MÉTODO DE GAUSS

Método de Gauss.

El método de Gauss es otro de los métodos que se utiliza para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Consiste en sustituir el sistema por otro equivalente, llegando, después de sucesivas transformaciones, a un sistema escalonado, es decir, que tiene nulos todos los coeficientes debajo de la diagonal del sistema.

Para conseguir esta transformación, podemos realizar tres operaciones fundamentales:

1ª Intercambio de ecuaciones (el primer coeficiente de la 1ª ecuación ha de ser distinto de cero y, a ser posible, que valga 1.
2ª Multiplicación de una ecuación por un número distinto de cero.
3º Sumar a una ecuación otra multiplicada por un número.

Para iniciar el proceso, se empieza por colocar todos los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes en una tabla, formando la matriz asociada al sistema de ecuaciones. Una vez conseguida una matriz escalonada, se vuelve otra vez a expresar en forma de sistema.

Discusión del método.

Aplicado el método de Gauss, en el sistema escalonado resultante puede ocurrir:

1º Que haya alguna ecuación de la forma 0 = c; c≠0. $\Rightarrow$ Sistema incompatible.

2º Que el nº de ecuaciones sea igual al número de incógnitas. $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado.

3º Que el nº de ecuaciones sea menor que el nº de incógnitas. $\Rightarrow$ Sist. compatible indeterminado.

Ejemplos

I.- Consideremos el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\left.\begin{aligned} x-y-2z&=-1\\ 2x-3y+4z&=4\\ 5x-y+3z&=16\end{aligned}\right\}$$

Escribiendo la matriz asociada y realizando transformaciones resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1\\ 2 & -3 & 4 & 4\\ 5 & -1 & 3 & 16\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1\\ 0 & -1 & 8 & 6\\ 0 & 4 & 13 & 21\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1\\ 0 & -1 & 8 & 6\\ 0 & 0 & 45 & 45\end{pmatrix}$$

Se ha obtenido un sistema escalonado, que es:

$$\left.\begin{aligned} x-y-2z&=-1\\ -y+8z&=6\\ 45z&=45\end{aligned}\right\}$$

La 3ª ecuación es 45z = 45 y de ella resulta z = 1
La 2ª ecuación es – y + 8z = 6 por lo que – y +8.1 = 6, es decir, y =2
Finalmente la 1ª ecuación es x – y – 2z = -1 y teniendo en cuenta los valores de ***y*** y de ***z*** obtenidos sale x = 3.

II.- Sea el sistema siguiente:

$$\left.\begin{aligned} x-2y+z&=3\\ -x+y-2z&=1\\ 2x-3y+z&=2 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3\\ -1 & 1 & -2 & 1\\ 2 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3\\ 0 & -1 & -1 & 4\\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3\\ 0 & -1 & -1 & 4\\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Procediendo como en el caso anterior resulta z = 0;   y = -4 ; x = -5.

III.- Veamos ahora el caso de un sistema incompatible:

$$\left.\begin{aligned} 2x-y+3z&=6\\ 4x-2y+6z&=9\\ x-y+z&=3 \end{aligned}\right\}$$

A fin de tener un 1 en la parte superior izquierda de la matriz podemos intercambiar ecuaciones y resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 3 & 6\\ 4 & -2 & 6 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

De la 3ª fila de la matriz resulta 0z = -3, es decir, 0 = -3 lo que es absurdo. Por tanto, el sistema no tiene solución.

IV.- Veamos finalmente un sistema con infinitas soluciones:

$$\left.\begin{aligned} x-y+3z&=4\\ 2x-y-z&=6\\ 3x-2y+2z&=10 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4\\ 2 & -1 & -1 & 6\\ 3 & -2 & 2 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4\\ 0 & 1 & -7 & -2\\ 0 & 1 & -7 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4\\ 0 & 1 & -7 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como el número de ecuaciones del sistema equivalente obtenido es menor que el número de incógnitas, se trata de un sistema compatible indeterminado.

Para resolverlo escribimos la 2ª ecuación: y – 72z = -2 , es decir, y = -2 + 7z (valor de y).

Sustituyendo dicho valor en la 1ª ecuación: x – (-2 +7z) +3z = 4, es decir, x = 2 + 4z.

Haciendo z = λ, las soluciones del sistema son:

$$\begin{aligned} x&=2+4\lambda\\ y&=-2+7\lambda\\ z&=\lambda; \quad \lambda\in \mathrm{R} \end{aligned}$$