo centro en B_1 facemos un xiro (coa proxección horizontal de cada vértice) co mesmo ángulo do primeiro pero en sentido oposto. Obtemos a proxección horizontal do cubo coa diagonal dada.



F-4.12

F-4.13.- Dende a proxección horizontal de cada un dos vértices levamos perpendiculares á LT ; onde se corten con cadansúa paralela a LT trazada dende as proxeccións verticais dos vértices, teremos a proxección vertical dos vértices do cubo na posición pedida. Unindo os vértices temos rematadas as **proxeccións do cubo de diagonal a recta oblicua AB**.

Como vedes isto está feito en diferentes debuxos. Se o fixeramos (como sería de rigor) todo no mesmo debuxo, o resultado sería absolutamente confuso e inintelixible.



F-4.13

DODECAEDRO

O **DODECAEDRO** é un poliedro regular formado por **12 pentágonos**.

4.10.- DODECAEDRO cunha cara apoiada no plano horizontal – F-4.14

Concepto.- O dodecaedro cunha cara apoiada no plano horizontal terá, en proxección horizontal, dous pentágonos (xirados un con respecto ao outro) en verdadeira magnitude. Estes dous pentágonos están unidos por dúas ringleiras de pentágonos contrapeados, o que fai que o contorno da proxección horizontal sexa un decágono regular; unha vez obtido este decágono será sinxelo debuxar a proxección horizontal.

Solución.- Partindo do lado **a** do dodecaedro debuxamos dous pentágonos concéntricos e inversos por debaixo da **LT**. O pentágono que está no **PH** estará debuxado con liña de trazos.

A partir do pentágono do **PH** debuxamos outros dous que teñan como base dous lados adxacentes; estes pentágonos serán dúas das caras laterais abatidas sobre o **PH**.

O lado de cada pentágono abatido común co pentágono da base será o eixo de xiro ou a traza horizontal do plano abatido, que non debuxamos, e que contén a cada cara.

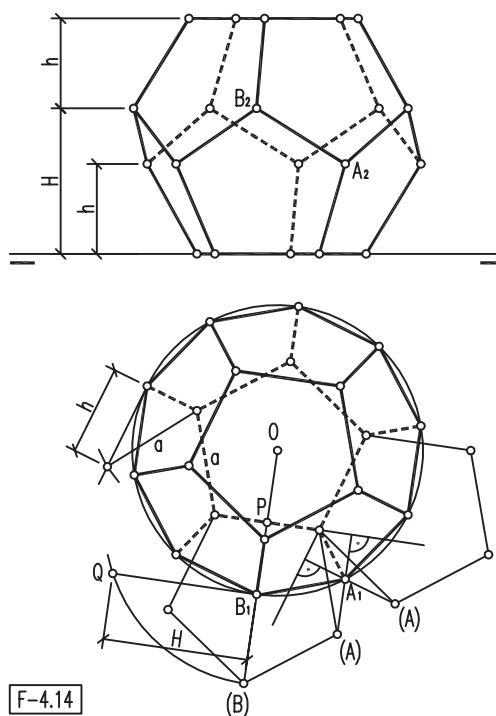
O punto **(A)** de ambas as dúas caras abatidas móvese (no proceso de abatemento) nunha perpendicular ó eixo de xiro (traza horizontal do plano) de cada unha delas; onde se atopen será a proxección horizontal **A₁** do punto.

Con radio **OA₁** trazamos a circunferencia na que está inscrito o decágono que é o contorno da proxección horizontal do dodecaedro. Unindo os vértices do decágono co centro e entre si, obteremos as proxeccións horizontais de todos os lados do dodecaedro (ollo coas arestas vistas e ocultas).

Para obter as cotas dos vértices do dodecaedro:

O punto **B** (vértice superior dunha das caras abatidas) o obteremos tendo en conta que a súa cota **H** será un cateto do triángulo rectángulo que ten por base o segmento **PB₁** (outro cateto) e por hipotenusa a altura do pentágono (o segmento **P(B)**). Facendo centro en **P** e con radio **P(B)** trazamos un arco que cortará á perpendicular á **PB₁** trazada por **B₁** no punto **Q**. **B₁Q** será a cota do punto **B**, ou sexa **H**.

Para obter a cota **h** dos puntos intermedios dos pentágonos abatemos o triángulo rectángulo que ten por cateto base unha das liñas de trazos da proxección horizontal e por hipotenusa o lado **a** do pentágono. Esta cota **h** a teremos igualmente por riba da **H** para obter a cota da base superior



ICOSAEDRO

O **ICOSAEDRO** é un poliedro regular formado por **20 triángulos equiláteros**.

4.11.- ICOSAEDRO cunha diagonal vertical – F-4.15

Concepto.- O icosaedro cunha diagonal vertical estará formado por dúas pirámides de base pentagonal e caras laterais triángulos equiláteros (unha pirámide invertida e co vértice apoiado no **PH** e outra co vértice no extremo contrario da diagonal vertical) unidas, a súa vez, por triángulos equiláteros contrapeados.

En proxección horizontal teremos dous pentágonos (as hipotéticas bases desas dúas pirámides) en verdadeira magnitude e xirados un con respecto ao outro, o que fai que o perímetro ou contorno da proxección horizontal sexa, igual que no caso do dodecaedro, un decágono regular.

Solución.- Co lado do icosaedro debuxamos dous pentágonos regulares (na proxección horizontal) contrapeados; un deles o poñeremos con liñas de trazos (o correspondente á pirámide inferior). Unindo os vértices de ambos os dous debuxaremos o decágono regular, que é o perímetro da proxección horizontal que xa teremos rematada.

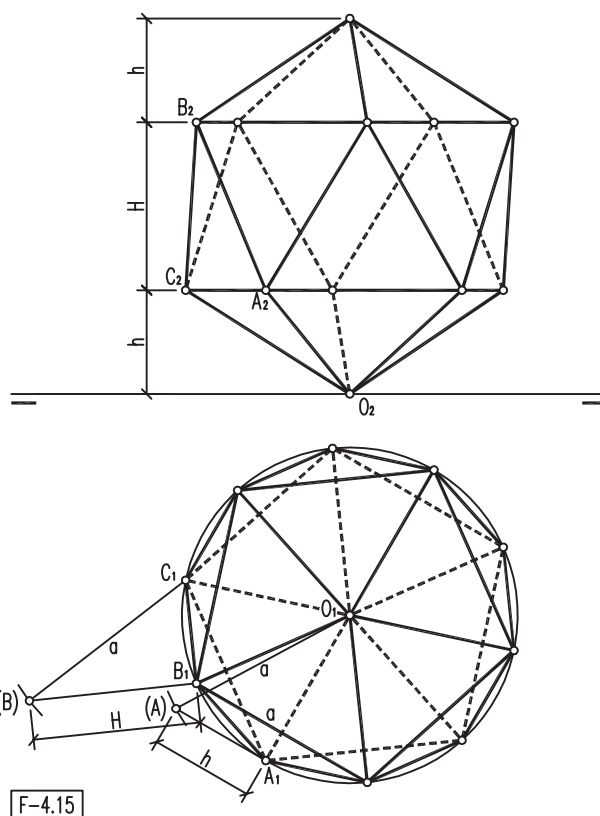
Para obter as alturas **h** das dúas pirámides de base pentagonal abateremos a aresta **OA** dun dos triángulos da base: A partir da proxección horizontal **A₁O₁** da aresta levantamos unha perpendicular a ela por **A₁** e, facendo centro en **O₁**, a cortamos cun arco de radio **a** (o lado do icosaedro).

Para obter a altura **H** do elemento intermedio abateremos a aresta **BC**: Trazamos unha perpendicular a **B₁C₁** polo extremo **B₁**. Con centro en **C₁** e radio o lado **a** cortamos á perpendicular no punto **(B)**. **B₁(B)** será a altura

H buscada.

Coas dúas alturas **h** e **H** poderemos obter a proxección vertical de todos os vértices do icosaedro.

Teremos que fixarnos nas vistas e aplicar a lóxica para trazar as proxeccións das arestas con liñas continuas (vistas) ou descontinuas (ocultas).



INTERSECCIÓN DE POLIEDROS

As interseccións dos poliedros con planos ou rectas as resolvemos do mesmo xeito que faciamos cos volumes xa vistos.

4.12.- Intersección dun poliedro cun plano – F-4.16

Dado o **octaedro** e o plano α .

Concepto.- Para resolver a intersección reduciremos o problema a outro máis sinxelo.

Transformamos, mediante un cambio de plano vertical, o plano α en outro proxectante vertical. A planta mantense e deberemos obter a nova proxección vertical do octaedro despois do cambio de plano.

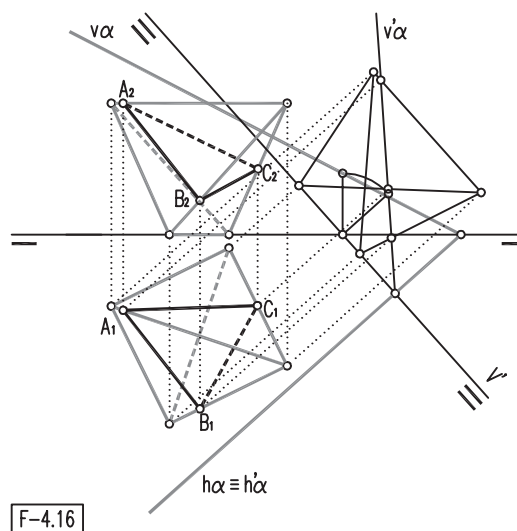
Na proxección vertical teremos os puntos de intersección onde a traza vertical corte as arestas do octaedro. Obtemos a proxección horizontal da sección e desfacemos o cambio de plano.

Solución.- Collemos a nova liña de terra perpendicular a $h\alpha = h'\alpha$ para transformar o plano α en proxectante vertical. Seguindo o explicado no **apdo.1.6**, obtemos $v'\alpha$.

Como movemos o plano vertical, a proxección horizontal do octaedro mantense. Obtemos a nova proxección vertical levando perpendiculares á **LT'** dende os vértices da proxección horizontal e collendo cadansúa cota (a cota non varía cando movemos o **PV**).

Onde $v\alpha'$ corta á proxección vertical das arestas, baixamos en perpendicular a **LT'** e obtemos a proxección horizontal da intersección **A₁B₁C₁**.

Agora temos que desfacer o cambio de plano: Levantamos dende **A₁**, **B₁** e **C₁** perpendiculares á **LT** e obtemos, na proxección vertical de partida, **A₂**, **B₂** e **C₂**.

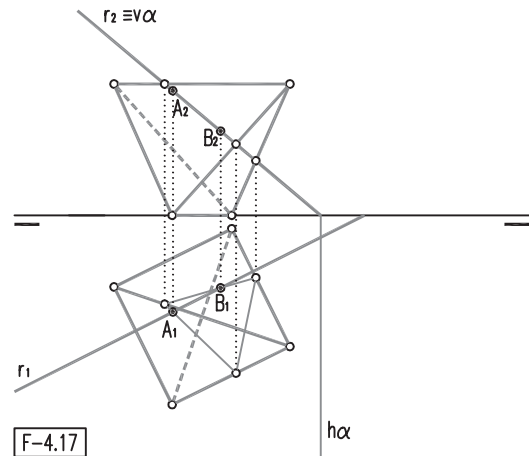


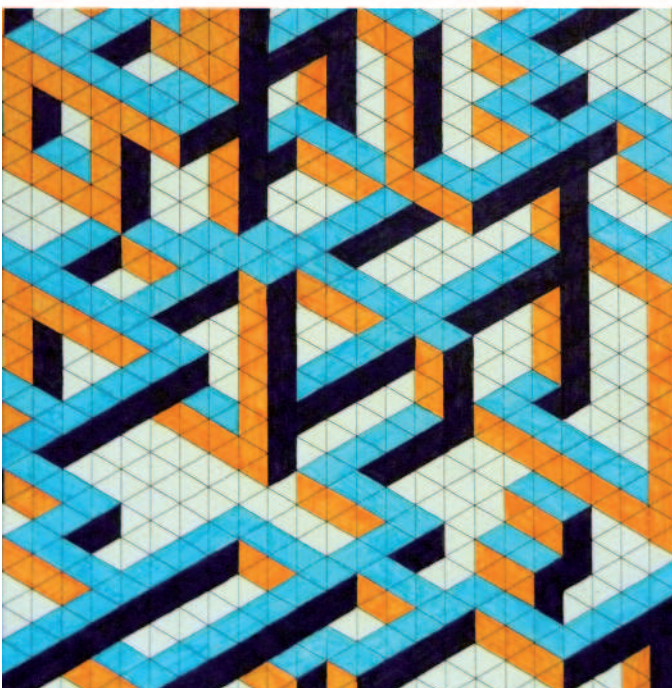
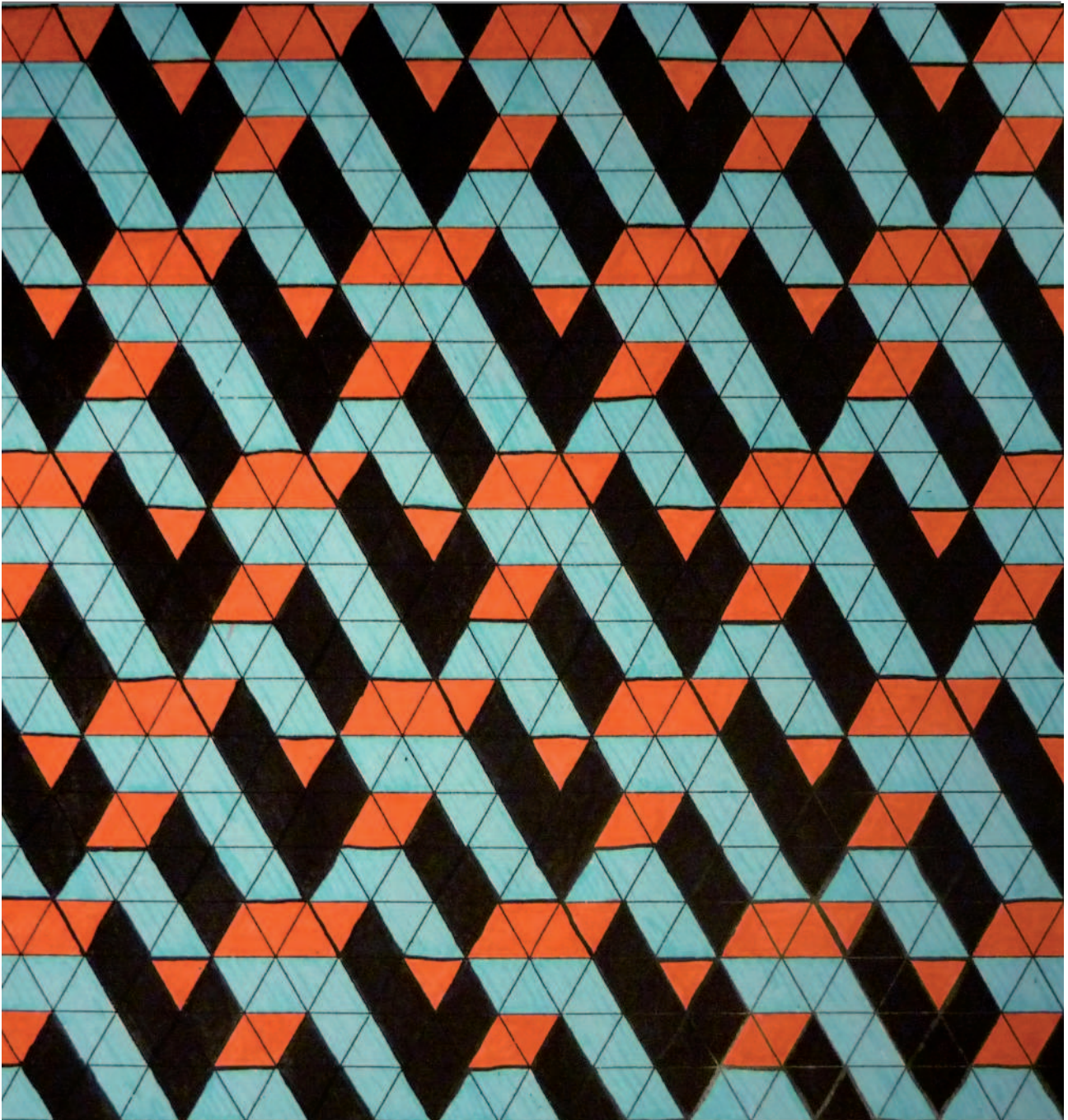
4.13.- Intersección dun poliedro cunha recta – F-4.17

Dado o **octaedro** e a recta **r**.

Concepto.- De novo estamos ante un caso xa coñecido. Collemos un plano proxeitante que conteña á recta. Obtemos a intersección do plano co poliedro e, onde se corte coa recta, teremos os dous puntos de intersección.

Solución.- Collemos un plano α , proxeitante vertical, que conteña á recta **r** ($v\alpha$ coincide con r_2 e $h\alpha$ é perpendicular á **LT**). Dende onde $v\alpha$ corte á proxección vertical do poliedro baixamos perpendiculares á **LT** e obtemos a proxección horizontal da intersección co plano α ; onde esta intersección corte a r_1 serán as proxeccións horizontais dos puntos de intersección, **A₁** e **B₁**. Levantando perpendiculares á **LT** obtemos en r_2 **A₂** e **B₂**, proxeccións verticais dos puntos de intersección de **r** co **poliedro**.





SISTEMA
AXONOMÉTRICO

1 - VOLUMES

PERSPECTIVA AXONOMÉTRICA DE VOLUMES

1.1.- Como ler as vistas dunha peza ou volume - F-1.1/12

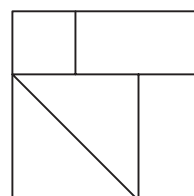
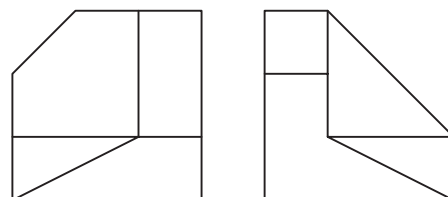
En **DEBUXO TÉCNICO I**, páx. 84-85 (**VISTAS DE PEZAS**) xa vimos a representación dunha peza ou volume polas súas vistas e o tipo de planos cos que nos podíamos atopar (horizontal ou vertical, inclinado e chafrán); tendo isto en conta podemos facer o traballo contrario: **Dadas as vistas da peza entender e debuxar o volume**.

Dadas as tres vistas (**F-1.1**) dunha peza deberemos ter en conta o lugar que ocupan para saber que vistas da peza son: Cando nos dan tres vistas sempre son dous alzados e unha planta. Temos dúas vistas na parte superior o que indica que son os alzados; a vista da parte inferior ten que ser a planta. Loxicamente como a planta está debaixo ten que ser a **PLANTA SUPERIOR (PS)** da peza e, a vista que está sobre ela, o **ALZADO FRONTAL (AF)**. A vista da dereita do alzado frontal ten que ser o **ALZADO LATERAL ESQUERDO (ALE)**.

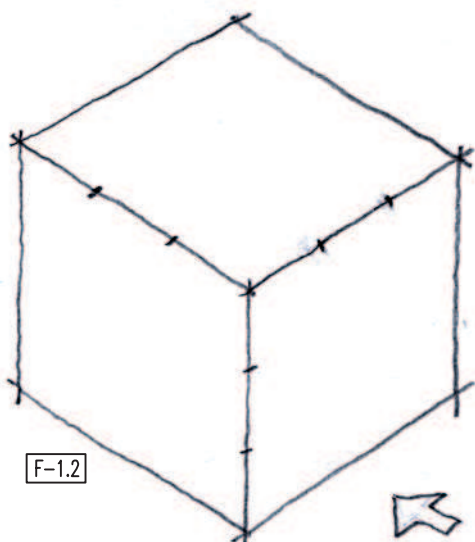
Faremos un debuxo a man alzada a medida que lemos as vistas da peza:

Podemos ver que o volume ten 3x3x3 unidades (ancho, alto e profundidade) polo que o volume de partida é un cubo (**F-1.2**), e o **AF** será o que marca a frecha.

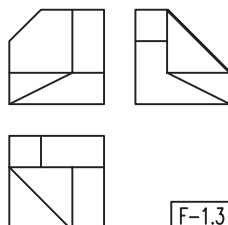
Tendo en conta o **ALE** (**F-1.3**), a liña remarcada indica que, vista dende a esquerda, á peza lle sobra toda esa parte, polo que quedaría como aparece na **F-1.4**.



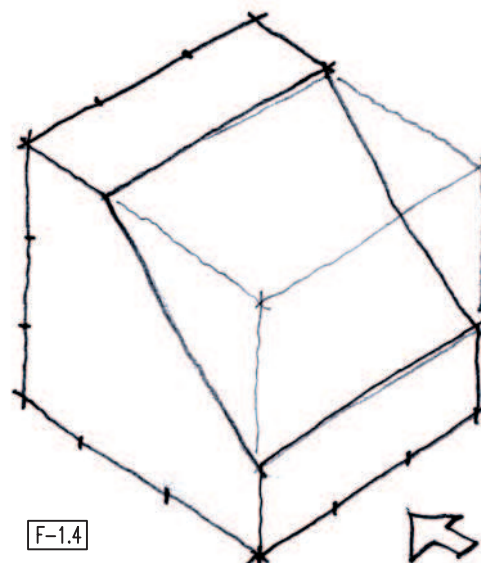
F-1.1



F-1.2

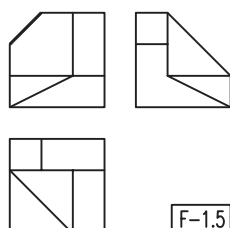


F-1.3

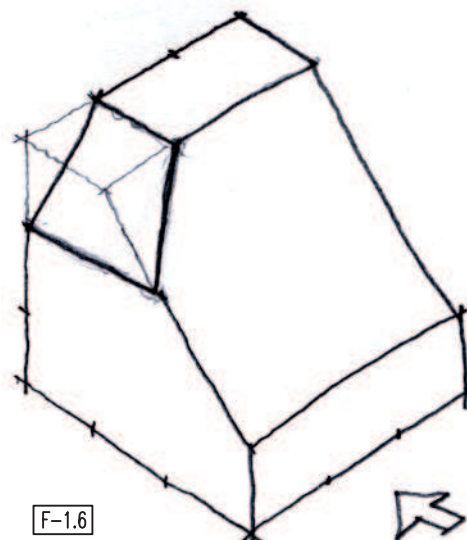


F-1.4

Tendo en conta o **AF** (**F-1.5**), a liña remarcada indica que, vista de fronte, á peza lle sobra toda esa parte, polo que quedaría como aparece na **F-1.6**.

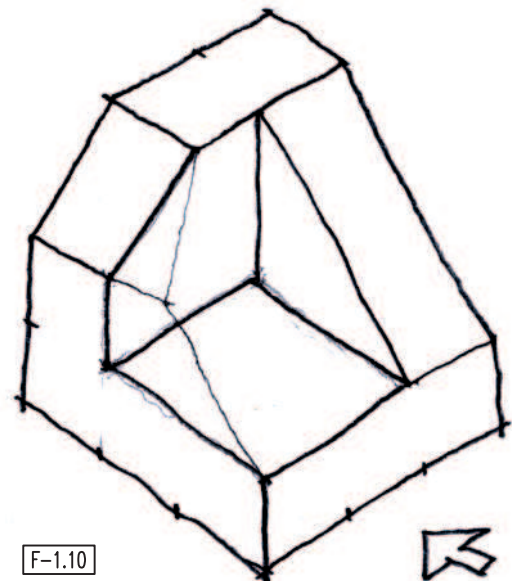
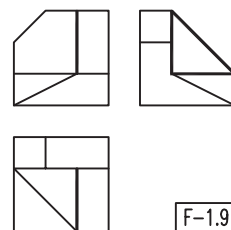
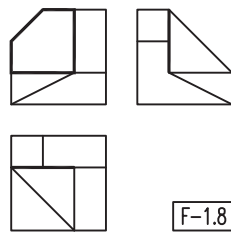
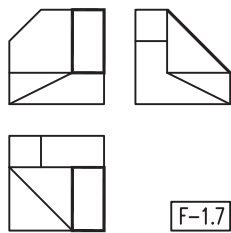


F-1.5

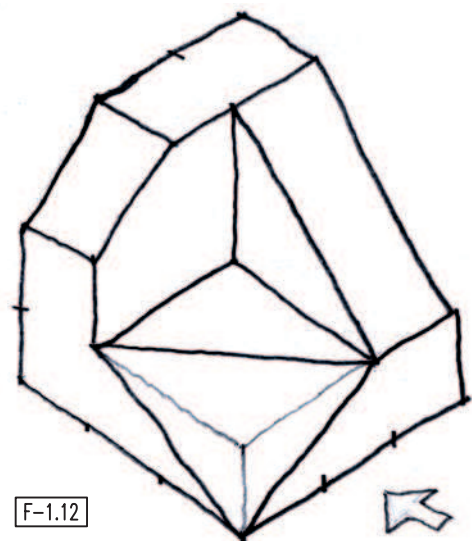
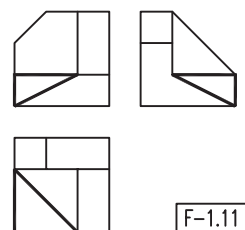


F-1.6

Fixémonos agora no plano remarcado na **F-1.7**. Este plano o vemos no **AF** e na **PS** coma un rectángulo e no **ALE** como unha liña, o que indica que ten que ser un plano inclinado cara a fronte. O plano remarcado nas tres vistas da **F-1.8** ten que ser un plano vertical visto de fronte e o remarcado nas tres vistas da **F-1.9** ten que ser, necesariamente, outro plano vertical que vemos dende o **ALE**. Conxugando todo o anterior temos que deducir que nos quedaría a nosa peza tal e como vemos na **F-1.10**.



O que nos quedaría por resolver é o plano remarcado da **F-1.11** que, dado que o vemos nas tres vistas, soamente pode ser un chafrán, o que deixaría a peza como aparece na **F-1.12**.



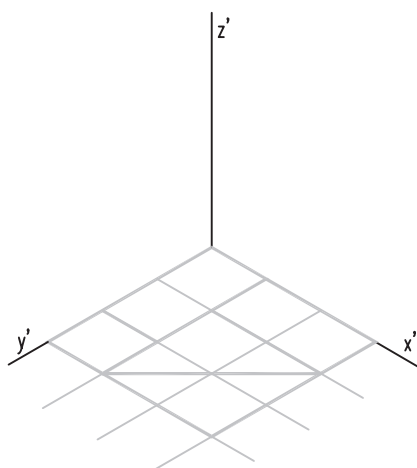
Con un pouquiño de práctica e aplicando a lóxica, poderemos visualizar calquera volume, paso previo o seu debuxo en calquera axonometría.

1.2.- Debuxo dun volume en ISOMETRÍA - F-1.13/14

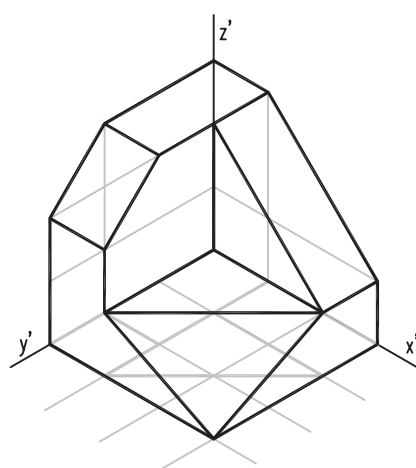
Dadas as vistas da **F-1.1**.

No **apdo. 1.1** vimos como chegar a ler o volume a partir das vistas en diédrico. Para debuxar a perspectiva isométrica ou **ISOMETRÍA** da peza (**F-1.13**):

- situamos os eixos axonométricos x' , y' e z' formando ángulos de 120° entre eles.
- Debuxamos (coas medidas reais pois non temos coeficientes de redución) a **PLANTA SUPERIOR** da peza no plano $x'y'$ na posición axeitada para que, unha vez debuxado o volume, as vistas que vexamos sexan as de partida.
- A partir da planta debuxamos o volume (**F-1.14**), xa coñecido, tendo en conta que en sistema axonométrico non se debuxan as liñas ocultas (a trazos) agás que no lo pidan expresamente.



F-1.13



F-1.14

1.3.- Debuxo dun volume en PERSPECTIVA CABALEIRA - F-1.15/16

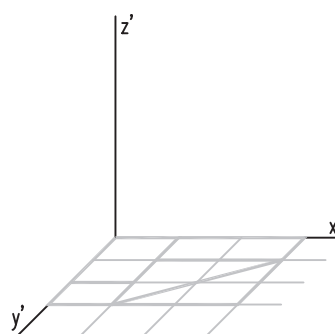
Dadas as vistas da F-1.1.

No **apdo. 1.1** vimos como chegar a ler o volume a partir das vistas en diédrico. Para debuxar a **perspectiva CABALEIRA** da peza (F-1.15):

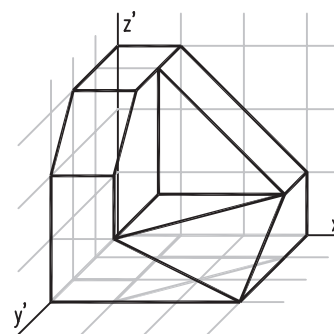
- situamos os eixos axonométricos **x'** e **z'** formando un ángulo de **90°** entre eles. O eixo **y'** formará **135°** con cada un dos anteriores.

- Debuxamos a **PLANTA SUPERIOR** da peza no plano **x'y'** (deberemos ter en conta que no eixo **y'** temos un coeficiente de redución de **1/2**) na posición axeitada para que, unha vez debuxado o volume, as vistas que vexamos sexan as de partida.

- A partir da planta debuxamos o volume (F-1.16).



F-1.15



F-1.16

1.4.- Debuxo dun volume en PERSPECTIVA MILITAR - F-1.17/18

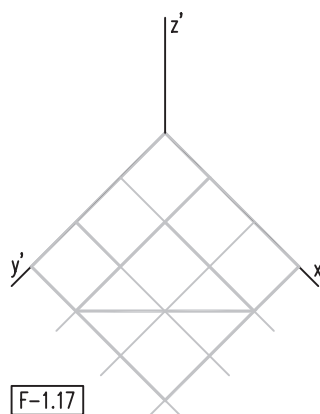
Dadas as vistas da F-1.1.

Para debuxar a **perspectiva MILITAR** da peza (F-1.17):

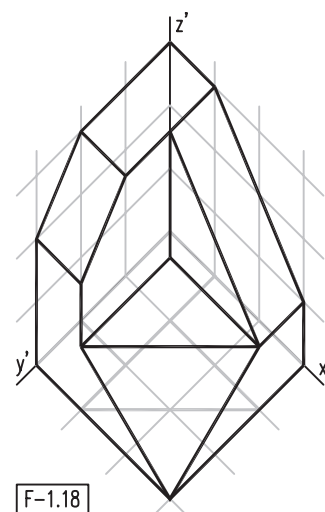
- situamos os eixos axonométricos **x'** e **y'** formando un ángulo de **90°** entre eles. O eixo **z'** formará **135°** con cada un dos anteriores.

- Debuxamos a **PLANTA SUPERIOR** da peza no plano **x'y'**. Normalmente sen coeficiente de redución.

- A partir da planta debuxamos o volume (F-1.18).



F-1.17

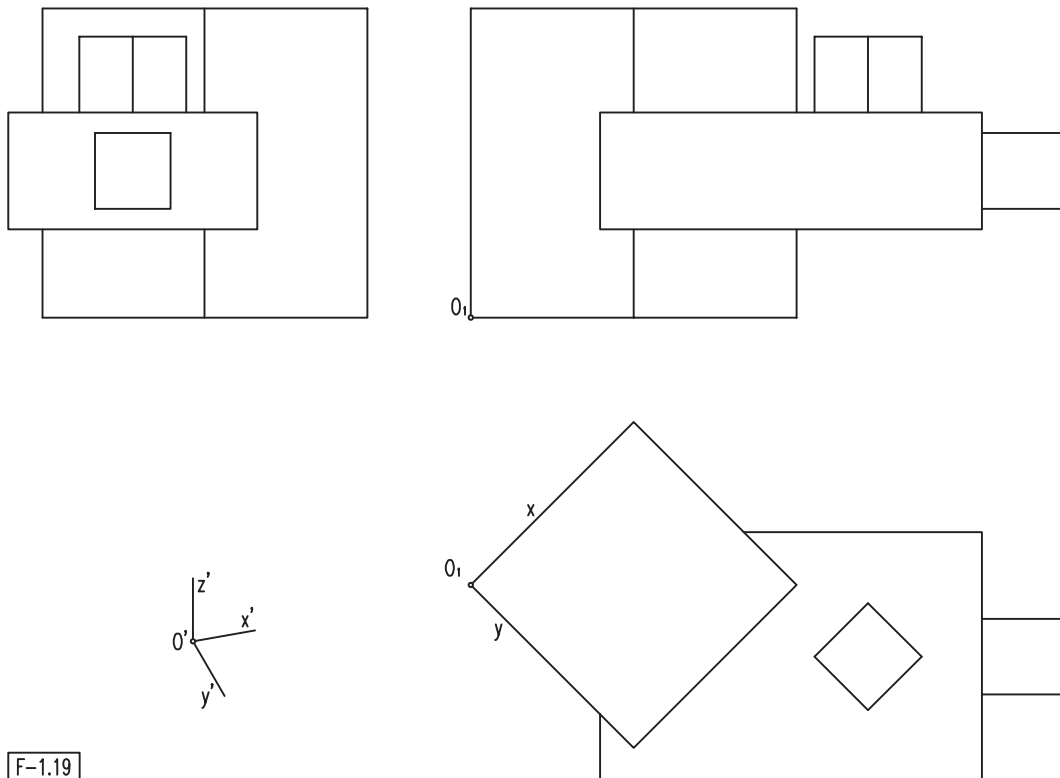


F-1.18

1.5.- Debuxo dun volume calquera nunha AXONOMETRÍA - F-1.19/22

Dadas as vistas da F-1.19.

Na F-1.19 temos o **ALZADO FRONTAL**, a **PLANTA SUPERIOR** e o **ALZADO LATERAL DEREITO** dunha peza. Temos marcada a orixe **O** e os eixos **X** e **Y**, para saber como temos que colocar a peza na axonometría e temos tamén as proxeccións axonométricas dos eixos: **x'**, **y'** e **z'**. Imos supoñer que non temos que aplicar coeficientes de redución.

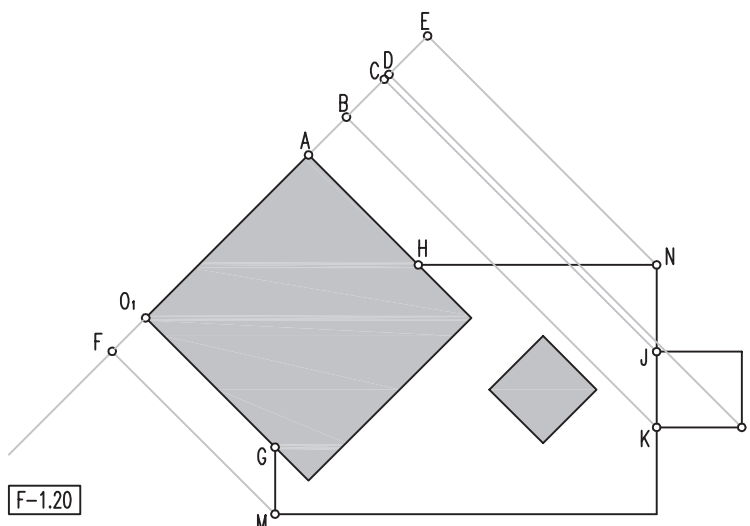


F-1.19

Soamente podemos tomar medidas reais nos eixos **x'**, **y'** e **z'** ou en rectas paralelas a eles.

Deberemos empezar por debuxar a planta da peza, que nos servirá de referencia para obter, a partir dela, o volume.

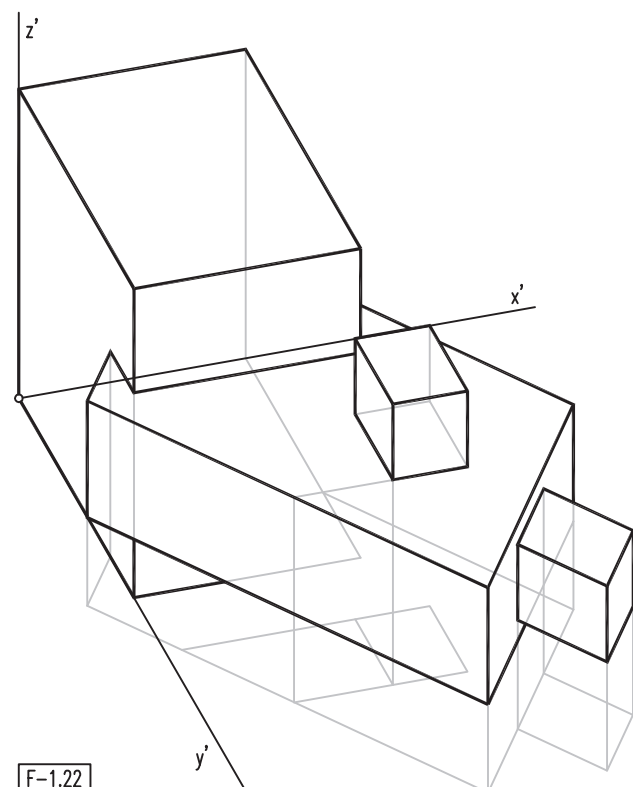
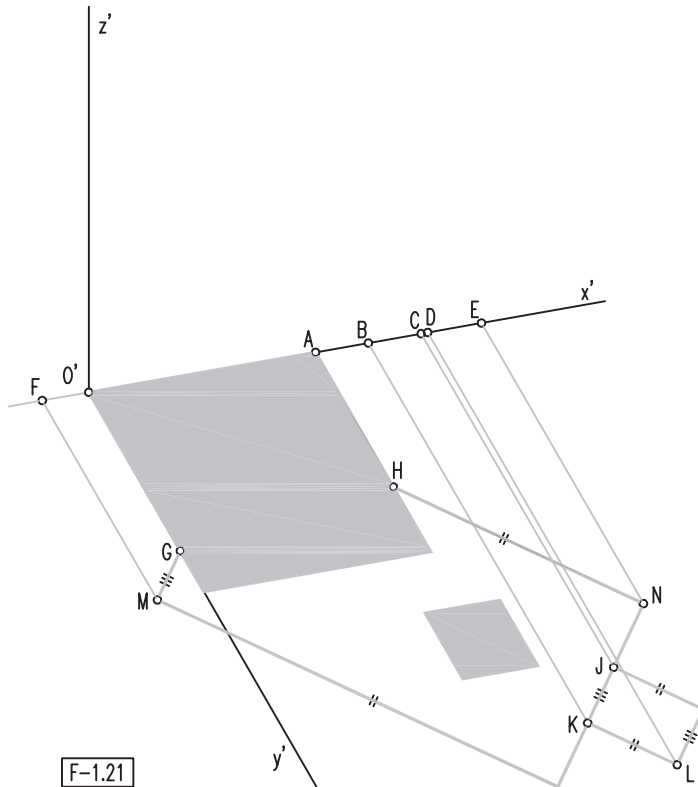
Como se pode ver na planta diédrica da peza (F-1.20) os dous cadrados remarcados os podemos debuxar coas súas medidas reais pois teñen os lados paralelos ós eixos **x'** e **y'**. Para debuxar o resto da planta o faremos por puntos, mediante medidas tomadas en liñas paralelas ós eixos **x'** e **y'** ou sobre eles.

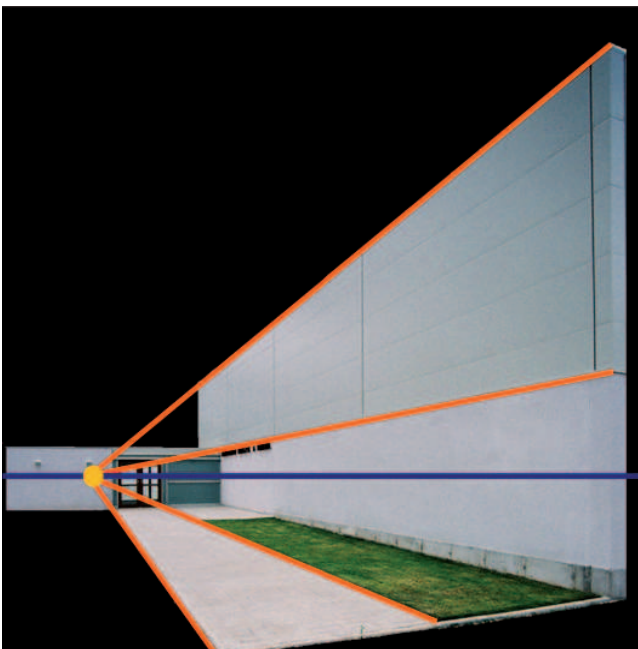
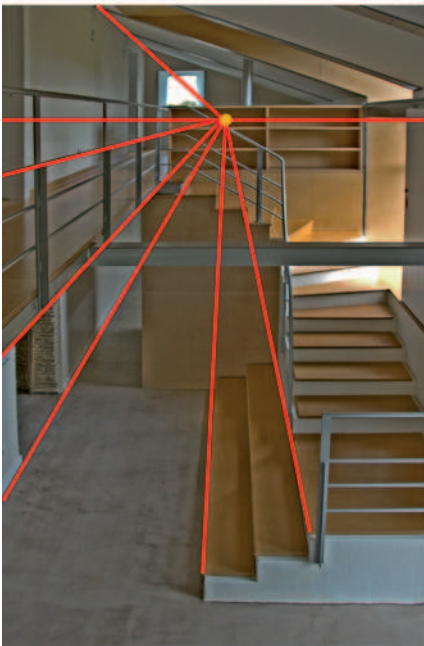


F-1.20

Os puntos **H** e **G** os levamos, collendo co compás, as medidas **AH** e **O₁G** directamente na planta. Os puntos **N**, **J**, **K**, **L** e **M** obtémolos trazando por eles rectas paralelas a **y'** e, collendo respectivamente co compás, as medidas correspondentes; deste xeito poderemos debuxar a planta na nosa axonometría como se ve na **F-1.21**.

A partir da planta levantamos liñas paralelas a **z'** e levamos, co compás, as alturas que podemos coller dos alzados. Como xa sabemos ler o volume a partir das vistas en diédrico non deberíamos ter problemas en debuxar o volume final, tal e como se ve na **F-1.22**.





1 - PERSPECTIVA CÓNICA OU LIÑAL

SISTEMA CÓNICO

1.0.- Conceptos - F-1.1/12

O sistema CÓNICO de representación, como xa dixemos en **DEBUXO TÉCNICO I** – páx. 57:

“... Non permite representar o obxecto de xeito que podamos ter as súas medidas reais pero a representación del é igual (ou case que igual) a como nos o vemos na realidade.”

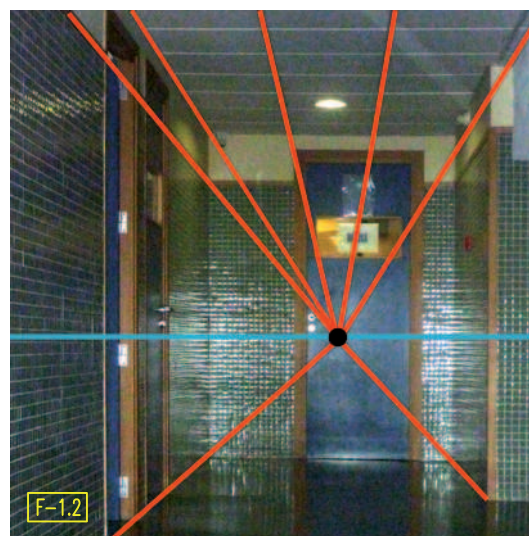
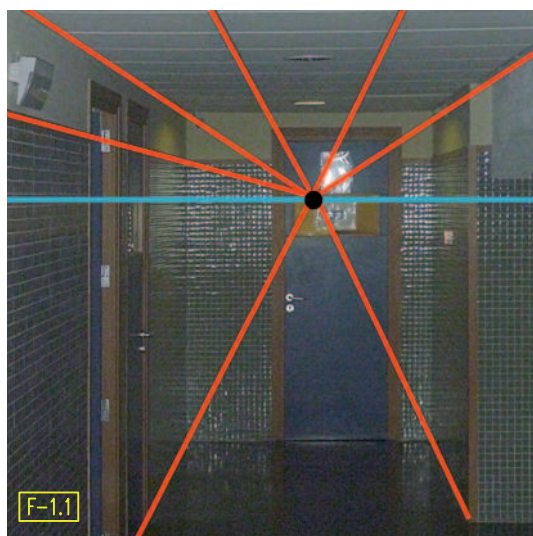
A finalidade dunha representación cónica é a de ver a aparencia do obxecto, representalo tal e como o veríamos nós na realidade. Debemos empezar por decatarnos de cómo vemos o mundo e descubrir a xeometría inherente á nosa visión.

Os edificios que vemos en calquera vila ou cidade, mesmo no interior da nosa casa, sabemos que están compostos por paredes verticais e teitos e chans horizontais. Se eu collo un metro e mido a altura do teito ao chan na miña vivenda ou na miña aula, poderei comprobar que é a mesma en calquera punto dela (supoñendo que o chan e o teito sexan horizontais) porén eu non as vexo iguais en calquera punto.

Se eu me poño nun extremo dun corredor poderei comprobar que, no fondo del, a altura entre o chan e o teito a vexo menor que a carón de min (e como puiden comprobar cando medín, a altura é a mesma). As liñas de intersección entre os planos das paredes e o teito ou o chan e calquera outras paralelas a elas, eu sei que son paralelas entre si, pero non as vexo paralelas senón concorrentes (tenden a unirse nun punto).

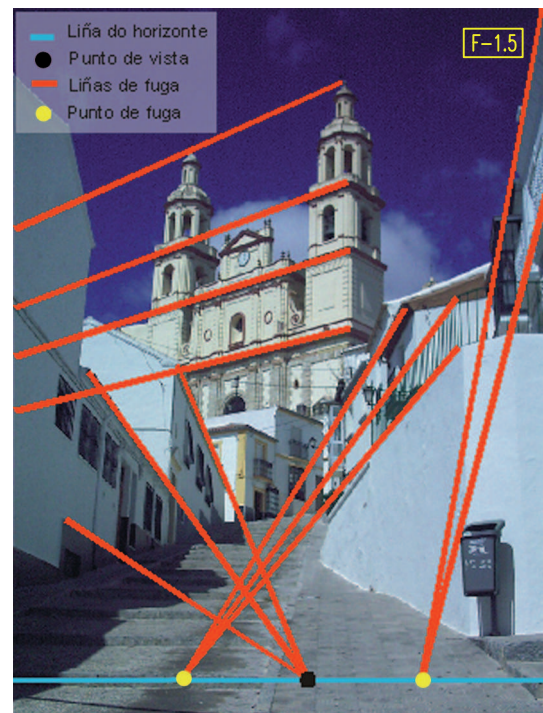
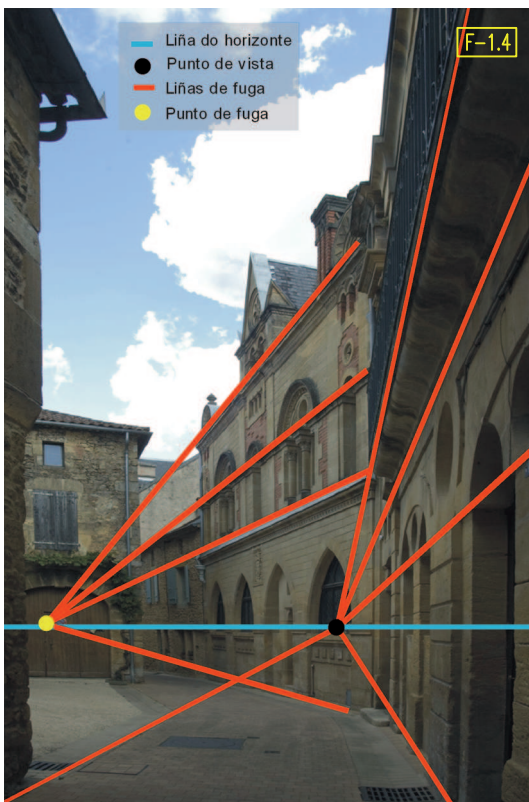
Cando eu estou a mirar (**F-1.1**) de xeito que o meu raio visual sexa paralelo a unha serie de liñas horizontais, podo comprobar que o punto no que concorren as liñas horizontais é o punto ao que eu estou mirando; a este punto o chamarei **punto de vista (PV)** e este punto está sempre nunha hipotética liña horizontal (perpendicular ao meu raio visual) situada á altura dos meus ollos, á que chamarei **liña do horizonte (LH)**.

Se eu me agacho, sen moverme do sitio no que estou (**F-1.2**), podo comprobar que o **PV** e a **LH** baixan á altura dos meus ollos e as liñas paralelas ao meu raio visual concorren, de novo, no **PV**; isto quere dicir que, na realidade, as liñas paralelas non as vexo paralelas senón que “foxen” a un punto que chamamos xenericamente “**punto de fuga**” (**PF**), agás cando coincide co punto onde miramos nos na liña do horizonte; neste caso o chamamos “**punto de vista**” (**PV**).



Cando estou en calquera rúa dunha vila pásame o mesmo. Na **F-1.3** podo ver o **PV** e un **PF** na **LH**. O **PV** é o da esquerda porque é o punto onde eu (co meu raio visual paralelo á rúa na que estou) miro. O punto amarelo da dereita é o punto de fuga onde conflúen as liñas horizontais da casa do fondo cuxa fachada non segue a aliñación da rúa pola que vamos. Podemos ver algo similar na **F-1.4**.

Sempre temos un só punto de vista (**PV**) pero podemos ter moitos puntos de fuga (**PF**). Na **F-1.5** temos a **LH** moi abaixo pois se trata dunha rúa moi empinada. Aparte do **PV** temos outros dous **PF** e habería, ademais, outro **PF** á esquerda e fora da foto, que sería onde fuxirían as liñas mestras da igrexa.



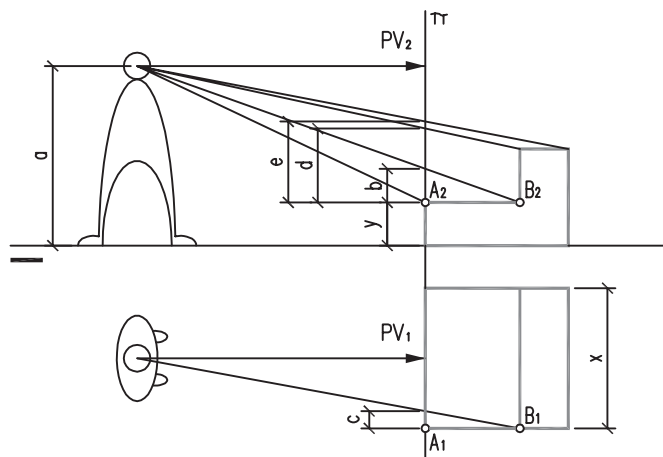
1.1.- Trazado da perspectiva cónica - F-1.6/7

Facer unha perspectiva cónica é coma se debuxáramos, sen movernos, nun vidro vertical que está diante de nos. Podemos facer a proba do seguinte xeito: Poñémonos diante dunha fiestra e, sen movernos, debuxamos no vidro cun rotulador o que vemos a través del. O resultado será unha perspectiva cónica da rúa ou o que sexa que vexamos dende a nosa ventá.

Fagamos isto mesmo por procedementos xeométricos.

Dada a **peza** (en planta e alzado na súa representación diédrica) **en forma de "L"** da **F-1.6**.

Nós estamos de pe diante do obxecto. O debuxo o faremos nun plano vertical π (equivalente ó vidro do que falabamos antes). Para facer o trazo, unirei cada un dos vértices ou esquinas da peza dada (en planta e alzado) co punto onde están os meus ollos; onde ese raio visual corte ao plano π será onde eu o vexa no meu debuxo. Para facer a perspectiva cónica do que vexo non teño máis que levar os puntos (dadas as súas coordenadas en diédrico) ó meu debuxo.



F-1.6

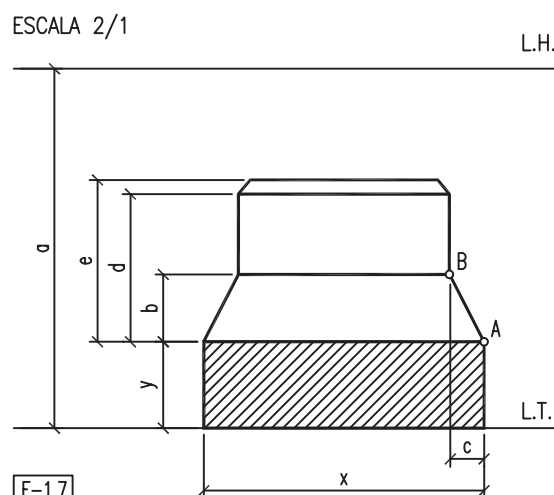
Na **F-1.7** podemos ver a nosa perspectiva cónica da peza da **F-1.6** vista dende onde estamos nós. O que vemos na **F-1.7** é o que veríamos no plano π .

Temos dúas liñas horizontais, a **LH** e a **LT** (liña de terra). A distancia **a** que hai entre elas é a altura dos nosos ollos con respecto ó chan. O rectángulo raiado é a parte da peza que está en contacto co plano π , por iso o teremos en verdadeira magnitude e levamos as medidas **x** e **y**.

Debemos ter moi en conta que eu soamente podo levar mediadas en verdadeira magnitude sobre o plano π de debuxo, as profundidades ou os puntos que están por detrás de π debo obtelos por procedementos xeométricos.

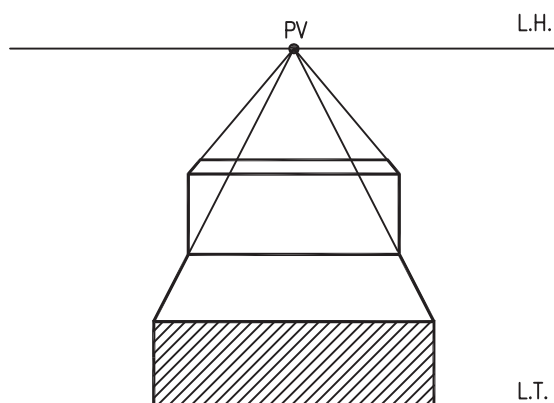
O punto **A** está no plano π e o podo situar coas súas medidas, que obteño da planta e do alzado (**A1-A2**). O punto **B** non está no plano π e, para situalo no meu debuxo, trazo (ver **F-1.6**) un raio visual e mido as coordenadas (en planta e alzado) **c** e **b** da súa intersección co plano de debuxo π . Estas medidas as levo na miña perspectiva (ver **F-1.7**) e terei a liña **AB** tal e como eu a vexo na miña perspectiva cónica. Do mesmo xeito podo obter tódolos demais puntos.

Con este mecanismo tan sinxelo poderíamos facer calquera perspectiva cónica **pero teríamos moitos problemas de exactitude no debuxo final da perspectiva**.



F-1.7

Podemos comprobar, se fixemos o debuxo con total precisión, (ver **F-1.8**) que as liñas horizontais paralelas ao meu raio visual "foxen" ou conflúen no punto **PV** que é onde o raio coincide co plano π e que está situado na liña do horizonte **LH**; tendo isto en conta podemos atopar outros procedementos máis axeitados e xeometricamente máis exactos que o anterior.



F-1.8

1.2.- Perspectiva cónica cun punto de fuga- F-1.9/10

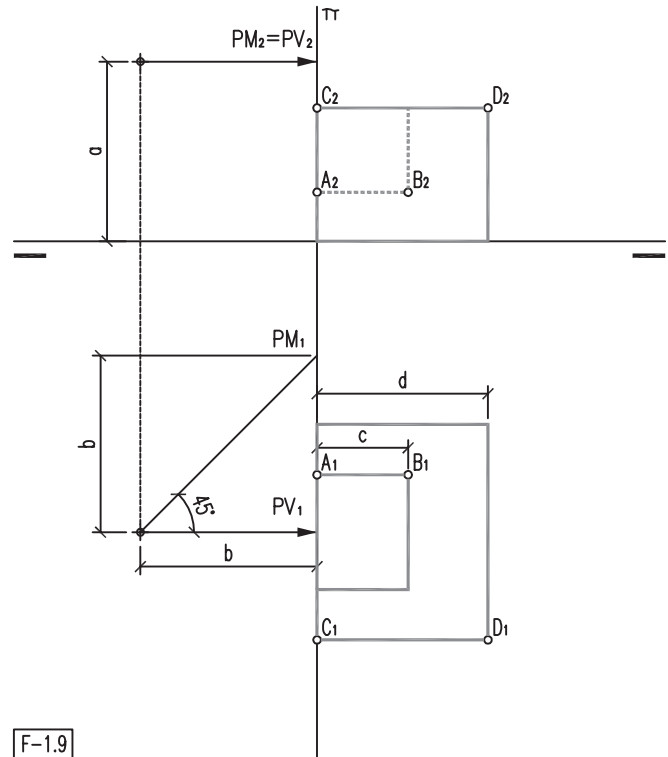
Dada a **peza** (en planta e alzado na súa representación diédrica) da **F-1.9**.

Nós estamos de xeito que os nosos ollos están a unha distancia **a** do chan e a unha distancia **b** do plano de debuxo π .

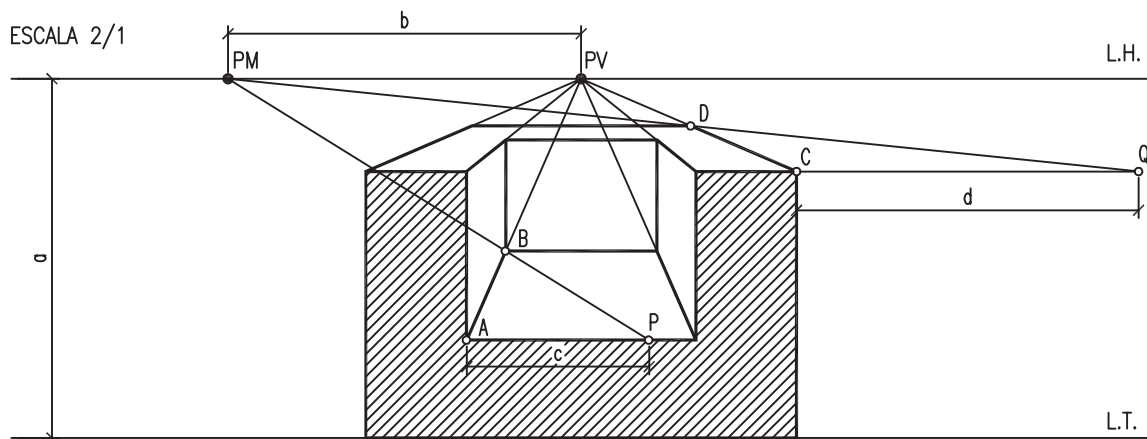
Na **F-1.10** (a nosa perspectiva cónica) imos representar o que estamos a ver no esquema da **F-1.9**. Situamos a **LH** e, a unha distancia **a** dela, situamos a liña de terra **LT**. Situamos na **LH** o punto de vista **PV** que, como xa quedou dito, é o punto onde o meu raio visual principal se atopa co plano π .

Debuxo (a zona raiada no debuxo da **F-1.10**) a parte da peza que está en verdadeira magnitude por estar en contacto co plano π . Collo as súas medidas directamente das vistas en diédrico da **F-1.9** e, dende as esquinas, trazo as liñas horizontais paralelas ao meu raio visual principal e que, como vimos no apartado anterior, foxen ao punto de vista **PV**.

Aquí aparece o meu problema: Obter as profundidades desas liñas que non se atopan no plano π .



F-1.9



F-1.10

Fagamos unha pequena reflexión:

Como puiden comprobar no funcionamento da perspectiva, calquera feixe de liñas paralelas foxe ou conflúe no punto onde un raio visual meu, paralelo a elas, se atopa co plano π . Tendo isto en conta, eu podo axudarme dun punto de fuga novo que me dea, por intersección, a profundidade das liñas que foxen ao **PV**. A ese punto o chamarei punto de medición ou **PM**.

Na **F-1.9** trazo (en planta e alzado) un raio visual dende os meus ollos que forme **45°** co principal. En este caso trazo o raio cara a esquerda, podería facelo cara a dereita e tería o mesmo efecto. Onde o novo raio visual se atopa co plano π terei o punto de medición **PM** (**PM1** en planta e **PM2** en alzado). Tódalas liñas paralelas a este raio visual foxen ao **PM**.

Na **F-1.10** levo a medida **b** cara a esquerda de **PV** e terei **PM** na liña do horizonte.

Para obter o punto **B** (despois de unir o punto **A** con **PV**), levo cara a dereita de **A** a medida **c** obtendo o punto **P**. Unindo **P** con **PM**, onde me corte á liña **A-PV** terei o punto **B** que estaba a buscar; deste xeito podo obter calquera punto que non está no plano π por medio da intersección de dúas liñas que parten de π onde si que podo tomar mediadas en verdadeira magnitude.

Repetimos o proceso anterior para obter calquera outro punto, por exemplo o **D**: Uno **C** con **PV**. Tomo co compás a medida **d** da **F-1.9** e a levo á dereita de **C** na **F-1.10** e obteño o punto **Q**. Uno **Q** con **PM** e, onde corte á liña **C-PV** terei o punto **D** buscado.

Repetimos o procedemento cos puntos restantes e rematamos a nosa perspectiva cónica. Debemos ter especial coidado en medir, sempre, no plano π de debuxo, tanto as profundidades como as alturas.

1.3.- Perspectiva cónica con varios puntos de fuga - F-1.11/12

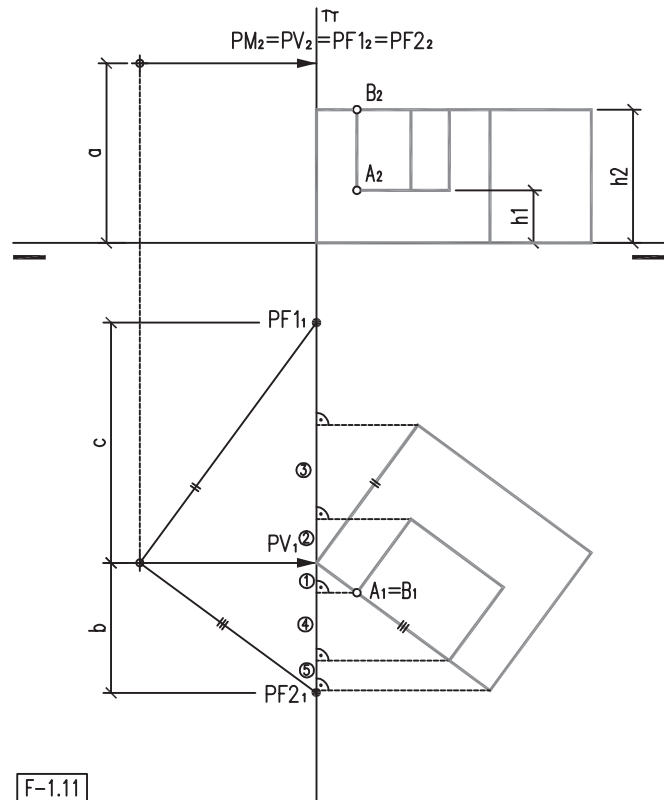
Dada a **peza** (en planta e alzado na súa representación diédrica) da **F-1.11**.

Neste caso temos situada a peza dada de xeito que soamente ten unha aresta coincidente co noso plano π de debuxo.

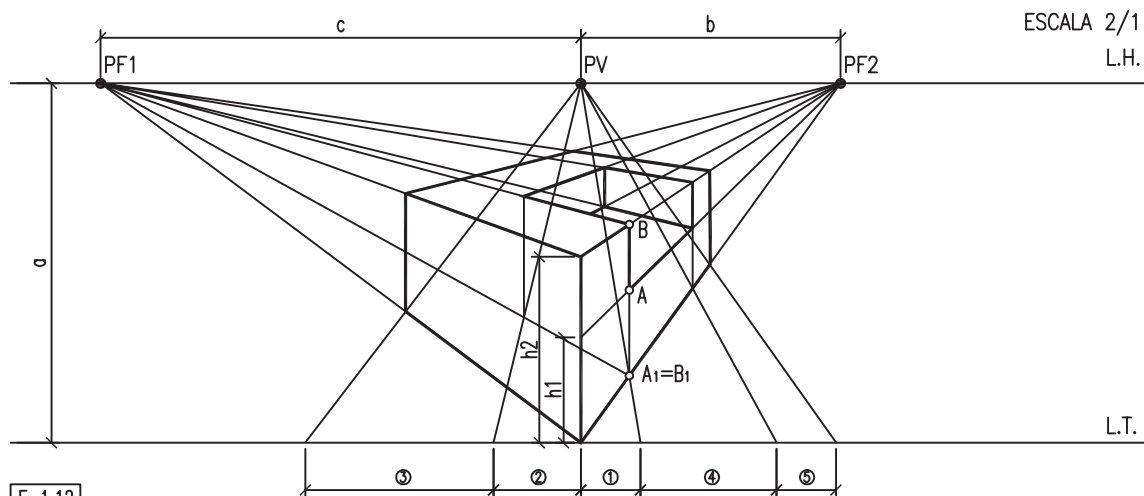
Debemos obter os puntos de fuga correspondentes ás liñas principais da peza e, para obtelos, trazamos cadanseu raio visual horizontal paralelo a elas. Obtemos **PF1** e **PF2** (**puntos de fuga 1 e 2**) que estarán situados na **LH**.

Na **F-1.12** (a nosa perspectiva cónica) situamos a **LH** e a **LT** separadas pola distancia correspondente **a**. Situamos o **PV** na **LH** e, ademais, situamos o **PF1** e o **PF2** a unha distancia **c** e **b** respectivamente del.

Situamos, en verdadeira magnitude, a aresta de altura **h2** que é a única da peza en contacto co plano π . A partir de aquí faremos a perspectiva cónica da peza.



F-1.11



F-1.12

Levamos as fugas a **PF1** e **PF2** dende a aresta do plano π . Para obter as profundidades delas usamos o **PV** como se fose un punto de medición:

Na **F-1.11**, baixamos dende **A1=B1** unha perpendicular a π e medimos a distancia **(1)** ate **PV1**. Na perspectiva cónica da **F-1.12** levamos esa medida na **LT** e a unimos co **PV**; onde esta liña corte á trazada previamente ate **PF2** teremos situada a profundidade dos puntos **A** e **B** (soamente a profundidade, ou sexa teremos situados **A1** e **B1** no plano horizontal pero faltarán poñer as súas alturas).

Coas alturas pasa o mesmo que coas profundidades. Soamente as podemos medir en verdadeira magnitude no plano π de debuxo.

Medimos **h1** e **h2** (esta xa a tiñamos) no plano π e as unimos con **PF2**. Levantando unha vertical dende **A1=B1** teremos os puntos **A** e **B** onde se corten coas dúas liñas anteriores.

Facendo isto mesmo con todos os demais puntos remataremos a perspectiva cónica da peza dada.

Sempre debemos usar as fugas para obter novos puntos a partir dos que xa temos. Un exceso de medidas non redunda nunha maior exactitude senón no contrario.

