UNIDAD 1: ECUACIONES, INECUACIONES Y SISTEMAS

1. EXPRESIONES ALGEBRAICAS. POLINOMIOS

Una **expresión algebraica** es cualquier combinación de números y letras relacionados entre sí por operaciones aritméticas.

Por ejemplo, $3x^2 - x + 2$ $\quad 2a + \sqrt{b}$ $\quad \dfrac{3x+1}{3x-2}$

El **valor numérico** de una expresión algebraica es el resultado que se obtiene al sustituir las variables por números y operar.

Por ejemplo, el valor numérico del polinomio $P(x) = x^3 - x^2 + 1$ para $x = -1$ es

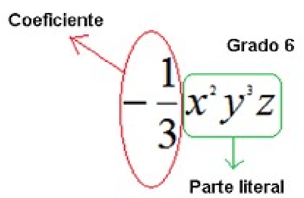
$P(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 + 1 = -1 - 1 + 1 = -1$

1.1 Polinomios

Un **monomio** es una expresión algebraica que consta de una parte numérica llamada coeficiente y una parte con letras y exponentes naturales llamada parte literal. Las letras de la parte literal reciben el nombre de variables.

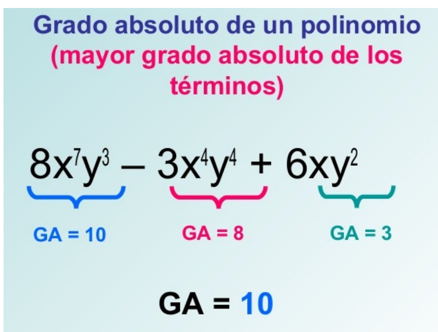
El **grado** del monomio es la suma de los exponentes de la parte literal.

Dos monomios son **semejantes** si tienen la misma parte literal.



Por ejemplo, $\dfrac{-5}{2}xy^2$ y $100\,xy^2$ son monomios semejantes.

Un **polinomio** es la suma de varios monomios no semejantes su grado es el del monomio de mayor grado que contenga. Cada monomio del polinomio se llama término. Si hay un término formado solo por un número se llama término independiente.



2.- OPERACIONES CON POLINOMIOS

- **Suma y resta**: para sumar o restar dos polinomios, tenemos que ir sumando o restando los monomios que sean semejantes y dejamos indicada la operación de los monomios no semejantes

  Por ejemplo, $P(x)=2x^3-5x^2+3x-2$ y $Q(x)=x^3-7x^2-2x+7$

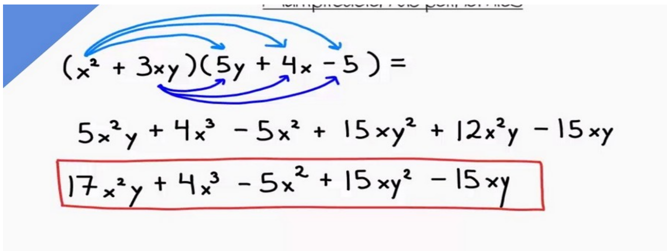
  $P(x)+Q(x)=2x^3-5x^2+3x-2+x^3-7x^2-2x+7=3x^3-12x^2-x+5$

  $P(x)-Q(x)=2x^3-5x^2+3x-2-x^3+7x^2+2x-7=x^3+2x^2-5x-9$

- **Producto**:

  Para multiplicar dos polinomios tenemos que multiplicar cada monomio del primero por cada monomio del segundo y operar los semejantes.

  Por ejemplo, $(2x+1)\cdot(3x^2+x)=6x^3+2x^2+3x^2+x=6x^3+5x^2+x$



- **Potencia** :

  La potencia de exponente natural de un polinomio se calcula multiplicando el polinomio por sí mismo tantas veces como indique el exponente.

  Por ejemplo, $(5x-3)^2=(5x-3)\cdot(5x-3)=25x^2-30x+9$

- **Identidades notables:**

I. $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$	CUADRADO DE UNA SUMA
II. $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$	CUADRADO DE UNA DIFERENCIA
III. $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$	SUMA POR DIFERENCIA

  Ejemplo: Resuelve las siguientes identidades notables

  $(2x+5)^2=4x^2+20x+25$

  $(2x-5)^2=4x^2-20x+25$

  $(2x+5)(2x-5)=4x^2-25$

- **División de polinomios:** La división de polinomios es similar a la división de números naturales. Al dividir polinomios se obtiene un cociente y un resto.

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20 & x^2 + 3x - 2 \\ \cline{2-2}
-x^4 - 3x^3 + 2x^2 & x^2 - 5x + 6 \\ \cline{1-1}
\quad -5x^3 - 9x^2 + 30x & \\
\quad 5x^3 + 15x^2 - 10x & \\ \cline{1-1}
\qquad 6x^2 + 20x - 20 & \\
\qquad -6x^2 - 18x + 12 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad 2x - 8 &
\end{array}
$$

3. REGLA DE RUFFINI Y TEOREMAS

3.1 Regla de Ruffini

La **regla de Ruffini** es un método que nos permite dividir un polinomio entre un binomio del tipo o (x – a). Tendremos que realizar los siguientes pasos:

1) Escribimos los coeficientes del dividendo en orden decreciente. Si falta algún término completamos con ceros.

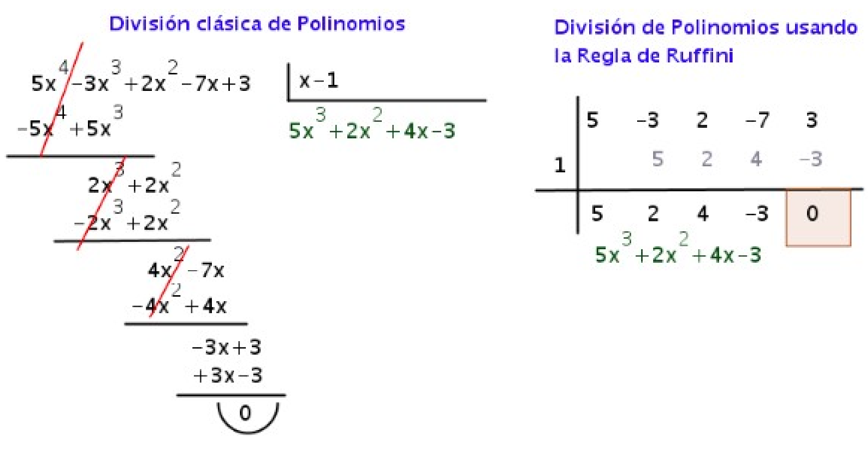
2) En la izquierda colocamos el opuesto del término independiente del divisor (a).

3) Bajamos el primer coeficiente.

4) Multiplicamos el valor de a por el primer coeficiente bajado y el resultado lo escribimos debajo del segundo coeficiente.

5) Sumamos el segundo coeficiente con el valor anotado debajo y escribimos el resultado en la línea inferior.

6) Repetimos el proceso hasta completar la fila inferior. El valor de la derecha es el del resto y los valores a su izquierda los coeficientes del cociente.



1.

4. FRACCIONES ALGEBRAICAS

Una **fracción algebraica** es un cociente en el que el numerador y e denominador son polinomios y este último tiene que ser distinto de cero.

$F(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ con $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios con $Q(x)\neq 0$.

Ejemplo, $\frac{x}{3x^2-5}, \frac{3x-1}{x^2+6x-3}$

Dos fracciones algebraicas son **equivalentes** $\frac{P(x)}{Q(x)}$ y $\frac{R(x)}{S(x)}$ son equivalentes si $P(x)\cdot S(x)=Q(x)\cdot R(x)$

Ejemplo, $\frac{x+3}{2x^2+5x-3}$ y $\frac{x-3}{2x^2-7x+3}$ son equivalentes ya que sus productos cruzados nos dan como resultado: $2x^3-x^2-18x+9$

Al igual que las fracciones numéricas, es más fácil trabajar con las fracciones algebraicas simplificándolas previamente. Para ello factorizamos el numerador y el denominador y simplificamos los factores comunes.

Ejemplo, $$\frac{3x(x+1)^2}{6x^2(x+1)}=\frac{\cancel{3}\cancel{x}\cancel{(x+1)}(x+1)}{\cancel{3}\cdot 2\cdot x\cdot \cancel{x}\cdot \cancel{(x+1)}}=\frac{x+1}{2x}$$

Una fracción algebraica es irreducible cuando el polinomio del numerador y el del denominador no tienen ningún factor común.

5. ECUACIONES POLINÓMICAS

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas.
Las **ecuaciones polinómicas** son aquellas que se pueden escribir como $P(x)=0$, donde $P(x)$ es un polinomio.
Las **soluciones** de una ecuación polinómica son las raíces del polinomio.

5. 1. Ecuaciones polinómicas de primer grado

Son las formadas por un polinomio de primer grado. Su forma general es $ax+b=0$ con $a\neq 0$. Su única solución es $x=-\frac{b}{a}$.

- Si al resolver una ecuación se llega a una identidad, por ejemplo 0=0, entonces la ecuación es una identidad y cualquier número es solución.
- Si llegamos a una contradicción, por ejemplo 0=3, entonces la ecuación es incompatible, es decir, no tiene solución.

Ejemplo, $\frac{1-x}{3}=\frac{x}{2}\Rightarrow 2-2x=3x\Rightarrow 2=5x\Rightarrow x=\frac{2}{5}$

5. 2. Ecuaciones polinómicas de segundo grado

Son las formadas por un polinomio de segundo grado. Su forma general es $ax^2+bx+c=0$ con $a\neq 0$. Las soluciones vienen dadas por:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

El número de soluciones viene dado por el discriminante:

- Si $b^2-4ac=0$ una solución real
- Si $b^2-4ac<0$ ninguna solución real
- Si $b^2-4ac>0$ dos soluciones reales

Cuando la ecuación de segundo grado es incompleta conviene resolverla sin usar la fórmula:

- Si falta el término de primer grado se despeja x^2 y se halla la raíz cuadrada:
$$ax^2+c=0\Rightarrow x^2=\frac{-c}{a}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$
- Si falta el término independiente se extrae factor común x:
$$ax^2+bx=0\Rightarrow x(ax+b)=0\Rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ ax+b=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{-b}{a} \end{cases}$$

NOTA.- A veces tendremos que aplicar propiedades, realizar operaciones o reducir a común denominador para llegar a una ecuación de primer o segundo grado.

Ejemplo,

- Ecuación completa : $x^2-5x+6=0 \Rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{5^2-4\cdot1\cdot6}}{2\cdot1}=\frac{5\pm1}{2}=\begin{cases}\frac{5+1}{2}=3\\ \frac{5-1}{2}=2\end{cases}$
- Ecuación incompleta (c=0): $5x^2-20x=0 \Rightarrow x(5x+20)=0 \Rightarrow \begin{matrix}x=0\\ 5x-20=0 \Rightarrow x=4\end{matrix}$
- Ecuación incompleta (b=0): $9x^2-36=0 \Rightarrow x^4=4 \Rightarrow x=\pm2$

5. 3. Ecuaciones factorizadas

Las **ecuaciones factorizadas** son ecuaciones que vienen expresadas como un producto de factores igual a cero, es decir, son de la forma $p(x)\cdot q(x)\cdot\ldots=0$. Para resolver este tipo de ecuaciones se iguala a cero cada factor y luego se resuelven las ecuaciones que resulten.

Ejemplo,

$$2x(3x-5)^2(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases}2x=0 \Rightarrow x=0\\ (3x-5)^2=0 \Rightarrow 3x-5=0 \Rightarrow x=\frac{5}{3}\\ x+1=0 \Rightarrow x=-1\end{cases}$$

$$x=1 \Rightarrow 1-\sqrt{1+3}=2\cdot1+1 \Rightarrow -1\neq3 \Rightarrow x=1\ NO\ es\ solución$$

6. SISTEMAS DE ECUACIONES

Un **sistema de** dos **ecuaciones** lineales con dos incógnitas tiene la expresión:

$$\begin{cases}ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases}$$

Donde x e y son las incógnitas, a, b, a' y b' son los coeficientes de las incógnitas y c y c' son los términos independientes.

Cada solución está formada por un par de valores, correspondientes a las dos incógnitas, x e y . Según el número de soluciones, un sistema de ecuaciones puede ser:

- **Compatible determinado**: el sistema tiene una única solución. $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$
- **Compatible indeterminado**: el sistema tiene infinitas soluciones. $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$
- **Incompatible**: el sistema no tiene solución. $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$

6.1. Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales

1. Método de **reducción**. Consiste en multiplicar las ecuaciones por los números adecuados ara que al sumarlas se elimine una incógnita.

   Ejemplo, $\begin{cases} x-2y=8 \\ 5x+3y=1 \end{cases}$

   Multiplicamos por -5 la primera ecuación y las sumamos :

   $\begin{cases} -5x+10y=-40 \\ \quad 5x+3y=1 \end{cases} \rightarrow 13y=-39 \Rightarrow y=-3$

   Sustituyendo en la primera ecuación:

   $x-2\cdot(-3)=8 \Rightarrow x=2$

   Este sistema es compatible determinado con su solución ($(x=2, y=-3)$)

2. Método de **sustitución**. Consiste en dejar una de las incógnitas de una de las ecuaciones y sustituir la expresión obtenida en la otra ecuación.

   Ejemplo, $\begin{cases} x-2y=8 \\ 5x+3y=1 \end{cases}$

   Despejamos x en la primera ecuación y sustituimos en la segunda

   $\begin{cases} x=8+2y \\ 5x+3y=1 \end{cases} \Rightarrow 5\cdot(8+2y)+3y=1 \Rightarrow 40+10y+3y=1 \Rightarrow 13y=-39 \Rightarrow y=-3$

   Sustituyendo en la primera ecuación:

   $x-2\cdot(-3)=8 \Rightarrow x=2$

   Este sistema es compatible determinado con su solución ($(x=2, y=-3)$)

3. Método de **igualación**. Consiste en despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones y se igualan las expresiones obtenidas.

   Ejemplo, $\begin{cases} x-2y=8 \\ 5x+3y=1 \end{cases}$

   Despejamos x en las dos ecuaciones e igualamos las expresiones obtenidas:

   $\begin{cases} x=8+2y \\ x=\dfrac{1-3y}{5} \end{cases} \Rightarrow 8+2y=\dfrac{1-3y}{5} \Rightarrow 40+10y=1-3y \Rightarrow 13y=-39 \Rightarrow y=-3$

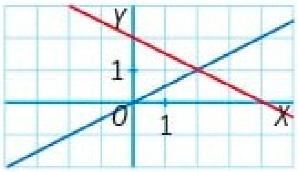
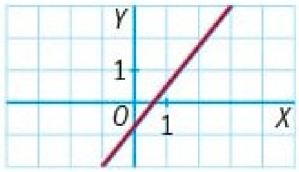
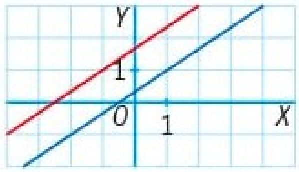
   Sustituyendo en la primera ecuación:

   $x-2\cdot(-3)=8 \Rightarrow x=2$

   Este sistema es compatible determinado con su solución ($(x=2, y=-3)$)

4. Método **gráfico**. Consiste en representar gráficamente sobre unos ejes cartesianos las ecuaciones del sistema. La intersección entre las dos gráficas indica la solución.

Por lo tanto, un sistema de ecuaciones lineales se puede interpretar gráficamente como un par de rectas. La relación entre la posición relativa de las rectas y el número de soluciones del sistema viene dada en la siguiente tabla:

Rectas secantes	Rectas coincidentes	Rectas paralelas
 Un punto de corte. Solución única.	 Infinitos puntos de corte. Infinitas soluciones.	 Sin puntos de corte. No hay solución.
Sistema compatible determinado	Sistema compatible indeterminado	Sistema incompatible

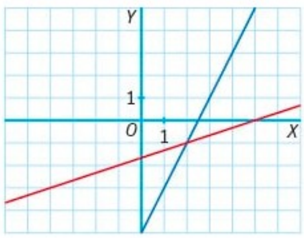
Ejemplo, $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ -x + 3y = -5 \end{cases}$

Construimos las tablas de valores para las dos rectas:

$2x - y = 5$		
x	y	Punto
0	–5	(0, –5)
3	1	(3, 1)

$-x + 3y = -5$		
x	y	Punto
5	0	(5, 0)
–4	–3	(–4, –3)

Dibujamos las rectas y estudiamos su intersección



Vemos que las dos rectas tienen un único punto de intersección, el (2, -1). Por lo tanto, el sistema tiene una única solución: $(x = 2, y = -1)$

7. SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

Un **sistema de ecuaciones es no lineal** cuando alguna de las ecuaciones no es de primer grado. Las ecuaciones pueden ser polinómicas de grado mayor o igual a dos, racionales, irracionales, logarítmicas, exponenciales …

Estos sistemas se suelen resolver por el método de sustitución, el método gráfico o realizando un cambio de variable.

Ejemplo, $\begin{cases} x-y=4 \\ x^2+y^2=58 \end{cases}$

Despejamos x en la ecuación lineal y la sustituimos en la ecuación de segundo grado.

$$\begin{cases} x=y+4 \\ x^2+y^2=58 \end{cases} \Rightarrow (y+4)^2+y^2=58 \Rightarrow y^2+8y+16+y^2=58 \Rightarrow 2y^2+8y-42=0$$

$$\Rightarrow y^2+4y-21=0 \Rightarrow \begin{cases} y=-7 \Rightarrow x=4-7= \Rightarrow x=-3 \\ y=3 \Rightarrow x=4+3 \Rightarrow x=7 \end{cases}$$

Las soluciones son $(x=-3, y=-7)$ y $(x=7, y=3)$

8. INECUACIONES

Una **inecuación** es una desigualdad entre expresiones algebraicas.

Ejemplo, son inecuaciones $x+2<5$ $x^2-1\geqslant 3$

Resolver una inecuación es averiguar lo que tiene que valer la incógnita para que se cumpla la desigualdad. Para resolver inecuaciones se usan fundamentalmente dos reglas, llamadas reglas de equivalencia:

- Se pueden pasar los términos de un miembro a otro de la inecuación cambiándolos de signo.
- Si se multiplica o divide una inecuación por un número positivo se mantiene el sentido de la desigualdad pero si el número es negativo cambia el sentido de la desigualdad.

Una inecuación puede no tener solución, tener algunas soluciones o tener infinitas soluciones.

8.1. Inecuaciones de primer grado con una incógnita

Una **inecuación de primer grado con una incógnita** es una desigualdad algebraica de polinomios de grado 1 con una sola incógnita. Se resuelven por el mismo procedimiento que las ecuaciones de primer grado pero sin olvidar las propiedades de las desigualdades. (cuando un factor cambia de lado, invierte el orden de la desigualdad)

Ejemplo, $-2(x+5)\leqslant -7x$

$$-2(x+5)\leqslant -7x \Rightarrow -2x-10\leqslant -7x \Rightarrow -2x+7x\leqslant 10 \Rightarrow 5x\leqslant 10 \Rightarrow x\leqslant \frac{10}{5} \Rightarrow x\leqslant 2$$

La solución es $x\leqslant 2 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-2]$

8.2. Sistemas de inecuaciones de primer grado

Un **sistema de inecuaciones de primer grado con una incógnita** es un conjunto de inecuaciones de primer grado. Su solución será el valor o valores de la incógnita que satisfaga todas las inecuaciones al mismo tiempo.

Para resolver un sistema de inecuaciones de primer grado con una incógnita debemos resolver cada una de las inecuaciones por separado y buscar el trozo de recta real que es común a ambas soluciones (si existe)

Ejemplo:

$$\begin{cases} 2x+3 \geq 1 \\ -x+2 \geq -1 \end{cases}$$

- $2x+3 \geq 1 \qquad 2x \geq 1-3 \qquad 2x \geq -2 \qquad x \geq -1$
- $-x+2 \geq -1 \qquad -x \geq -1-2 \qquad -x \geq -3 \qquad x \leq 3$

$[-1,\ 3]$

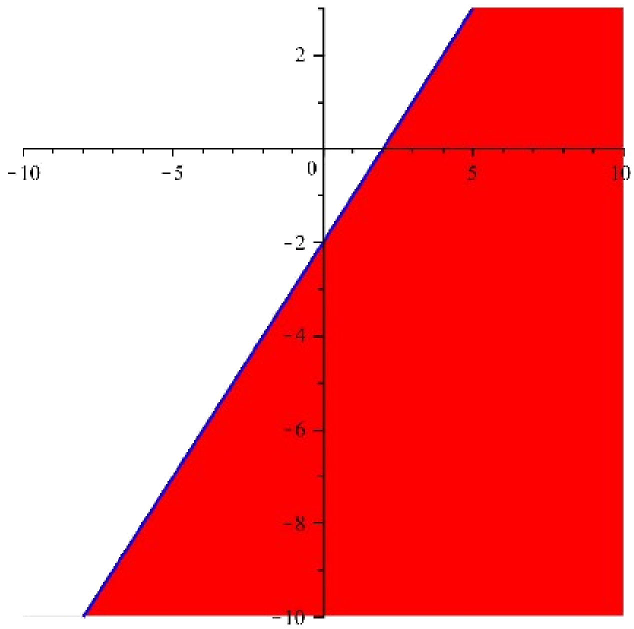
8.4. Inecuaciones lineales con dos incógnitas

Una **inecuación de primer grado con dos incógnitas** es cualquier expresión algebraica reducible a una de la forma $ax + by + c \leq 0$ con a y b distintos de 0.

Para resolver e interpretar la solución de una inecuación de este tipo proponemos el método gráfico:

- ➢ Representamos la recta $ax+by+c=0$ sobre el plano, que queda dividido en dos semiplanos.
- ➢ Evaluamos la inecuación asociada a la recta en un punto cualquiera del plano y comprobamos si la verifica o no.
- ➢ En caso afirmativo, la solución es el semiplano que contiene al punto. En caso contrario, la solución será el otro semiplano.

Ejemplo: $x - y - 2 \geq 0$



8.5. Sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas

Un **sistema de inecuaciones lineales de primer grado con dos incógnitas** es un conjunto de inecuaciones de la foma:

$ax + by + c \leq 0$

$dx + ey + f \leq 0$

… (esto signifia que puede haber más inecuaciones)

que se han de cumplir simultáneamente.

Para resolver e intepretar la solución de un sistema de este tipo:

- Representamos cada recta sobre el plano cartesiano quedando dividido en dos semiplanos por cada una de ellas.
- Evaluamos una a una cada inecuación asociada a cada recta en un punto cualquiera del plano y comprobamos si la verifica o no.
- En caso afirmativo, pintamos la región donde se encuentre el punto que hemos evaluado. En caso contrario, pintamos el semiplano opuesto a donde se encuentra nuestro punto.
- La solución del sistema será la región del plano que coincida con la intersección de todos los semiplanos que hemos pintado.

Ejemplo: