UNIDAD 1: NÚMEROS REALES

1. CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES

El conjunto de los **números racionales** está formado por todos los números enteros, junto con las fracciones. Una fracción no es más que un cociente de dos números enteros $\frac{a}{b}$ dónde a es el numerador y b el denominador. Todo número racional se puede expresar en forma de fracción de dos enteros. El conjunto de los números racionales se denota con la letra $\mathbb{Q}$

1.1- Simplificación de fracciones. Fracciones equivalentes

- Si el numerador y denominador se pueden dividir por el mismo número, al hacerlo obtenemos una **fracción simplificada**: $\frac{a}{b}=\frac{a:n}{b:n}$. Por ejemplo $\frac{12}{15}=\frac{12:3}{15:3}=\frac{4}{5}$
- Una fracción que no se puede reducir, se dice **irreducible**.
- Dos fracciones son **equivalentes** si al simplificarlas dan lugar a la misma fracción irreducible. Por ejemplo $\frac{-10}{35}\, y \,\frac{8}{-28}$ son fracciones equivalentes.

1.2- Operaciones con fracciones

- Para **sumar y restar** fracciones tenemos que reducir previamente a común denominador.
- **Producto** $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$
- **Cociente** $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$

2. CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

A lo largo de la historia de las matemáticas han ido surgiendo diferentes conjuntos de números:

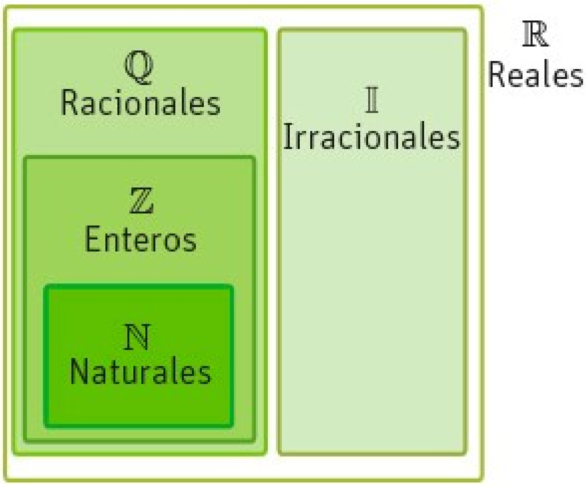
- El conjunto de los números **naturales** $\mathbb{N}=\{1,2,3,4,...\}$
- El conjunto de los números **enteros** $\mathbb{Z}=\{...-2,-1,0,1,2,...\}$. Cualquier número natural es también un número entero.
- El conjunto de los números **racionales,** es decir, el conjunto de las fracciones $\mathbb{Q}=\{\frac{-4}{7},\frac{11}{12},\frac{1}{8},\frac{10}{13},...\}$. Cualquier número entero también es racional.

Hay 4 posibilidades:

- $\frac{a}{b}$ sea entero $\frac{-4}{2}=-2$
- $\frac{a}{b}$ sea decimal exacto $\frac{3}{5}=0{,}6$
- $\frac{a}{b}$ sea decimal periódico puro $\frac{4}{3}=1{,}\hat{3}$
- $\frac{a}{b}$ sea decimal periódico mixto $\frac{7}{12}=0{,}58\hat{3}$

- El conjunto de los **irracionales** $\mathbb{I}$: son los que tienen infinitos decimales sin período. Incluyen:
  - Los números decimales no periódicos: π, Φ, e…
  - Las raíces no exactas de los números reales: $\sqrt{3},\sqrt{2},\sqrt{12}$ …

- Los números racionales y los irracionales forman el conjunto de los **números reales** $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup II$. Son números reales $1,-3,\frac{3}{4},\pi,\sqrt{3},...$



2.1- Aproximación y errores

Aproximar un número real es sustituirlo por un número racional con un número finito de cifras decimales. Se puede aproximar mediante truncamiento o redondeo.

- **Truncar** un número a un determinado orden consiste en eliminar las cifras decimales a partir de dicho orden.
- **Redondear** un número a un cierto orden consiste en truncar a partir de ese orden teniendo en cuenta que si la primera cifra que se suprime es mayor o igual que 5 se suma uno a la última cifra decimal de la aproximación. En caso contrario, se deja igual.

Cuando se realiza una aproximación estamos cometiendo un error, que puede ser:

- **Error absoluto**: es el valor absoluto de la diferencia entre el valor exacto y el aproximado .

$$E_A = |x_r - x_a|$$

- **Error relativo**: es el cociente entre el error absoluto y el valor exacto.

$$E_R = \frac{E_A}{x_r}$$

<u>Ejemplos:</u> Calcula el error absoluto y relativo si se aproxima π por 3,14 considerando el valor exacto como π = 3,141 592 654.

$$E_A = |x_r - x_a| = |3{,}141\,592\,654 - 3{,}14| = 0{,}001\,592\,654$$

$$E_R = \frac{E_A}{x_r} = \frac{0{,}001\,592\,654}{3{,}141\,592\,654} = 0{,}000\,506\,957 \Rightarrow 0{,}05\,\%$$

3. LA RECTA REAL. INTERVALOS

A cada número real le corresponde un único punto en la recta real y a cada punto de la recta, un único número real.

Un **intervalo** es el conjunto de todos los números comprendidos entre dos puntos de la recta real. Si a y b son números reales, a < b, un intervalo puede ser:

- Intervalo cerrado [a, b] $\{x \in \mathbb{R} / a \leqslant x \leqslant b\}$

- Intervalo abierto (a, b) $\{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$

- Intervalo semiabierto derecha [a, b) $\{x \in \mathbb{R} / a \leqslant x < b\}$

- Intervalo semiabierto izquierda (a, b] $\{x \in \mathbb{R} / a < x \leqslant b\}$

Una semirrecta es el conjunto de todos los números menores o mayores que un punto de la recta real.

- Semirrecta cerrada por la derecha (-∞, a] $\{x \in \mathbb{R} / x \leqslant a\}$

- Semirrecta abierta por la derecha (-∞, a) $\{x \in \mathbb{R} / x < a\}$

- Semirrecta cerrada por la izquierda [a, +∞) $\{x \in \mathbb{R} / x \geqslant a\}$

- Semirrecta abierta (a, +∞] $\{x \in \mathbb{R} / x > a\}$

por la izquierda

4. POTENCIAS

Una potencia es una forma reducida de escribir un producto de factores iguales, a^n es una potencia dónde a es la base y n es el exponente

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{n\ veces}$$

Ejemplos: $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$, $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$ y $-3^2 = -(3 \cdot 3) = -9$

4.1- Propiedades de las potencias

Propiedad	Enteros	Fracciones	Ejemplo
Potencia de un producto	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^n$	$2^5 \cdot 3^5 = (2 \cdot 3)^5 = 6^5$
Potencia de un cociente	$(a : b)^n = a^n : b^n$	$\left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{c}{d}\right)^n$	$12^3 : 4^3 = (12 : 4)^3 = 3^3$
Producto de potencias con la misma base	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{m} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}$	$2^5 \cdot 2^3 = 2^8$
Cociente de potencias con la misma base	$a^m : a^n = a^{m-n}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^m : \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}$	$2^7 : 2^3 = 2^4$
Potencias de exponente cero	$a^0 = 1$	$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$	$5^0 = 1$
Potencia de otra potencia	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n \cdot m}$	$(5^3)^2 = 5^6$
Potencia de exponente negativo	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$	$4^{-3} = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{4^3}$

5. RADICALES

La **raíz cuadrada** es la operación inversa de elevar al cuadrado: $\sqrt{a}=b \Leftrightarrow b^2=a$

La raíz cuadrada de un número tiene dos soluciones, la negativa y la positiva, $\sqrt{9}=3$ y $\sqrt{9}=-3$ ya que $3^2=(-3)^2=9$

La **raíz n-ésima** : $\sqrt[n]{a}=b \Leftrightarrow b^n=a$ Por ejemplo: $\sqrt[3]{8}=2$

En la expresión $\sqrt[n]{a}$, a n se le llama índice de la raíz, a a radicando, y toda la raíz radical.

Número de soluciones

- $a>0 \rightarrow \begin{matrix} n\ par: 2\ raíces \\ n\ impar: 1\ raíz \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \sqrt{4}=\pm 2 \\ \sqrt[3]{8}=2 \end{matrix}$
- $a<0 \rightarrow \begin{matrix} n\ par: no\ solución \\ n\ impar: 1\ raíz \end{matrix} \rightarrow \sqrt[3]{-8}=-2$
- $a=0 \rightarrow 1\ solución \rightarrow \sqrt[n]{0}=0$