DETERMINANTES

1. Determinante de una matriz cuadrada de orden 2 y de orden 3.
2. Propiedades generales de los determinantes.
3. Aplicaciones de los determinantes.

El determinante es un número que está asociado a toda matriz cuadrada. (No existe el determinante de una matriz que no sea cuadrada). Podríamos explicar aquí de donde procede dicho número hablando de permutaciones, del signo de una permutación, de sumatorios, … pero solamente nos vamos a interesar por cómo se calcula dicho número y qué aplicaciones tiene y no por la definición formal de determinante.

1. Determinante de una matriz cuadrada de orden 2 y de orden 3.

Determinante de una matriz de orden 2.

Sea una matriz cuadrada de orden 2: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ Se llama determinante de la matriz A al número real obtenido de la siguiente forma:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

es decir, la diferencia entre los productos cruzados de sus elementos. El valor obtenido se denota también por det(A).

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 1 \cdot (-2) = 14$

Determinante de una matriz de orden 3

Sea una matriz cuadrada de orden 3: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Se llama determinante de la matriz *A* al número real obtenido de la siguiente forma:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{31}.a_{22}.a_{13} - a_{23}.a_{32}.a_{11} - a_{33}.a_{21}.a_{12}$$

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & 8 & 10 \end{vmatrix} = 1\cdot 5\cdot 10 + (-2)\cdot 6\cdot(-7) + 3\cdot 4\cdot 8 - 3\cdot 5\cdot(-7) - 6\cdot 8\cdot 1 - 10\cdot 4\cdot(-2) = 367$

Para recordar la definición de determinante de tercer orden, se utiliza la **regla de Sarrus**:

Positivos: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ Negativos: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

2. Propiedades generales de los determinantes.

1ª) El determinante de una matriz no varía si se cambian filas por columnas, es decir, el determinante de una matriz es igual al determinante de su matriz traspuesta.

$$\mathrm{Det}(A) = \mathrm{Det}(A^t)$$

2ª) Si una matriz tiene una fila nula, su determinante es 0.

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

3ª) El determinante de una matriz diagonal es igual al producto de los elementos de la diagonal principal:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$$

4ª) Si se intercambian entre si dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo

$$Det(A^1, A^2, A^3) = -Det(A^2, A^1, A^3)$$

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ como puede comprobarse.

5ª) Si un determinante tiene dos filas o dos columnas iguales su valor es cero.

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ como puede comprobarse.

6ª) Si se multiplica una fila o columna por un número el determinante queda multiplicado por dicho número.

$$Det(kA^1, A^2, A^3) = k.Det(A^1, A^2, A^3)$$

7ª) Si un determinante tiene dos filas o columnas proporcionales su valor es cero:

$$Det(A^1, kA^1, A^3) = k.Det(A^1, A^1, A^3) = 0$$

8ª) Si una fila o columna puede descomponerse en suma de otras dos, por ejemplo, $A^1 = B + C$, entonces

$$Det(B + C, A^2, A^3) = Det(B, A^2, A^3) + Det(C, A^2, A^3)$$

9ª) Si a una fila o columna se le suma una combinación lineal de las restantes, el valor del determinante no varía.

$$Det(A^1, A^2, A^3) = Det(A^1 + \alpha A^2 + \beta A^3, A^2, A^3)$$

10ª) Si una fila o columna es combinación lineal de las restantes, el valor del determinante es cero, y viceversa.

$$Det(A^1, A^2, \alpha A^1 + \beta A^2) = Det(A^1, A^2, \alpha A^1) + Det(A^1, A^2, \beta A^2) = 0 + 0 = 0$$

11ª) El determinante del producto de dos matrices es igual al producto de sus determinantes:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

3. Aplicaciones de los determinantes.

- Cálculo de la matriz inversa de una matriz cuadrada
- Cálculo del rango de una matriz cualquiera

Cálculo de la matriz inversa de una matriz cuadrada a través de determinantes.

Vamos a ver cómo podemos calcular la inversa de una matriz cuadrada ayudándonos de los determinantes. Pero previamente vamos a definir el concepto adjunto de un elemento de una matriz y de matriz adjunta.

Definición: Dada una matriz cuadrada de orden *n* y uno de sus elementos a_{ij}, se llama **Adjunto de a_{ij}** *y* se representa por A_{ij} al menor complementario precedido del signo + o – según que *i* + *j* sea par o impar. O también:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\alpha_{ij}$$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Entonces, el adjunto del elemento $a_{23}=3$ será $A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(-3) = 3$.

Y el adjunto del elemento $a_{22}=0$ será $A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4$.

Definición: Dada una matriz cuadrada A de orden n, llamamos **matriz adjunta de A**, y la representamos por **adj(A)** a la matriz formada por los adjuntos de la matriz A.

$$adj(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Los adjuntos de los nueve elementos de *A* son:

$A_{11} = +\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -17 \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 4 \quad A_{13} = +\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -11 \quad A_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 7 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$

$A_{31} = +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3$

Por tanto, la matriz adj(A) será: $adj(A) = \begin{pmatrix} -17 & 4 & 6 \\ -11 & 7 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

Matriz inversa

Si $|A| \neq 0$ ➔ $A \cdot \frac{(adjA)^t}{|A|} = I$ por tanto, $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|}(adjA)^t}$

Para calcular la matriz inversa se siguen los siguientes pasos:

1. Se halla el determinante de la matriz A. Si es cero no existe inversa.
2. Se hallan los adjuntos de la matriz dada, para obtener la matriz adj(A).
3. Se forma la matriz traspuesta de la matriz adjunta.
4. Se divide la matriz obtenida por el determinante de A.

Ejemplo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

1.- Hallamos su determinante.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -15 + 8 + 0 - 6 - 0 - 2 = -15 \neq 0.$$

Puesto que es distinto de 0, tiene inversa.

2.- Ahora calculamos la matriz adjunta. Hay que calcular los adjuntos de todos sus elementos. Sabemos, por haberlo hallado anteriormente, que dicha matriz es:

$$adjA = \begin{pmatrix} -17 & 4 & 6 \\ -11 & 7 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

3.- Calculamos su traspuesta:

$$(adjA)^t = \begin{pmatrix} -17 & -11 & 1 \\ 4 & 7 & -2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

4.- Por último, dividimos por el determinante de A:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}(adjA)^t=\frac{1}{-15}\begin{pmatrix}-17 & -11 & 1\\ 4 & 7 & -2\\ 6 & 3 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17/15 & 11/15 & -1/15\\ -4/15 & -7/15 & 2/15\\ -6/15 & -3/15 & 3/15\end{pmatrix}$$

<u>Cálculo del rango de una matriz mediante el uso de los determinantes.</u>

Recordemos la propiedad 10ª de los determinantes

"Si una fila o columna es combinación lineal de las restantes, el valor del determinante es cero, y viceversa".

- ⇨ Si las filas o columnas de una matriz cuadrada son linealmente dependientes su determinante es cero.

- ⇨ Si las filas o columnas de una matriz cuadrada son linealmente independientes su determinante es distinto de cero.

Por tanto ya sabemos si una matriz cuadrada de orden n tiene o no rango n: basta ver si su determinante es 0 o no lo es.

Aprovechando esto, vamos a dar otra definición de rango que nos permita hacer uso de los determinantes.

<u>Definición:</u> Dada una matriz A de orden $m\times n$, llamaremos **menor de orden r** al determinante de una <u>submatriz</u> cuadrada de orden r extraída de A (Nota: $0<r\leq m \quad y \quad 0<r\leq n$)

Ejemplo:

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -1\\ 6 & -1 & 10 & 0\\ 0 & 13 & -8 & 6\end{pmatrix}$

Un menor de orden 1 será cualquier número de la matriz: 1, 2, -1, …

Un menor de orden 2 sería $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 6 & -1\end{vmatrix}$. Hay muchos más menores de orden 2.

Un menor de orden 3, $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 6 & -1 & 10\\ 0 & -13 & -8\end{vmatrix}$

Definición: El rango de una matriz es el máximo orden de sus menores no nulos.

⇨ Una matriz tendrá al menos rango n siempre que exista un menor de orden n distinto de 0.

Ejemplo:

Sea la matriz *A* una matriz de orden tres. Hallar el rango (*A*).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & 6 & 5 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Como *A* es una matriz cuadrada de orden tres, como máximo el rango (*A*) puede valer 3.

Veamos si al menos tiene rango 2. Para ello será necesario encontrar un menor de orden 2 que sea distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0.$$

Ya que el resultado es cero, probaremos con todas las submatrices de *A* de orden 2 hasta encontrar una cuyo determinante no sea cero. Si no encontramos ninguna, el rango (*A*) = 1.

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - (-15) = 2 + 15 = 17 \neq 0.$$

Puesto que el resultado de calcular el determinante de esta submatriz de *A* no es nulo, podemos afirmar de momento que el rango (*A*) ≥ 2.

Ahora, orlamos el menor anterior añadiendo una columna y una fila más para ver si el rango puede ser tres:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 24 + 0 + 15 - 0 - 24 + 2 = 17 \neq 0.$$

Dado que el determinante de *A* no es nulo y a su vez es de orden tres,
el rango (*A*) = 3.

Ejemplo:

Calcular el rango de la matriz *B*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Está claro que su rango máximo es 3. Falta confirmar si verdaderamente lo es o tal vez es menor que 3.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0. \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 0 = -1 \neq 0.$$

Como hay una determinante de orden dos no nulo, el rango de la matriz *B* es mayor o igual que 2. Calculamos a continuación los determinantes de orden superior:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 - 4 + 2 + 4 + 4 - 2 = 0.$$

Probamos con un segundo determinante de orden tres:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -12 + 2 + 0 + 0 + 12 + 1 = 3 \neq 0.$$

Así pues, como hay un determinante de orden tres que no es nulo, el rango (*B*) = 3.