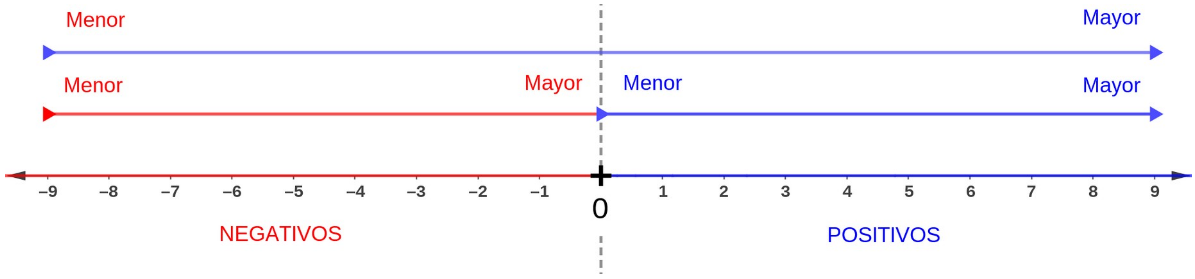
# Tema 1: Los números enteros

*Unidade 3 - Os números enteiros*
*1) Números enteiros. Representación e ordenación na recta numérica*
*2) Operacións. Xerarquía das operacións. Valor absoluto e oposto. Suma e resta. Produto e cociente. Propiedade distributiva e factor común*
*3) Potencias. Potencias de base enteira e expoñente natural. Propiedades das potencias*
*4) Cadrados perfectos e raíces cadradas. Estimación e obtención de raíces aproximadas*
*5) Operacións con calculadora e outros medios tecnolóxicos*

## 1 - Números enteros

Los **números naturales** son los que utilizamos para contar elementos. El conjunto te todos los números naturales se denota por $\mathbb{N}$ , por lo tanto escribimos $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,...\}$ . Indicamos que un número es o no es natural con los símbolos *pertenece* y su contrario: $3\in\mathbb{N}$ ó $3{,}25\notin\mathbb{N}$ . El cero se considera natural o no según convenga.

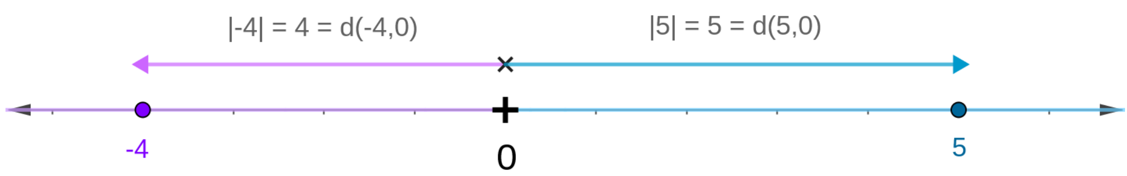
Los **números enteros** están formados por los números positivos, los negativos y el cero. Los números negativos surgen mucho después que los naturales, respondiendo a las necesidades del comercio, en cuestiones como tener, en contraste con deber. Su utilidad principal es el cálculo de la diferencia de una magnitud en dos situaciones diferentes. Dentro de los números enteros se encuentran los naturales. El conjunto de los números enteros se denota por $\mathbb{Z}$ , $\mathbb{Z}=\{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$ . El conjunto de los números enteros se representa, ordenado en la recta numérica:




Todos los números positivos son mayores que __________. Todos los números ________son menores que cero. Todos los números positivos son mayores que ____________

## 2 - Operaciones con números enteros

El **valor absoluto (VA)** de un número entero (o de cualquier tipo de número) es el número que resulta de convertirlo a positivo y se expresa escribiéndolo entre barras: $\text{Abs}(-7)=|-7|=7$ y $\text{Abs}(7)=|7|=7$ .




El **valor absoluto** es la distancia entre un número y el cero.

El **opuesto** de un número entero (o de cualquier tipo de número) es otro número con el mismo valor absoluto, pero de signo contrario. El cálculo del opuesto se indica con un signo menos: $op(-7)=-(-7)=7$ y $op(+7)=-(+7)=-7$ .

- Un número sumado con su opuesto da cero: $(-7)+(+7)=0$ y en general $A+(-A)=0$
- El opuesto del opuesto es el mismo número: $-(-A)=A$ (a esta operación se le llama **identidad**)
- El cálculo de opuestos genera la *regla de multiplicar signos*: $\begin{cases} +(+A) & = & A & \Rightarrow & +\cdot+ & = & + \\ -(-A) & = & A & \Rightarrow & -\cdot- & = & + \\ +(-A) & = & -A & \Rightarrow & +\cdot- & = & - \\ -(+A) & = & -A & \Rightarrow & -\cdot+ & = & - \end{cases}$

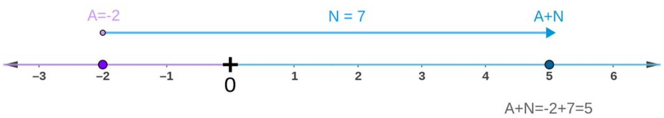
## 2.1) Suma (y resta) de números enteros

- Antes de sumar números enteros debemos **reducir los signos** con la *regla de multiplicar signos*, dejando delante de cada número un único signo. Este signo indica si el número es positivo o negativo (y **no indica la operación**, que en general es una suma):

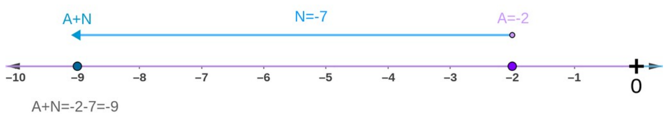
| | |
|---|---|
| $+(-87)-(-64)=\underbrace{-87}_{Neg}\underbrace{+64}_{Pos}\leftarrow$ | *SUMA de un negativo y de un positivo* |
| $+(-87)-(+64)=\underbrace{-87}_{Neg}\underbrace{-64}_{Neg}\leftarrow$ | *SUMA de dos negativos* |
| $+(-11)-(+21)-[-(+37)]=\underbrace{-11}_{Neg}\underbrace{-21}_{Neg}\underbrace{+37}_{Pos}\leftarrow$ | *SUMA de dos negativos y un positivo* |

- La resta de dos números se puede convertir en la suma del primero con el opuesto del segundo: $52-83=52+\underbrace{(-83)}_{Op\ de\ 83}$ .
- Diferencia entre A y B es la resta $B-A$. Se indica con la letra griega DELTA: $Dif(A,B)=\Delta=B-A$
- Distancia entre A y B es el valor absoluto de la diferencia: $d(A,B)=|B-A|$
- En la recta numérica, sumar un número A otro número N equivale a desplazarse N pasos desde A:

*Si N es positivo, el desplazamiento es hacia la derecha:*




*Si N es negativo, el desplazamiento es hacia la izquierda:*




| **Suma de dos números enteros** | **Suma de varios números enteros** |
|---|---|
| *Números de IGUAL signo:*<br>○ *se pone el signo que tenían ambos sumandos*<br>○ *se **suman** sus valores absolutos*<br>$-87-64=-151$ $\quad +87+64=+151$ | *- En serie (si son pocos números)*<br>$\underbrace{-21+18}_{1^o op.}-46=-3-46=-49$ |
| *Números de DIFERENTE signo*<br>○ *se pone el signo del de más valor absoluto*<br>○ *se **restan** sus valores absolutos*<br>$-87+64=-23$ $\quad +87-64=+23$ | *- Agrupando POSITIVOS y NEGATIVOS (el método más eficaz)*<br>$\overline{+8}\,\underline{-17}\,\overline{+6}\,\underline{-12-5-8}=\overline{+14}\,\underline{-42}=-28$<br><br>*- Cancelar opuestos (cuando se puede)*<br>$\overline{+6}-22\overline{+6}\,\underline{-12}-21=-22-21=-43$ |

## 2.2) Producto u cociente de números enteros

| **Multiplicación (ó división) de dos números enteros** | **Multiplicación (ó división) de varios números enteros** |
|---|---|
| ○ *se multiplican los signos de cada factor*<br>○ *se multiplican (ó dividen) los valores absolutos de cada factor*<br>$(-71)\cdot(-10)=+710$ $\quad (+87):(-87)=-1$ | *Se multiplican los signos y VA de cada factor. De forma simple:*<br>○ *Si hay un nº PAR de factores negativos, el resultado es positivo:* $(-3)\cdot(-4)\cdot(-10)\cdot(-10)=+1200$<br>○ *Si hay un nº IMPAR de factores negativos, el resultado es negativo:* $(-7)\cdot(-7)\cdot(-10)\cdot(-10)(-10)=-49000$<br>*El cociente es semejante, teniendo en cuenta que la división de valores absolutos no es conmutativa ni asociativa, por lo que suele escribirse en forma de fracción* |

Multiplicar o dividir por -1 es lo mismo que calcular el opuesto: $-(-7)=(-1)\cdot(-7)$

### 2.3) Operaciones combinadas y prioridad de las operaciones

Cuando aparecen operaciones de diferente tipo les llamamos **operaciones combinadas**. El resultado de estas operaciones puede cambiar si cambiamos el orden en que las hacemos. Para que esto no suceda se establece un orden en el cual se deben hacer las operaciones.

| | |
|---|---|
| Por lo tanto, **la primera operación que aparece no tiene por que ser la primera** que hay que hacer. | (1) *Operaciones entre* ***paréntesis*** *ó* ***corchetes***<br>(2) *Potencias y raíces*<br>(3) *Multiplicaciones, divisiones y opuestos*<br>*(4) Sumas y restas.* |

### 2.4) Propiedad distributiva y factor común

La **propiedad distributiva** se aplica cuando una multiplicación afecta a varios sumandos. Entonces la multiplicación se *reparte* a cada uno de ellos y el resultado de la operación no varía.

Se le llama **sacar factor común** a la acción inversa a la propiedad distributiva: agrupamos varios sumandos que comparten un mismo factor :

| Propiedad distributiva | Factor común |
|---|---|
| $-3\cdot(20-4)=-3\cdot 20-3\cdot(-4)=-60+12=-48$ | $-3\cdot 17-3\cdot(-7)=-3\cdot(17-7)=-3\cdot 10=30$ |

## 3 - Potencias de base entera y exponente natural

- Una **potencia de exponente natural** es una multiplicación de factores iguales:

  $a^n$ es una potencia dónde $a$ es la base y $n$ es el exponente: $a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdots a}_{n\ veces}$ . En este caso **el exponente es un nº natural**

  Si la base de una potencia es negativa debe escribirse entre paréntesis

  ***Ejemplos***: *Son potencias* $3^2=3\cdot 3=9$ *y* $(-3)^2=(-3)\cdot(-3)=9$ . *Pero no es una potencia* $-3^2=-3\cdot 3=-9$

- Elevando un número negativo a un exponente natural:

| | |
|---|---|
| *Si el exponente es par, el resultado es positivo:* $(-a)^{par}\geq 0$ | *Si el exponente es impar, el resultado es negativo:* $(-a)^{impar}<0$ |

### 3.1) Propiedades de las potencias

Las usaremos para convertir operaciones con potencias en otras más sencillas ó cambiar el orden de algunas operaciones, aunque su principal utilidad es realizar operaciones con números desconocidos (incógnitas y variables, AKA *álgebra*).

| Propiedad | | Base Entera | Base fraccionaria |
|---|---|---|---|
| *MISMO EXPONENTE* | *Potencia de un producto* | $(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$ | $\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)^n=\left(\frac{a}{b}\right)^n\cdot\left(\frac{c}{d}\right)^n$ |
| | *Potencia de un cociente* | $(a:b)^n=a^n:b^n$ | $\left(\frac{a}{b}:\frac{c}{d}\right)^n=\left(\frac{a}{b}\right)^n:\left(\frac{c}{d}\right)^n$ |
| *MISMA BASE* | *Producto de potencias con la misma base* | $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ | $\left(\frac{a}{b}\right)^{m}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^n=\left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}$ |
| | *Cociente de potencias con la misma base* | $a^m:a^n=\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ | $\left(\frac{a}{b}\right)^m:\left(\frac{a}{b}\right)^n=\left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}$ |
| | *Potencias de exponente cero* | $a^0=1$ | $\left(\frac{a}{b}\right)^0=1$ |
| | *Potencia de otra potencia* | $(a^n)^m=a^{n\cdot m}$ | $\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n\right)^m=\left(\frac{a}{b}\right)^{n\cdot m}$ |

Es importante señalar algunas NO-Propiedades que se asumen intuitivamente y dan lugar a errores graves en el cálculo:

| **NO-Propiedad** | | **Contra-ejemplo** |
|---|---|---|
| *Potencia de un producto sin base ni exponente igual (en general no se pueden reducir a una única potencia)* | $a^n \cdot b^m \neq (a \cdot b)^{n+m}$ | $2^3 \cdot 5^2 = 8 \cdot 25 = 200$ *pero* $(2 \cdot 5)^{3+2} = 10^5 = 100000$ |
| *Potencias de sumas o restas (la fórmula para su cálculo sólo es fácil con n=2)* | $(a+b)^n \neq a^n + b^n$ $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ | $(6+3)^2 = 9^2 = 81$ *pero* $6^2 + 3^2 = 36 + 9 = 45$ *y sin embargo* $(6+3)^2 = 6^2 + 3^2 + 2 \cdot 6 \cdot 3 = \dots = 81$ |

## 4 - Raíces y radicales

### 4.1) Raíces de números enteros

La raíz cuadrada es la operación inversa de elevar al cuadrado: $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$

| $n$ | | 1 | | 2 | | | | 4 | | | ... | | | | $\sqrt{150}$ | | $\sqrt{x}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n^2$ | 0 | 1 | 2 | | 6 | 9 | 10 | | 20 | 25 | ... | 81 | 100 | 144 | | 200 | $x$ |

- Un número positivo tiene tiene dos raíces cuadradas opuestas entre sí.
  Por ejemplo, las raíces cuadradas de 9 son 3 y -3, porque $3^2 = (-3)^2 = 9$
- La raíz cuadrada positiva de $A$ es $\sqrt{A}$. La raíz negativa de $A$ es $-\sqrt{A}$. Las dos raíces de $A$ son $\pm\sqrt{A}$. Es decir:

  $\sqrt{A} \geq 0$ $\qquad$ $-\sqrt{A} \leq 0$ $\qquad$ $\pm\sqrt{A}$ son dos números opuestos entre sí.

- Un número negativo NO tiene tiene ninguna raíz cuadrada, porque $A^2 \geq 0$ para cualquier número $A$:
  Por ejemplo, -9 no tiene raíz cuadrada porque $-9 \neq 3^2 = (-3)^2$

### 4.2) Cálculo de raíces

- Un número es un cuadrado perfecto si su raíz es exacta: $\sqrt{36} = 6$ ; $\sqrt{169} = 13$ ; $\sqrt{2048} = 64$
- Si la raíz no es exacta:
  - se puede hacer una estimación: ya que $6 < 7 \Rightarrow \sqrt{36} < \sqrt{49} \Rightarrow 6 < \sqrt{40} < \sqrt{45} < \sqrt{48} < 7$ luego $\sqrt{40} = 6'algo$. Es decir, que las raíces $\sqrt{37}; \sqrt{38}; \dots; \sqrt{48}$ son todas $6, algo$
  - se puede calcular de forma aproximada con la calculadora: $\sqrt{45} = 6{,}70820393\dots$
  - se puede dejar en forma de radical (simplificado ó no): $\underbrace{\sqrt{45}}_{radical} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = \underbrace{3 \cdot \sqrt{5}}_{radical\ simplificado}$

### 4.3) Propiedades de las raíces

| **Propiedad** | | **Ejemplo** |
|---|---|---|
| *Producto de raíces* | $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ | $\sqrt{9} \cdot \sqrt{4} = \sqrt{36}$ *ó* $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{10}$ |
| *División de raíces* | $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ | $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}} = \sqrt{4}$ *ó* $\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{25}} = \sqrt{0{,}04}$ |
| *Cancelación (de potencias y raíces)* | $(\sqrt{A})^2 = \sqrt{A^2} = A$ | $(\sqrt{2})^2 = \sqrt{2^2} = 2$ *ó* $\sqrt{15} \cdot \sqrt{15} = 15$ |
| *Suma de raíces iguales (AKA multiplicación)* | $\underbrace{\sqrt{a} + \sqrt{a} + \dots + \sqrt{a}}_{n\ veces} = n \cdot \sqrt{a}$ | $\sqrt{6} + \sqrt{6} + \sqrt{6} + \sqrt{6} = 4 \cdot \sqrt{6}$ |
| *NO PROPIEDAD (Suma de raíces diferentes)* | $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$ | $\sqrt{9} + \sqrt{16} \neq \sqrt{25}$ |