

1 - LEI DO AZAR. EXPERIMENTOS ALEATORIOS

Un experimento chámase **aleatorio** cando non se pode predicir o resultado. Hai unha serie de características que caracterizan este tipo de experimentos:

- Nas mesmas condicións iniciais, poden dar lugar a diferentes resultados finais.
- Todos os resultados posibles coñécense por adiantado.
- En xeral, o experimento pode repetirse nas mesmas condicións indefinidamente.

Se realizamos un experimento, pero podemos predicir o resultado, chámase **experimento determinista**.

Exemplos:

- Experimentos deterministas: Pescudar a hipotenusa dun triángulo rectángulo, coñecidos os catetos.
- Experimento aleatorio: Resultado de lanzar unha moeda ou un dado, pescudar o resultado dun partido de baloncesto, antes de que se xogue.

1.1.- Espazo mostral

Dado un experimento aleatorio, chámase **espazo mostral** e desígnase por E , ao conxunto de todos os resultados posibles distintos de devandito experimento aleatorio. Aos elementos que forman o espazo mostral E , coñéceselles como **sucesos elementais**.

Exemplos:

- Lanzar unha moeda ao aire $E = \{+, c\}$, sendo $+$ o suceso elemental “sacar cruz” e o suceso elemental “sacar cara”
- Lanzar un dado ao aire $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Pescudar o resultado dun partido de baloncesto $E = \{\text{gaña, perde, empata}\}$

1.2.- Sucesos. Tipos de sucesos

Un suceso é calquera subconxunto do **espazo mostral**. Temos dous tipos de sucesos:

- **Elementais**: Cada un dos posibles resultados do espazo mostral.
- **Compostos**: Formado por dous ou máis sucesos elementais.

Exemplo: se tiramos un dado ao aire o espazo mostral é $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- Os sucesos elementais serían: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$ e $\{6\}$
- Os sucesos compostos podían ser:
 - Obter un número par $\{2, 4, 6\}$
 - Obter un número impar $\{1, 3, 5\}$
 - Obter un número maior que 3 $\{4, 5, 6\}$

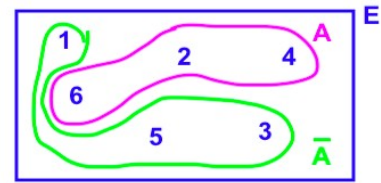
Temos dous **sucesos impropios** do noso espazo mostral:

- Suceso **imposible** ($\emptyset$) $\rightarrow$ Non posúe ningún suceso elemental, polo que non ocorre nunca.
- Suceso **seguro** (E) $\rightarrow$ Cúmrese sempre.

1.3.- Operacións con sucesos

Os sucesos poden operarse obtendo outros sucesos novos. Se A e B son sucesos do espazo mostral E , entón as operacións mais habituais entre sucesos son:

- **Suceso contrario** de A , que se denota por $\bar{A}$ é o que se cumpre cando non se cumpre A .
 $\bar{A}$ está formado por todos os sucesos elementais de E que non están en A .



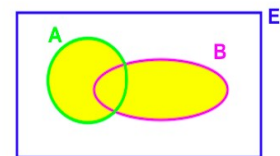
Exemplo: Se o suceso A = “sacar número par”, o suceso contrario será $\bar{A}$ “sacar número impar”:

$$A = \{2, 4, 6\} \quad \text{e} \quad \bar{A} = \{1, 3, 5\}.$$

Para representar sucesos son de moita utilidade os diagramas de Venn.

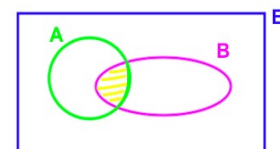
- **Unión:** Unión de dous sucesos A e B , $A \cup B$, é o suceso que se verifica cando sucede A , sucede B , ou suceden ambos.

$$A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

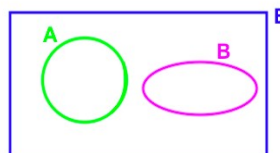


- **Intersección:** Intersección de dous sucesos A e B , $A \cap B$, é o suceso que se verifica cando o fai A e B á vez. O suceso $A \cap B$ está formado por vos sucesos da E de B .

$$A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ e } x \in B\}$$



- Cando $A \cap B = \emptyset$, dise que os sucesos A e B son **incompatibles**, **disxuntos** ou **mutuamente excluíntes**. Non poden ocorrer ambos sucesos á vez. Se un deles ocorre, o outro non pode ocorrer. En particular, A e $\bar{A}$ son sempre incompatibles.

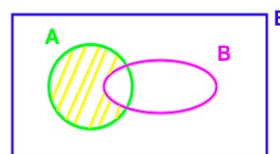


- A **diferenza** entre A e B , $A - B$, é o suceso que se verifica cando o fai A pero non B . Está formado polos sucesos da E que non están en B .

$$A - B = \{x \in E / x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

ou mellor

$$A - B = A - (A \cap B) = \bar{B} \cap A$$



Exemplo: Consideramos o experimento aleatorio “lanzar un dado”, $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e os sucesos A = “sacar un número par”, B = “sacar un número maior que 3” e C = “sacar un número impar”.

$$A = \{2, 4, 6\}; \quad B = \{4, 5, 6\}; \quad C = \{1, 3, 5\}$$

$$A \cup B = \{2, 4, 5, 6\} \rightarrow \text{sacar un número par ou un número maior que 3.}$$

$$A \cap B = \{4, 6\} \rightarrow \text{sacar un número par e un número maior que 3.}$$

$$A - B = \{2\} \rightarrow \text{sacar un número par que non sexa maior que 3}$$

$$A \cup C = E \rightarrow \text{sacar un número par ou un número impar, verificase sempre, por iso é o suceso seguro.}$$

$$A \cap C = \emptyset \rightarrow \text{sacar un número par e un impar, non é posible, non se verifica nunca. É o suceso imposible.}$$

1.4.- Propiedades das operacións entre sucesos

Sexa E o espazo mostral dun experimento aleatorio e sexan A , B e C sucesos dese espazo mostral. Verifícanse as seguintes propiedades:

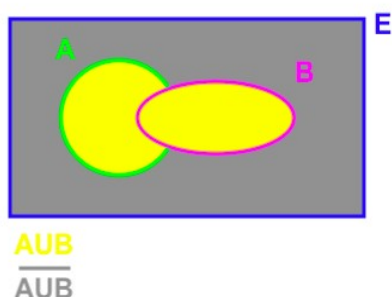
Conmutativa (unión e intersección)	Asociativa (unión e intersección)
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$

Distributiva da unión respecto da intersección	Distributiva da intersección respecto da unión
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

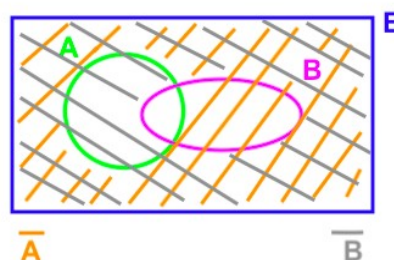
Unión entre un suceso e o seu complementario	Unión entre un suceso e o seu complementario
$A \cup \bar{A} = E$	$A \cap \bar{A} = \emptyset$

Leis de Morgan	
Complementario da UNIÓN	Complementario da INTERSECCIÓN
$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Xustificación gráfica:



A superficie gris do diagrama da esquerda correspóndese con $\overline{A \cup B}$



A superficie raiada en gris e laranxa do diagrama da dereita correspóndese con $\bar{A} \cup \bar{B}$

Ambas representan a mesma superficie raiada. Entón $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

2 - CONCEPTO DE PROBABILIDADE

A **probabilidade** dun suceso é un número que mide a posibilidade de que ocorra ese suceso.

A probabilidade é un número comprendido entre 0 e 1, e escríbese $P(A)$ (probabilidade do suceso A).

Se $P(A)$ está próximo a 0 o suceso é pouco probable e será máis probable canto máis se achegue a 1.

$P(A)=0$	$P(A)$ cerca de 0	$P(A)=0,5$	$P(A)$ cerca de 1	$P(A)=1$
<u>Imposible</u>	<u>Pouco probable</u>	<u>Pode que si,</u> <u>pode que non</u>	<u>Moi probable</u>	<u>Sí ou sí</u>

Cando se repite un experimento aleatorio moitas veces, a frecuencia relativa coa que aparece un suceso tende a estabilizarse cara a un valor fixo, a medida que aumentan o número de probas realizadas (este valor é unha aproximación da probabilidade de devandito suceso).

Este resultado é coñecido como **lei dos grandes números**.

2.1.- Regra de Laplace

Dous sucesos chámanse **equiprobables** cando teñen a mesma probabilidade de ocorrer ao realizar un experimento aleatorio.

Se nun espazo mostral, todos os sucesos son equiprobables, entón a probabilidade de calquera suceso pódese calcular mediante a **lei de Laplace**, segundo a cal, basta contar o número de sucesos elementais que compoñen A e o número de sucesos elementais que compoñen E:

$$P(A) = \frac{\text{Nº de casos favorables de A}}{\text{Nº de casos totais}}$$

Exemplo: Consideramos o experimento aleatorio "lanzar un dado", $E=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e os sucesos $A=\text{"sacar un número par"}=\{2, 4, 6\}$, $B=\text{"sacar o número 2"}=\{2\}$. Imos calcular $P(A)$ e $P(B)$

$$P(A) = \frac{\text{Nº de casos favorables de A}}{\text{Nº de casos totales}} = \frac{\text{Nº de elementos de A}}{\text{Nº de elementos de E}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}; \quad P(B) = \frac{\text{Nº de elementos de B}}{\text{Nº de elementos de E}} = \frac{1}{6}$$

Exemplo: Temos unha bolsa con catro bólas vermellas, dúas brancas e 3 verdes, todas do mesmo peso e tamaño. Consideramos os sucesos $R=\text{"sacar bóla vermella"}$, $B=\text{"sacar bóla branca"}$ e $V=\text{"sacar bóla verde"}$

$$P(R) = \frac{4}{9}$$

$$P(B) = \frac{2}{9}$$

$$P(V) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

2.2.- Definición axiomática de probabilidade

Pódese definir a **probabilidade** como unha función P que asigna a cada suceso A dun experimento aleatorio un número real $P(A)$, de maneira que cumpla certas propiedades:

$$A(\text{suceso}) \rightarrow P(A) \in \mathbb{R}$$

Debe verificar os seguintes **axiomas** (ou propiedades):

1 - Rango (valores posibles)	2 - Probabilidade de E	3 - Probabilidade de sucesos incompatibles
$0 \leq P(A) \leq 1$	$P(E) = 1$	Se A e B son dous sucesos incompatibles ($A \cap B = \emptyset$) entón: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

2.3.- Propiedades da probabilidade

A partir dos axiomas da probabilidade se deducen as seguintes propiedades:

1 - Probabilidade do contrario	2 - Probabilidade do suceso imposible
Sexan A e $\bar{A}$ un suceso e o seu contrario. Coñecendo unha das probabilidades podemos obter a outra: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$	A probabilidade do suceso imposible é cero: $P(\emptyset) = 0$ O contrario non sempre é certo! $P(A) = 0$ non significa que $A = \emptyset$
3 - Probabilidade da unión de sucesos	4 - Probabilidade da diferenza
Sexan A e B dous sucesos temos: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ Se os sucesos son incompatibles $A \cap B = \emptyset$ e $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B)$	Sexan A e B dous sucesos. Entón $P(A - B) = P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

Exemplo: Consideramos o suceso aleatorio “lanzar un dado” e os sucesos A =”sacar un número >3” e B =”sacar un número par”

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}; \quad P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}; \quad P(A \cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3};$$

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}; \quad P(\bar{A})=1-P(A)=1-\frac{1}{2}$$

2.4.- Sucesos independientes

Sexa E o espazo mostral dun experimento aleatorio e A, B dous sucesos de E , dicimos que os sucesos A e B son **independentes** se se verifica que $P(A \cap B)=P(A) \cdot P(B)$

Exemplo: No exemplo anterior do dado

$P(A \cap B)=\frac{1}{3}; \quad P(A)=\frac{1}{2}; \quad P(B)=\frac{1}{2};$ Como $P(A) \cdot P(B)=\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}=\frac{1}{4} \neq \frac{1}{3}=P(A \cap B) \rightarrow A$ e B non son independentes

2.5.- Probabilidade condicionada

A probabilidade dun suceso A pode verse modificada se ocorreu previamente outro suceso B . Para medir a influencia entre eses sucesos, defínese $P(A/B)$, a probabilidade de A condicionada a B :

$$P(A/B)=\frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{e} \quad P(B/A)=\frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Ademais temos unha nova maneira de calcular a probabilidade dunha intersección:

$$P(A \cap B)=P(B) \cdot P(A/B)=P(A) \cdot P(B/A)$$

Exemplo: Consideramos o suceso aleatorio “lanzar un dado” e os sucesos A =”sacar un número >3” e B =”sacar un número par”. Cal é a probabilidade de sacar un número maior que 3 sabendo que saíu un número par?

$$P(A \cap B)=\frac{1}{3}; \quad P(B)=\frac{1}{2}; \quad P(A/B)=\frac{P(A \cap B)}{P(B)}=\frac{1/3}{1/2}=\frac{2}{3}$$

- Que pasa coa probabilidade condicionada se A e B son sucesos independentes?

$$A \text{ e } B \text{ independentes} \Leftrightarrow P(A \cap B)=P(A) \cdot P(B) \quad \text{logo} \quad P(A/B)=\frac{P(A \cap B)}{P(B)}=\frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)}=P(A)$$

2.6.- Teorema de Bayes. Cálculo da probabilidade a posterior

O teorema de Bayes permite inverter as probabilidades condicionadas, e dicir, obter $P(A/B)$ a partir de $P(B/A)$. Das fórmulas da propiedade condicionada temos:

$$P(A/B)=\frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad [I_1] \quad \text{e} \quad P(A \cap B)=P(B/A) \cdot P(B) \quad [I_2] \quad \text{entón substituíndo na igualdade (I}_1\text{) a}$$

expresión da intersección de (I₂) obtemos $P(A/B)=\frac{P(B/A) \cdot P(A)}{P(B)}$ (Teorema de Bayes)

2.7.- Partición do espazo mostral

Unha partición do espazo mostral E é un conxunto de sucesos $A_1, A_2, \dots, A_n$ tal que a súa unión é E e a intersección entre dous deles calquera é vacía (incompatibles entre si):

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E \text{ e } A_i \cap A_j = \emptyset$$

En particular, A e $\bar{A}$ forman unha partición do espazo mostral.

2.8.- Táboas de continxencia

Cando temos datos de dúas características dun colectivo, con varias posibilidades para cada característica, podemos utilizar as táboas de continxencia. Para isto dividimos o espazo mostral con dúas particións distintas. A partir da probabilidade dunha intersección entre A , B ou os contrarios podemos calcular facilmente as restantes probabilidades de interseccións. Sempre se fan as sumas parciais por filas e por columnas. Finalmente faise a suma total que debe dar a cantidade total do colectivo.

Exemplo: Nunha viaxe organizada por Europa para 120 persoas, 48 dos que van saben falar inglés, 36 saben falar francés, e 12 deles falan os dous idiomas. Elaboramos a táboa de continxencia. Calcula a probabilidade de que elixindo un viaxeiro ao azar :

a) Fale francés

$$P(F) = 36/120 = 3/10$$

b) Non fale francés nin inglés

$$P(\bar{F} \cap \bar{I}) = 48/120 = 2/5$$

c) Fale francés sabendo que non fala inglés.

$$P(F|\bar{I}) = \frac{P(F \cap \bar{I})}{P(\bar{I})} = \frac{24/120}{48/120} = 1/2$$

	Falan FRANCÉS	NON Falan FRANCÉS	TOTAL
Falan INGLÉS	12	36	48
NON Falan INGLÉS	24	48	72
TOTAL	36	84	120

2.9.- Diagramas de árbore e teorema de probabilidades totais

Cando realizamos experimentos encadeados, é útil o diagrama de árbore.

Para isto representamos os resultados do experimento aleatorio a partir de dúas ou máis particións do espazo mostral, igual que nas táboas de continxencia.

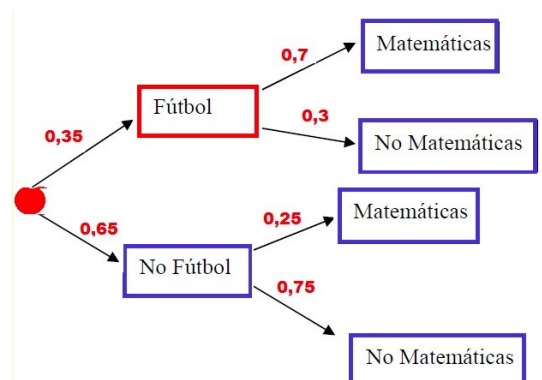
Usamos como datos as probabilidades condicionadas para calcular facilmente a probabilidade de interseccións.

Exemplo: O 35 % dos estudantes de un centro docente practica o fútbol. O 70 % dos que practican o fútbol estuda Matemáticas, así como o 25 % de os que non practican o fútbol. Elaboramos o diagrama de árbore.

Indica a probabilidade de xogar ao fútbol e a probabilidade de estudar matemática:

$$P(F) = 0,35$$

$$P(M) = P(M|F) \cdot P(F) + P(M|\bar{F}) \cdot P(\bar{F}) = 0,7 \cdot 0,35 + 0,25 \cdot 0,65 = 0,407$$



Esta última expresión é o que se coñece como teorema de probabilidades totais:

Sexan A, B, C sucesos incompatibles dous a dous tales que $A \cup B \cup C = E$.

Entón, para calquera outro suceso S cúmprese que: $P(S) = P(A) \cdot P(S|A) + P(B) \cdot P(S|B) + P(C) \cdot P(S|C)$