SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1. Definiciones. Tipos de sistemas de ecuaciones.

Definición: Llamaremos ecuación lineal a cualquier ecuación polinómica de grado 1 con una o varias incógnitas.

Ejemplos:

3x = 5 3x + 2y = 7 2x - 4y + 6z = -2

Definición: Diremos que dos ecuaciones lineales son equivalentes cuando tienen las mismas soluciones.

Ejemplos:

x = 5 es equivalente a 2x -1 = x +4

3x + 2y = 7 es equivalente a 5x +y -1 = 2x –y +6

Definición: Llamaremos sistema de m ecuaciones con n incógnitas, a un conjunto de ecuaciones de la forma:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots.. + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots\dots.. + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \quad (S)$$

Los elementos $a_{ij} \in \Re$ son los coeficientes del sistema.
Los elementos x_i son las incógnitas del sistema.
Los elementos b_j serán los términos independientes.

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 3 \\ 2x + y = 4 \end{array}\right\}$$ es un sistema lineal de dos ecuaciones y dos incógnitas

Atendiendo al número de soluciones, podemos clasificar los sistemas de la siguiente forma:

Si el sistema no tiene solución diremos que es incompatible.
Si el sistema tiene solución diremos que es compatible.

Si el sistema tiene una única solución diremos que compatible y determinado.
Si tiene infinitas soluciones diremos que es compatible e indeterminado.

$$\text{Clasificación de los S.E.L.}\begin{cases} \text{Incompatibles (sin solución)} \\ \text{Compatibles}\begin{cases}\text{Determinados (una solución)} \\ \text{Indeterminados (infinitas soluciones)}\end{cases}\end{cases}$$

Definición: Llamamos sistemas homogéneos a los que tienen todos los términos independientes nulos.

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} x-2y+z=0 \\ -x+y-2z=0 \\ 2x-3y+z=0 \end{array}\right\}$$

Estos sistemas siempre admiten la solución (0, 0, 0,......,0) que recibe el nombre de solución trivial, por tanto, los sistemas homogéneos son siempre compatibles.

2. Sistemas de ecuaciones equivalentes.

Definición: Dos sistemas de ecuaciones lineales diremos que son equivalentes cuando tienen el mismo conjunto de soluciones.

Ejemplo:

Los sistemas $\left.\begin{array}{l} 2x+y-z=0 \\ x+3y+2z=5 \\ x-y+4z=9 \end{array}\right\}$ y $\left.\begin{array}{l} 2x+y-z=0 \\ 5y+2z=4 \\ z=2 \end{array}\right\}$

son equivalentes ya que tienen las mismas soluciones (x=1, y=0, z=2)

Es importante saber que todo sistema se puede transformar en otro equivalente realizando una serie de transformaciones.

Transformaciones que podemos hacer en un sistema de ecuaciones para obtener otro equivalente:

1. Intercambiar dos ecuaciones entre sí.
2. Multiplicar una ecuación por un número real distinto de cero.
3. Sustituir una ecuación por la que resulta de sumarle una combinación lineal de las restantes.
4. Eliminar cualquier ecuación que se encuentre repetida.
5. Eliminar una ecuación del tipo: $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 0$.
6. Eliminar una ecuación que sea combinación lineal de las restantes.

3. Expresión matricial de un sistema.

Vamos a ver que todo sistema se puede expresar en términos de matrices. Es lo que se conoce como **expresión matricial** de un sistema.

Sea un sistema de m ecuaciones con n incógnitas cualquiera:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

Podemos considerar entonces las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

La matriz A recibe el nombre de matriz de coeficientes, la matriz X es la matriz de incógnitas y la matriz B es la matriz de los términos independientes.

En tal caso nuestro sistema se podrá expresar como: $A \cdot X = B$.

Por tanto, resolver el sistema equivale a hallar la matriz X anterior, que será $\mathbf{X = A^{-1} \cdot B}$

4. Sistemas de Cramer. Regla de Cramer.

Definición: Diremos que un sistema de ecuaciones lineales es de **Cramer** si tiene igual número de ecuaciones que de incógnitas y el determinante de la matriz de coeficientes no es nulo. Es decir, la matriz A es cuadrada y $|A| \neq 0$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots\dots\dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\} \quad \text{con} \quad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots\dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

Ejemplos:

$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = 3 \\ x + y = 2 \end{cases}$ **NO** es un sistema de Cramer porque $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ no es cuadrada

$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ x + y = 4 \\ 3x + 3y - 2z = 7 \end{cases}$ **NO** es un sistema de Cramer porque aunque A es cuadrada, $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{cases} 2x - 3y + z = 8 \\ 3x + y - 2z = 3 \\ 4x - 6y - 7z = 7 \end{cases}$ **SI** es un sistema de Cramer porque A es cuadrada y $A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & -6 & -7 \end{vmatrix} \neq 0$

Teorema(Regla de Cramer):

Todo sistema de Cramer es compatible y determinado. Además, la solución viene dada por:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots\dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots\dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots\dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots\dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} \quad x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots & b_1 \\ \dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots\dots & b_n \end{vmatrix}}{|A|}$$

Ejemplo:

Vamos a resolver el siguiente sistema por la Regla de Cramer.

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y-z=0 \\ x+3y+2z=5 \\ x-y+4z=9 \end{array}\right\}$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad |A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}=24+2+1+3-4+4=30\neq 0$$

Al ser A cuadrada y $|A|\neq 0$ podemos garantizar que el sistema es de Cramer y por tanto compatible determinado.

La solución será:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 9 & -1 & 4 \end{vmatrix}}{30}=\frac{18+5+27-20}{30}=\frac{30}{30}=1 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 4 \end{vmatrix}}{30}=\frac{40-9+5-36}{30}=\frac{0}{30}=0$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 9 \end{vmatrix}}{30}=\frac{54+5-9+10}{30}=\frac{60}{30}=2$$

Por tanto, la solución será: $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=2 \end{cases}$

Ejemplo:

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{l} x+y-z=2 \\ x+3y+2z=4 \\ x-y+4z=0 \end{array}\right\}$$

Calculamos el det (*A*):

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}=12+2+1+3+2-4=16$$

Y aplicando la regla de Cramer, la solución será:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ 4 & 3 & 2\\ 0 & -1 & 4\end{vmatrix}}{16}=\frac{24+4-16+4}{16}=\frac{16}{16}=1 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 4 & 2\\ 1 & 0 & 4\end{vmatrix}}{16}=\frac{16+4+4-8}{16}=\frac{16}{16}=1$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 4\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}}{16}=\frac{4-2-6+4}{16}=\frac{0}{16}=0$$

Por tanto, la solución será: $\begin{cases}x=1\\ y=1\\ z=0\end{cases}$

5. Método de Gauss.

El método de Gauss es otro de los métodos que se utiliza para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Consiste en sustituir el sistema por otro equivalente, llegando, después de sucesivas transformaciones, a un sistema escalonado, es decir, que tiene nulos todos los coeficientes debajo de la diagonal del sistema.

Para conseguir esta transformación, podemos realizar tres operaciones fundamentales:

1ª Intercambio de ecuaciones (el primer coeficiente de la 1ª ecuación ha de ser distinto de cero y, a ser posible, que valga 1)
2ª Multiplicación de una ecuación por un número distinto de cero.
3º Sumar a una ecuación otra multiplicada por un número.

Para iniciar el proceso, se empieza por colocar todos los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes en una tabla, formando la matriz asociada al sistema de ecuaciones. Una vez conseguida una matriz escalonada, se vuelve otra vez a expresar en forma de sistema.

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r}x-y-2z=-1\\ 2x-3y+4z=4\\ 5x-y+3z=16\end{array}\right\}$$

Escribiendo la matriz asociada y realizando transformaciones resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & 4 \\ 5 & -1 & 3 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 8 & 6 \\ 0 & 4 & 13 & 21 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 45 & 45 \end{pmatrix}$$

Se ha obtenido un sistema escalonado, que es:

$$\left.\begin{array}{r} x - y - 2z = -1 \\ -y + 8z = 6 \\ 45z = 45 \end{array}\right\}$$

La 3ª ecuación es 45z = 45 ➔ z = 1

La 2ª ecuación es – y + 8z = 6 ➔ y =2

Finalmente, la 1ª ecuación es x – y – 2z = -1 ➔ x = 3.

Ejercicios propuestos.

1.- Clasifica los siguientes sistemas:

$a)$ $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = 3 \\ x + y = 2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$

2.- Resuelve por el método de reducción:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 8 \\ 3x + y - 2z = 3 \\ 4x - 6y - 7z = 7 \end{cases}$$

Sol. x = 2; y = -1; z=1.

3.- Aplica el método de Gauss y resuelve los siguientes sistemas lineales:

a) $\begin{cases} x + y - z = 3 \\ x + y = 4 \\ 3x + 3y - 2z = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 5y + 3z = 2 \\ 7x + 4y + 5z = 3 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$

Sol: a) Sistema incompatible; b) x = ¼ y = 0 z = ¼