

1 - Conceptos máis importantes

1.1.- Experimentos aleatorios e sucesos

- Un experimento no que se observa ou mide unha (ou máis) variables é **aleatorio** cando ao repetilo en condicións iguais ten un resultado variable que depende do azar.

Exemplos:

- | | |
|--|---|
| a) Lanzar unha moeda tres veces | e) Realízase unha enquisa a 150 persoas e preguntáselle se están en contra da eutanasia. |
| b) En 3 lanzamentos a canastra, contar cantos se encesta. | f) Medimos o tempo que espera (en minutos) un usuario calquera nunha parada de bus de Vigo. |
| c) Sacar 5 veces unha carta dunha baralla, mirar se é figura ou non, devolvela ao mazo e barallar. Contar o nº de figuras. | g) Recollemos a idade dun traballador calquera da zona franca de Vigo. |
| d) Escollemos unha persoa dunha cidade e anotamos se mira a televisión e/ou le algún libro | |

- **Espazo mostral (E):** é o conxunto de resultados posibles do experimento aleatorio. Cada elemento do espazo mostral é un **sucese simple** (tamén chamado **sucese elemental**)

Para describir o espazo mostral dun experimento aleatorio podemos usar outras ferramentas como diagramas en árbore, diagramas de Venn, táboas simples ou táboas de continxencia (de dobre entrada), etc.

- **Sucese (A):** denótase así a calquera subconxunto do espazo mostral E, e está formado por un ou máis sucesos simples do espazo mostral. Algúns sucesos particulares son:

- **Sucese elemental:** só contén un único resultado posible. Son os sucesos do espazo mostral E
- **Sucese composto:** contén máis dun resultado posible. É un subconxunto do espazo mostral E
- **Sucese imposible:** é o resultado que non pode ocorrer nunca, está formado por cero sucesos simples e se representa como o conxunto baleiro: $A = \emptyset$.
- **Sucese seguro:** é un suceso que ocorre sempre, os resultados que o forman son E:
- **Sucese complementario ou contrario de A:** está formado polos posibles resultados do experimento aleatorio que non son de A. Denótase por $\bar{A}$ ou por A^c
 Lanz. de un dado: $A = \text{"sae un número menor que 3"} \rightarrow \bar{A} = \text{"sae un número maior ou igual a 3"}$
 Lanz. de dous dados: $A = \text{"a suma é número par"} \rightarrow \bar{A} = \text{"a suma é número impar"}$
 Estudo médico: $A = \text{"Fuma E sufriu infarto"} \rightarrow \bar{A} = \text{"Non fuma OU non sufriu infarto"}$

1.2.- Operacións e relacións entre sucesos

Como os sucesos dun experimento aleatorio son subconxuntos dun conxunto maior (o espazo mostral) podemos usar a notación e realizar operacións propias desta parte das matemáticas:

Inclusión: $A \subset B \Leftrightarrow$ todo elemento de A tamén está en B (o contrario non ten porque cumprirse)

Unión: $A \cup B =$ conxunto que contén a todos os elementos de A e todos os elementos de B

Intersección: $A \cap B =$ conxunto que contén a todos os elementos que son á vez de A e de B

Diferencia: $A - B = A \cap \bar{B} =$ conxunto que contén a todos os elementos de A que non están en B

Sucesos incompatibles: Dous sucesos son incompatibles cando é imposible que sucedan á vez, é dicir, cando o resultado do experimento aleatorio non pode ser simultaneamente de A e de B. Entón podemos escribir que $A \cap B = \emptyset$.

En particular, A e $\bar{A}$ son incompatibles.

Exemplo: No exercicio (2) hai persoas que padecen obesidade, e hai persoas que padecen hipertensión. Se facemos o experimento aleatorio “Tomo unha persoa ao azar e comprobo que condición(s) padece”, temos os seguintes sucesos elementais:

$O =$ “A persoa padece Obesidade”

$H =$ “A persoa padece Hipertensión”

e temos uns sucesos compostos, propios destes contextos e problemas:

$O \cup H =$ “A persoa padece obesidade **OU** hipertensión” [padece unha das condicións ou ambas];

$O \cap H =$ “A persoa padece obesidade **E** hipertensión” [padece ambas condicións];

Entón neste exemplo, os sucesos O e H **non son incompatibles**, pois no experimento “escoller a unha persoa” podemos obter como resultado simultáneo O e H . Sí son incompatibles os sucesos O e $\bar{O}$

Os sucesos incompatibles son os que representamos:

nunha **árbore**, como **diferentes ramas**

nunha **táboa de continxencia** como **diferentes filas ou columnas**

nun **diagrama de Venn** como **rexións que non se tocan**

Os sucesos compatibles son os que representamos nun diagrama de Venn como rexións con unha parte en común

Leis de Morgan: permiten obter os complementarios da unión e da intersección: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ e $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

1.3.- Probabilidade

Definición axiomática de Kolmogorov (1933): chámase probabilidade a calquera función P que lle asigna a cada suceso A dun experimento aleatorio, un número real $P(A)$ cuxas propiedades seguintes: (axiomas de Kolmogorov)

1.- Para calquera suceso A , $0 \leq P(A) \leq 1$

2.- A probabilidade dun suceso seguro é 1, ie, $P(E) = 1$

3.- Se temos dous sucesos A e B incompatibles, ie, $A \cap B = \emptyset$, entón $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

En xeral, se $A_1, A_2, \dots, A_k$ son sucesos incompatibles dous a dous, ie, $A_i \cap A_j = \emptyset$, entón:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k)$$

Os sucesos elementais dun espazo mostral sempre son incompatibles entre si.

Se A e B se representan como ramas diferentes dunha árbore (por ser incompatibles), entón a probabilidade de que ocorra A ou B é $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, é dicir, só temos que sumar as probabilidades das diferentes ramas.

Propiedades da probabilidade: da definición de probabilidade dedúcese:

1.- Para calquera suceso A , a probabilidade do suceso contrario é $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

2.- A probabilidade dun suceso imposible é cero: $P(\emptyset) = 0$ PERO! $P(A) = 0 \neq \Rightarrow A = \emptyset$

3.- Se $A \subset B \Leftrightarrow P(A) \leq P(B)$

4.- Se temos dous sucesos A e B , entón $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

5.- $P(A - B) = P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

2 - Probabilidade condicionada

2.1.- Probabilidade condicionada. Dependencia e independencia de sucesos.

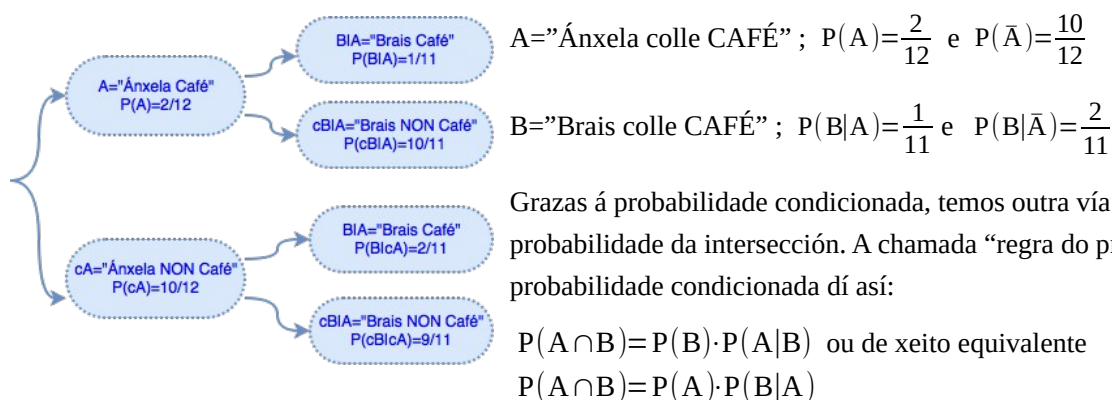
◦ Ao estudar algúns experimentos aleatorios podemos interesarnos pola probabilidade dun certo suceso A cando sabemos con certeza que vai ocorrer (ou xa ocorreu) o suceso B . Definimos a probabilidade de A condicionado a B como

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ sempre que } P(B) \neq 0.$$

Representamos un certo suceso A como unha rama nunha árbore de sucesos. As ramas que parten de A representan sucesos condicionados a que antes ocorra A; as probabilidades que anotemos son probabilidades condicionadas a A

Exemplo: Nunha bolsa hai 6 caramelos de limón, 4 de fresa e 2 de café. Ninguén quere os caramelos de café porque non son nada saborosos. Ánxela colle ao azar un caramelo da bolsa, e logo Brais colle outro caramelo.

Se construímos a árbore de probabilidades, queda así:



Cando multiplicamos as probabilidades que atopamos ao percorrer a rama dunha árbore, estamos aplicando a regra do produto para calcular $P(A \cap B)$

Sucesos independentes: no caso en que a ocorrencia do suceso B non inflúa na ocorrencia do suceso A, podemos afirmar que $P(A|B)=P(A)$. Entón diremos que os sucesos A e B **son independentes** e a probabilidade da súa intersección queda como $P(A \cap B)=P(A) \cdot P(B)$. En caso contrario diremos que os sucesos son dependentes.

$$A \text{ e } B \text{ son independentes} \Leftrightarrow P(A|B)=P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B)=P(A) \cdot P(B)$$

Estas propiedades permiten obter facilmente a probabilidade en **experimentos aleatorios compostos**, consistentes na realización sucesiva de experimentos simples tendo en conta se os resultados dun experimento previo inflúen no seguinte ou non.

2.2.- Táboas de continxencia

Método ideal se os datos do problema son probabilidades de interseccións e debemos calcular outras probabilidades como as condicionadas.

- As filas e columnas representarán sucesos elementais e os seus contrarios (no caso máis avanzado, sucesos incompatibles que formen o espazo mostral).
- As celas da táboa representan as probabilidades, porcentaxes, fraccións ou cantidades das interseccións dos sucesos.

Exemplo: [ABAU 2017 Set A3]

O 60% dos individuos dunha poboación está vacinado contra certa enfermidade. Durante unha epidemia sábese que o 20% contraeu a enfermidade e que o 3% está vacinado e contraeu a enfermidade.

V=“estar vacinado”; C=“contraer a enfermidade”

	V	C	Total
V			
C			
Total			

3 - Teorema das Probabilidades Totais e Teorema de Bayes

3.1.- Teorema das Probabilidades Totais

Este teorema ten aplicación non caso de ter varios sucesos incompatibles entre si que describen todo o espazo mostral e outro suceso que depende dos anteriores. Tomaremos como exemplo este problema de **Xuño de 2008** (exercicio 52 deste boletín) que comeza dicindo “Nun mercado de valores cotizan un total de 60 empresas, das que 15 son do **sector bancario**, 35 son **industriais** e 10 son do **sector tecnolóxico**”.

O experimento aleatorio consiste en “**escoller unha empresa ao azar deste mercado de valores**”; o espazo mostral ten tres sucesos elementais posibles que son **B=“A empresa é do sector bancario”**; **I=“A empresa é do sector industrial”** e **T=“A empresa é do sector tecnolóxico”**. No contexto do problema, os sucesos son incompatibles, é dicir, non hai empresas que pertencen a dous sectores, e podemos representalo nunha árbore.

Dentro de cada sector, analizamos a posibilidade que unha empresa de declare en creba ou non: **C=“A empresa creba”** e **C̄=“A empresa NON creba”**. O enunciado proporciona probabilidades de B, I e T; e tamén as **probabilidades de C condicionadas** ás anteriores; **a forma de organizar a información é nunha árbore, pois os datos son probabilidades condicionadas** e se nos piden probabilidades totais

¿Cal é a probabilidade de que se produza unha creba nunha empresa do citado mercado de valores?

Para isto temos que sumar as probabilidades das ramas que acaban en C; escrito coa notación adecuada:

$$P(C) = P(B) \cdot P(C|B) + P(I) \cdot P(C|I) + P(T) \cdot P(C|T) = \frac{15}{60} \cdot 0,01 + \frac{35}{60} \cdot 0,02 + \frac{10}{60} \cdot 0,10$$

o que **non é máis que sumar as probabilidades das ramas que acaban no suceso C**

Pois o **Teorema das Probabilidades Totais** describe isto mesmo nun caso xeral:

Sexan A, B, C sucesos incompatibles dous a dous tales que $A \cup B \cup C = E$. Entón, para calquera outro suceso S cúmprese que: $P(S) = P(A) \cdot P(S|A) + P(B) \cdot P(S|B) + P(C) \cdot P(S|C)$

O teorema funciona con calquera número de sucesos $A, B, C \dots$ pero nós traballamos só con 2 ou 3 como máximo.

3.2.- Probabilidades a posteriori ou Teorema de Bayes

Seguindo co exemplo, agora debemos responder á pregunta “Téndose producido unha creba, ¿cal é a probabilidade de que se trate dunha empresa tecnolóxica?” Están pedindo claramente a probabilidade de T sabendo que sucedeu C. Pero a que hai no enunciado é a inversa de esta: temos $P(C|T)$ pero pídennos obter $P(T|C)$.

Aplicando a definición de probabilidade condicionada, temos que $P(T|C) = \frac{P(T \cap C)}{P(C)} = \frac{P(C|T) \cdot P(T)}{P(C)}$.

O valor do numerador é un dato que está no enunciado e o do denominador calculámolo previamente usando a probabilidade total de C, co que a expresión quedaría como $P(T|C) = \frac{P(C|T) \cdot P(T)}{P(B) \cdot P(C|B) + P(I) \cdot P(C|I) + P(T) \cdot P(C|T)}$. Se escribimos este cálculo nunha situación xenérica para un suceso A_i , temos a Fórmula ou Teorema de Bayes:

Sexan A, B, C sucesos incompatibles dous a dous tales que $A \cup B \cup C = E$.

Entón, para calquera outro suceso S cúmprese que $P(A|S) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = \frac{P(A) \cdot P(S|A)}{P(A) \cdot P(S|A) + P(B) \cdot P(S|B) + P(C) \cdot P(S|C)}$

(e o mesmo para B ou C)