TEMA 1: NÚMEROS NATURALES. DIVISIBILIDAD

Los **números naturales**, son los que utilizamos para contar elementos, el conjunto te todos los números naturales se denota por $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,...\}$

1. OPERACIONES BÁSICAS CON NÚMEROS NATURALES

1.1- Suma

Sumar es unir, juntar, añadir 3 + 5 = 8. A los términos de una suma se les llama sumandos, el 3 y el 5 son sumandos.

La suma cumple las siguientes propiedades:

- Propiedad **conmutativa**: La suma no varía al cambiar el orden de los sumandos.
  3 + 5 = 5 + 3
- Propiedad **asociativa**: El resultado de la suma es independiente de la forma en que se agrupen los sumandos.
  (3 + 5) + 2 = 3 + (5 + 2)

1.2- Resta

Restar es quitar, suprimir, hallar lo que falta o lo que sobra; es decir, calcular la diferencia.
5 – 3 = 2
El 5 es el minuendo (M)
El 3 es el sustraendo (S)
El 2 es la diferencia (D)
Si sumamos el sustraendo y la diferencia nos da el minuendo D + S = M

1.3- Multiplicación

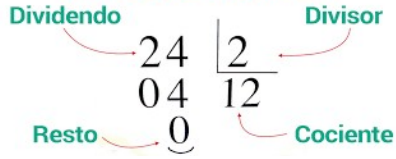
Multiplicar es una forma abreviada de realizar una suma repetida de sumandos iguales
3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 3 · 6 = 18. A los términos de una multiplicación se les llama fac-tores.

La multiplicación cumple las siguientes propiedades:

- **Conmutativa**: El producto no varía al cambiar el orden de los factores 3 · 6 = 6 · 3.
- **Asociativa:** El resultado de una multiplicación es independiente de la forma en que se agrupen los factores (3 · 5) · 2 = 3 · (5 · 2).
- **Distributiva**: El producto de un número por una suma (o resta) es igual a la suma (o resta) de los productos del número por cada sumando (3 + 5) · 2 = 3 · 2 + 5 · 2.

1.4- División

Dividir es repartir un todo entre varios, en partes iguales, para averiguar cuánto le toca a cada uno.



- Si la división es **exacta** (el resto es cero) entonces el dividendo es igual al divisor por el cociente.
- Si la división es **entera** (el resto no es cero) entonces el dividendo es igual al divisor por el cociente más el resto.

2. OPERACIONES COMBINADAS CON NÚMEROS NATURALES

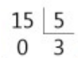
Al resolver expresiones con operaciones combinadas, debemos tener en cuenta una serie de normas:

1º Resolvemos los paréntesis 2º Resolvemos las multiplicaciones y divisiones 3º Resolvemos las sumas y las restas

3.- RELACIÓN DE DIVISIBILIDAD

Un número es **divisible** por otro si al hacer la división el resto es 0 (división exacta).

Por ejemplo, 15 es divisible por 5, porque la división 15:5 es exacta

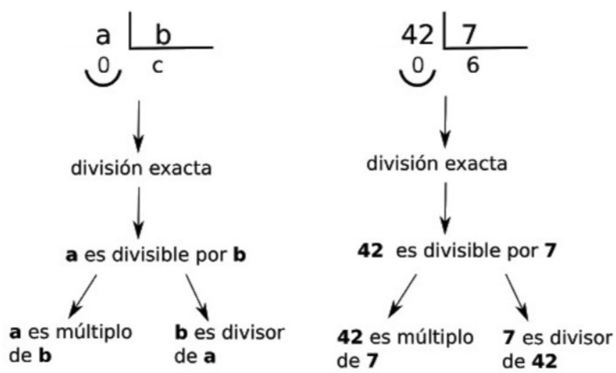


Puedo repartir 15 bolígrafos en 5 lapiceros y no sobra ninguno.

Cuando dos números tienen una relación de divisibilidad decimos que :

- El mayor es **múltiplo** del menor
- El menor es **divisor** del mayor

En nuestro ejemplo, 15 es múltiplo de 5 y 5 es divisor de 15.



4.- MÚLTIPLOS Y DIVISORES

4.1- Múltiplos

Los **múltiplos** de un número son aquellos que se obtienen multiplicando dicho número por 1, 2, 3, 4…(por los números naturales).

Los múltiplos de 4: $\mathring{4}=4,8,12,16,20,\ldots$ ó M(4) = {4, 8, 12, 16, 20,...}

- Todo número natural es múltiplo de sí mismo y de la unidad.

  4 es múltiplo de 4 y 4 es múltiplo de 1

- Cualquier número distinto de 0 tiene infinitos múltiplos.

  M(4) = {4, 8, 12, 16, 20,...}

4.2- Divisores

Los **divisores** de un número natural a son todos aquellos números que dividen de forma exacta al número a.

Para calcular los divisores de un número lo dividimos entre los números naturales menores o iguales que él. Los números que hacen que la división sea exacta serán sus divisores.

Los divisores del número 12: Div(12) = {1, 2, 3, 4, 6, 12}

Porque 12:1 = 12	12:4 = 3	12:7 No es divisible	12:10 No es divisible
12:2 = 6	12:5 No es divisible	12:8 No es divisible	12:11 No es divisible
12:3 = 4	12:6 = 2	12:9 No es divisible	12:12 = 1

- Cualquier número, excepto el 1, tiene por los menos 2 divisores, el número 1 y el mismo número

  En el ejemplo anterior podemos comprobar que el 12 tiene 6 divisores

- El número de divisores es finito

  Div(12) = {1, 2, 3, 4, 6, 12}

5.- CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Los criterios de divisibilidad son unas reglas que sirven para saber, sin tener que dividir, si un número es divisible por otro. Vamos a ver las más importantes:

- **Divisibilidad por 2**: Un número es divisible por 2 si acaba en 0 o en cifra par.

  24 es divisible por 2 porque termina en cifra par.

  43 no es divisible por 2 porque no termina en 0 ni en cifra par.

- **Divisibilidad por 3**: Un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras da múltiplo de 3.

  24 es divisible por 3 porque la suma de sus cifras 2+4 es 6 que es múltiplo de 3.

  16 no es divisible por 3 porque la suma de sus cifras 1+6 es 7 que no es múltiplo de 3.

- **Divisibilidad por 5**: Un número es divisible por 5 si acaba en 0 o en 5.

  20 es divisible por 5 porque termina en 0.

  14 no es divisible por 5 porque no termina en 0 ni en 5.

- **Divisibilidad por 9**: Un número es divisible por 9 si la suma de sus cifras el múltiplo de 9.

  738 es divisible por 9 porque la suma de sus cifras 7+3+8 = 18 es múltiplo de 9.

  14 no es divisible por 9 porque la suma de sus cifras 1+4 = 5 no es múltiplo de 9.

- **Divisibilidad por 10**: Un número es divisible por 10 si termina en 0.

  40 es divisible por 10 porque termina en 0.

  27 no es divisible por 10 porque no termina en 0.

- **Divisibilidad por 11**: Un número es divisible por 11 si la suma de las cifras de los lugares pares menos la de los lugares impares siempre da 0 o múltiplo de 11.

  1078 { Suma de las cifras de lugar par: 0+8 = 8 ; Suma de las cifras de lugar impar: 1+7=8 } 8 – 8 = 0

  Por lo tanto, 1078 es divisible por 11 porque nos da 0.

  196 { Suma de las cifras de lugar par: 9 ; Suma de las cifras de lugar impar: 1+6=7 } 9 – 7 = 2

  Por lo tanto, 196 no es divisible por 11 porque no da 0 ni un múltiplo de 11.

6.- NÚMEROS PRIMOS Y COMPUESTOS

Un número es **primo** si sólo tiene dos divisores, el 1 y el mismo número. El 1 no se considera primo.Hay infinitos números primos.

Los números primos son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19… .

Un número es **compuesto** si tiene más de dos divisores.

Los números 4, 6 y 15 son compuestos.

La criba de Eratóstenes

Eratóstenes fue un matemático griego que ideó un método para descubrir los números primos del 1 al 100 y se conoce como la criba de Eratóstenes. Este método consiste en escribir los números naturales del 1 al 100 en una tabla e ir tachando los múltiplos de 2, salvo el 2. Después se hace lo mismo con los múltiplos de 3, de 5, de7,… Los números que queden sin tachar son los números primos menores que 100.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Para averiguar si un número es primo o compuesto comprobaremos si es divisible por los primos, empezando por el 2, hasta que el cociente sea menor que el divisor. Si es divisible por algún primo, entonces el número es compuesto. En caso contrario, el número es primo.

7.- FACTORIZACIÓN

Factorizar un número es descomponerlo en factores primos, es decir, expresarlo como producto de divisores primos.

Cualquier número compuesto se puede factorizar, para ello lo vamos dividiendo entre sus factores primos:

1) Dividimos entre 2 (tantas veces como sea posible)
2) Dividimos entre 3 (tantas veces como sea posible)
3) Dividimos entre 5 ….hasta obtener la unidad

Por ejemplo , vamos a factorizar los números 48 y 60:

$$\begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$48 = 2^4 \cdot 3 \qquad 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

8.- MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (mcm)

El **mínimo común múltiplo** de dos o más números es el menor de los múltiplos comunes a todos los números. Se puede calcular de las siguientes formas:

1. Si son dos números pequeños:
   - Buscamos el primer múltiplo que sea común a todos los números.

     Ejemplo: Calcula el mcm(5,8)

     M(5) = { 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, …}

     M(8) = { 8, 16, 24, 32, 40, 48,…}

     mcm(5,8) = 40

   Nota: este método NO es práctico cuando son muchos números o son números grandes.

2. Utilizando el método de la factorización:
   - Descomponemos los números en factores primos (factorizar) y los escribimos como potencias.
   - Escogemos los factores primos, comunes y no comunes, elevados al mayor exponente.
   - El producto de las potencias es el mcm.

     Ejemplo: Calcula el mcm(48, 60)

     $48 = 2^4 \cdot 3$ y $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

     $\text{mcm}(48, 60) = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 = 16 \cdot 3 \cdot 5 = 240$

9.- MÁXIMO COMÚN DIVISOR (mcd)

El máximo común divisor de dos o más números es el mayor de los divisores comunes a dichos los números. Se puede calcular de las siguientes formas:

3. Si son dos números pequeños:
   - Buscamos el mayor de los números que divida a ambos.

     Ejemplo: Calcula el mcd(8, 12)

     Div(8) = { 1, 2. 4, 8}

     Div(12) = { 1, 2, 3, 4, 6, 12}

     mcd(8, 12) = 4

   Nota: este método NO es práctico cuando son muchos números o son números grandes.

4. Utilizando el método de la factorización:
   - Descomponemos los números en factores primos (factorizar) y los escribimos como potencias.
   - Escogemos los factores primos comunes elevados al menor exponente.

- El producto de las potencias es el mcd.

  Ejemplo: Calcula el mcd(28, 42, 70)

  $28 = 2^2 \cdot 7$

  $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$

  $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$

  $mcd(28, 42, 70) = 2 \cdot 7 = 14$