EJERCICIOS DE ÁLGEBRA

1. Una empresa tiene tres factorías, F_1, F_2, F_3, en las que se fabrican diariamente tres tipos diferentes de productos, *A*, *B* y *C*, como se indica a continuación:

F_1: 200 unidades de *A*, 40 de *B* y 30 de *C*.

F_2: 20 unidades de *A*, 100 de *B* y 200 de *C*.

F_3: 80 unidades de *A*, 50 de *B* y 40 de *C*.

Cada unidad de *A* que se vende proporciona un beneficio de 5 euros; por cada unidad de *B*, se obtienen 20 euros de beneficio; y por cada una de *C*, 30 euros.

Sabiendo que la empresa vende toda la producción diaria, obtener matricialmente el beneficio diario obtenido con cada una de las tres factorías.

Organizamos los datos que tenemos en dos matrices; su producto nos da la matriz que buscamos:

$$\begin{array}{c} \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 200 & 40 & 30 \\ 20 & 100 & 200 \\ 80 & 50 & 40 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\begin{pmatrix} 5 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{array}\begin{pmatrix} 2700 \\ 8100 \\ 2600 \end{pmatrix}$$

2. En una pastelería elaboran tres tipos de postres: *A*, *B* y *C*, utilizando leche, huevos y azúcar (entre otros ingredientes) en las cantidades que se indican:

_A_: 3/4 de litro de leche, 100 g de azúcar y 4 huevos.

_B_: 3/4 de litro de leche, 112 g de azúcar y 7 huevos.

_C_: 1 litro de leche y 200 g de azúcar.

El precio al que se compran cada uno de los tres ingredientes es de 0,6 euros el litro de leche, 1 euro el kg de azúcar, y 1,2 euros la docena de huevos.

Obtener matricialmente el gasto que supone cada uno de estos tres postres (teniendo en cuenta solamente los tres ingredientes indicados).

El precio de cada litro de leche es de 0,6 euros; el precio de cada gramo de azúcar es de 0,001 euros; y el precio de cada huevo es de 0,1 euros.

Organizamos los datos que nos dan en dos matrices; su producto es la matriz que buscamos:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} L & Az & H \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3/4 & 100 & 4 \\ 3/4 & 112 & 7 \\ 1 & 200 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} L \\ Az \\ H \end{array}\begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}001 \\ 0{,}1 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\begin{pmatrix} 0{,}95 \\ 1{,}262 \\ 0{,}8 \end{pmatrix}$$

Por tanto, el postre A supone 0,95 euros, el B 1,26 euros; y el C, 0,8 euros.

3. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$**, calcular** A^4+A^{-1}

$$A^2=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad A^4=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$(A|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&-1&0&1&0&0\\1&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F2\rightleftarrows F1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1&0\\0&-1&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{(-1)F2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1&0\\0&1&0&-1&0&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^4+A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

4. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}x&1&z\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix}1\\9\\1\end{pmatrix}$ y $E=\begin{pmatrix}-1-8y\\3-y+z\\5\end{pmatrix}$

a) Si $(A\cdot B)(2C-D)=E$ **, formula un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.**

b) Resolver por el método de Gauss.

a) $A\cdot B=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x&1&z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x&3&3z\\x&1&z\\x&1&z\end{pmatrix}\qquad 2C-D=2\cdot\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\9\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$$(A\cdot B)\cdot(2C-D)=\begin{pmatrix}3x&3&3z\\x&1&z\\x&1&z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x+3+3z\\x+1+z\\x+1+z\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3x+3+3z\\x+1+z\\x+1+z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-8y\\3-y+z\\5\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}3x+3+3z=-1-8y\\x+1+z=3-y+z\\x+1+z=5\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3x+8y+3z=-4\\x+y\qquad\;=2\\x+\qquad\;z=4\end{array}\right\}$$

b) $$\begin{pmatrix}3&8&3&-4\\1&1&0&2\\1&0&1&4\end{pmatrix}\xrightarrow[3F_3-F_1]{3F_2-F_1}\begin{pmatrix}3&8&3&-4\\0&-5&-3&10\\0&-8&0&16\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}3x+8y+3z=-4\\-5y-3z=10\\-8y=16\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}x=4\\y=-2\\z=0\end{array}$$

➔ **Sea A una matriz cuadrada tal que A^2-3A= -2I (siendo I la identidad). Probar que A admite inversa y utilizar la igualdad dada para expresar A^{-1} en función de A.**

5. Dadas las siguientes matrices A = $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ **y B =** $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$**, calcular:**

a) 5(B – A) + 2(3B – 2A) + 3I siendo I la matriz unidad de orden 2.

b) La matriz X que verifica AX = B.

6. Hallar todas las matrices X que satisfacen la ecuación $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \cdot$ **X=** $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$.

7. Dadas tres matrices A, B y C. Se sabe que A·B·C es una matriz de orden 2x3 y que B·C es una matriz de orden 4x3, ¿cuál es el orden de A? [Mat II, Xuño 2002]

8. Se consideran dos matrices A y b que verifican A + B = $\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{7} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ **y A - B =** $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

Calcular $A^2 – B^2$. [Mat II, Xuño 2003]

9. Sean A, B e C tres matrices tales que el producto A·B·C es una matriz 3x2 y el producto A·C^t es una matriz cuadrada, siendo C^t la traspuesta de C.
Calcular las dimensiones de A, B y C. [Mat II, Set 2002]

10. Calcular las matrices cuadradas X **que verifican** $P \cdot X = X \cdot P$**, siendo** $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

[xuño 1997]

11. Dadas las siguientes matrices A = $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ **y B =** $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$**, hallar una matriz simétrica P que sea regular y tal que P · B = A · P. [xuño 1998]**

12. Encontrar todas las matrices C=$\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$ **que verifiquen la igualdad**

$$C \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -8 & 6 \end{pmatrix} \cdot C$$

➔ **Si A es una matriz cuadrada, ¿la matriz A+A^t es igual a su traspuesta?**

13. Sean las matrices B=$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y C=$\begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$. Calcular la matriz A, sabiendo que A^2=B y A^3=C.

14. Calcular A^{-1} siendo A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{r} 1^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{r} 1^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} - 2 \cdot 1^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{r} 3 \cdot 1^{\text{a}} + 2^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} + 3^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{r} -2 \cdot 1^{\text{a}} + 3 \cdot 3^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

15. Calcular el rango de las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 7 \\ -1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

16. Calcular el valor de los parámetros a y b para la matriz A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & a & 0 & b \end{pmatrix}$ tenga rango igual a 2. ***[xuño 1993]***

17. Sean las matrices A=$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, C=$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, y D=$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Hallar la matriz AB^t donde B^t indica la matriz traspuesta de B.

b) Hallar el rango de la matriz A^tD.

➔ Sea A una matriz cuadrada tal que A^2-3A= 2(I + A) (siendo I la identidad). Calcular A^{-1} en función de A.

18. Halla la matriz $X^2 + Y^2$, donde X e Y son dos matrices cuadradas de orden dos, verificando:

$$\mathbf{5X+3Y=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -4 & 15\end{pmatrix}} \qquad \mathbf{3X+2Y=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 9\end{pmatrix}}$$

Llamamos $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -4 & 15\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 9\end{pmatrix}$. Tenemos que resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{l}5X+3Y=A\\ 3X+2Y=B\end{array}\right\} \quad \begin{array}{rcl}(-3)\cdot 1^{a} & \to & -15X-9Y=-3A\\ 5\cdot 2^{a} & \to & 15X+10Y=5B\\ \hline \text{Sumando:} & & Y=5B-3A\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}2\cdot 1^{a} & \to & 10X+6Y=2A\\ -3\cdot 2^{a} & \to & -9X-6Y=-3B\\ \hline \text{Sumando:} & & X=2A-3B\end{array}$$

Por tanto:

$$X=2\begin{pmatrix}2 & 0\\ -4 & 15\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}2 & -1\\ -2 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ -8 & 30\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & -3\\ -6 & 27\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 3\end{pmatrix}$$

$$Y=5\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 9\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}2 & 0\\ -4 & 15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -5\\ -10 & 45\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6 & 0\\ -12 & 45\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -5\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

Calculamos X^2 e Y^2:

$$X^2=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 12\\ -8 & 3\end{pmatrix}; \quad Y^2=\begin{pmatrix}-1 & -5\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -5\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9 & 5\\ -2 & -10\end{pmatrix}$$

Luego:

$$X^2+Y^2=\begin{pmatrix}-5 & 12\\ -8 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-9 & 5\\ -2 & -10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-14 & 17\\ -10 & -7\end{pmatrix}$$

19. Hallar la matriz $X^2 - Y^2$ donde X e Y son dos matrices cuadradas de orden dos que verifican:

$$5X+3Y=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -4 & 15\end{pmatrix} \qquad 3X+2Y=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 9\end{pmatrix}$$

20. a) ¿Para qué valores de "m" la matriz A = $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & -m\\ 0 & -m & -2\end{pmatrix}$ no tiene inversa.

b) Calcular la matriz inversa de A para m=0.

21. Despejar la matriz X en la siguiente ecuación *2A – AX = BX* y calcular su valor siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \; y \; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2A - AX = BX \Rightarrow AX + BX = 2A \Rightarrow (A+B)X = 2A \Rightarrow (A+B)^{-1}(A+B)X = (A+B)^{-1}\cdot(2A)$$
$$\Rightarrow I\cdot X = (A+B)^{-1}\cdot(2A) \Rightarrow X = (A+B)^{-1}\cdot(2A)$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad (A+B)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad ; \quad X = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

22. Determinar la matriz *X* en la siguiente ecuación matricial: *A·X =B – X,* siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot X = B - X \Rightarrow A\cdot X + X = B \Rightarrow (A+I)\cdot X = B \Rightarrow (A+I)^{-1}(A+I)\cdot X = (A+I)^{-1}\cdot B \Rightarrow X = (A+I)^{-1}\cdot B$$

$$A+I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad cálculo \; de \; (A+I)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

23. Dadas las matrices: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$**,** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$**,** $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ **y** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$**.**

Averiguar cuáles deberán ser A,B,C **y** D **para que se pueda realizar** $A\cdot B^{-1}\cdot C^{t} + D$ **y calcular su valor.**

24. Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix}6&-1&0\\3&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}x&z&0\\z&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix}3\\2\\x+y\end{pmatrix}$

Determinar los valores de *x* , *y* , *z* sabiendo que *A · B = C · D*

$$A{\cdot}B=\begin{pmatrix}6x-y\\3x+2y\\z\end{pmatrix} \quad ; \quad C\cdot D=\begin{pmatrix}3x+2z\\3z-2\\x+y\end{pmatrix} \quad ; \quad A{\cdot}B=C{\cdot}D \Rightarrow \left.\begin{matrix}6x-y=3x+2z\\3x+2y=3z-2\\z=x+y\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}3x-y-2z=0\\3x+2y-3z=-2\\x+y-z=0\end{matrix}\right\}$$

Se resuelve el sistema por el método de Gauss. Solución: x = 6 ; y = 2 ; z = 8

25. Dadas las matrices B=$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$**, C=** $\begin{pmatrix}1&-3&5\\-2&4&-6\end{pmatrix}$ **y D=** $\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\end{pmatrix}$

Hallar la matriz X tal que X·B + C = D.

26. Sean las matrices A=$\begin{pmatrix}3&0&2\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ **y B=**$\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$**.**

a) Calcular A^{-1}

b) Resolver la ecuación matricial AX + 2AB = B

27. Calcular la matriz X que verifica AX=BB^t, donde A=$\begin{pmatrix}2&1\\3&-2\end{pmatrix}$ **y B=**$\begin{pmatrix}0&1&0\\3&-1&2\end{pmatrix}$

28. Sean X una matriz 2x2, I la matriz identidad 2x2 y B=$\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}$**. Hallar X sabiendo que BX+B=B^2+I.**

29. Dada la matriz P=$\begin{pmatrix}1&2&a\\2&a+1&0\\3&4&5\end{pmatrix}$**, determinar los valores del número real "a" para los cuales existe la matriz inversa de P.**

30. Hallar las matrices A cuadradas de orden 2, que verifican la igualdad:

$$A\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}A$$

31. Dadas las matrices P=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y A=$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, hallar razonadamente la matriz B sabiendo que BP=A.

32. Dadas las matrices A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, y C=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, hallar las matrices X que satisfacen XC+A=C+A^2.

33. Dada la matriz B=$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ hállese una matriz X que verifique la ecuación XB+B=B^{-1}.

34. Dadas las matrices P=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y A=$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, hallar la matriz B sabiendo que P^{-1}BP=A.

35. Dadas las dos matrices A=$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y B=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, calcular X que verifique la ecuación XA – B = 2A.

36. Se consideran las matrices A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y B=$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ donde m es un número real. Encontrar los valores de m para los que AB tenga inversa.

37. Dadas las matrices A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, hallar para qué valores de m la matriz B+mA no tiene inversa.

38. Sean las matrices: A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; B = $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; C = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Resolver la ecuación: XAB − XC = 2C.

➔ **Si A y B son dos matrices cuadradas que verifican AB=B^2, ¿Cuándo se puede asegurar que A=B?**

39. Sean A, B y X tres matrices cuadradas del mismo orden que verifican la relación A·X·B = I, siendo I la matriz unidad.

a) Si el determinante de A vale -1 y el de B vale 1, calcular razonadamente el determinante de X.

b) Calcular de forma razonada la matriz X si A=$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **y B=**$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

40. Calcular razonadamente la matriz A sabiendo que se verifica la igualdad.

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

41. Sean las matrices A=$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **y B=**$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$**. Resolver la ecuación matricial AX-2AB=B**

42. Se consideran las siguientes matrices: A = $\begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$; **B =** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ **y C =** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) **Obtener el valor de "k" para que el determinante de la matriz A – 2B sea nulo.**
b) **Determinar si las matrices $C \cdot C^t$ y $C^t \cdot C$ son invertibles. En caso afirmativo, calcula la inversa de ambas.**

43. Dada la matriz B=$\begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix}$**, hallar para que valores de m se verifica que B^2= 2B + I, y para esos valores escribir la matriz inversa de B.**

44. Dadas las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **y B =** $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, **y sean B^t la matriz traspuesta de B e I la matriz identidad de orden 3. Calcular la matriz X que verifica: $AB^tX = X + 2B$.**

➔ **Sea A una matriz cuadrada de orden 2 verificando que $2 \cdot A^2 = A$. Calcular razonadamente los posibles valores del determinante de A.**

➔ **Sean A y B matrices cuadradas con det(A)=2 y det(B)=3. Razonar cuánto vale el determinante de la matriz $B^{-1} \cdot A \cdot B$.**

➔ **Si los determinantes de las matrices cuadradas de orden tres A y $4A^{-1}$ son iguales, calcular el determinante de A. ¿Existe la matriz inversa de A?**

45. Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 1 & 0 & m \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) **Calcular los valores de "m" para los cuales la matriz A tiene inversa.**

b) **Para m = 0, calcular A^3 y A^{25}.**

46. Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$**, calcular todos los valores de "a" y "b" para que $A^{-1} = A^t$.**

47. Sean las matrices A=$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ **B =** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ **C =** $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ **y D =** $\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$**.**

Despejar la matriz X en la ecuación $A^{-1}XB - 2CD = B^2$ y calcularla.

48. Si la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ **satisface la igualdad $A^2 + xA + yI = 0$, siendo I la matriz identidad de orden 2. Hallar los valores de x e y.**

Calculamos A^2:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -15 & 10 \end{pmatrix}$$

Así:

$$A^2 + xA + yI = \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -15 & 10 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+x+y & 10+2x \\ -15-3x & 10+4x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego, ha de ser:

$$\left.\begin{array}{r} -5+x+y=0 \\ 10+2x=0 \\ -15-3x=0 \\ 10+4x+y=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to\ y=5-x=5-(-5)=10 \\ \to\ x=-5 \\ \to\ x=-5 \\ \to\ y=-10-4x=-10+20=10 \end{array}$$

Por tanto: $x = -5$; $y = 10$

49. Sea la matriz A = $\begin{pmatrix} -1/2 & x & 0 \\ y & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$**. Calcula el valor de x e y para que se cumpla $A^{-1} = A^t$.**

50. Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Determina la matriz $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ que verifica la ecuación matricial $AA^tX = 6X$.

51. Sean las matrices A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcular el rango de las matrices A y A+I siendo I la matriz identidad de orden 3.

b) Despeja y calcula X de la ecuación $A \cdot X + X = B$.

52. Dadas las matrices $A = (-1\ 0\ 1)$, $B = (3\ 0\ 1)$ y $C = (4\ -2\ 0)$, calcular la matriz X que verifica:

$$B^t \cdot A \cdot X + C^t = X$$

siendo B^t e C^t las traspuestas de B y C respectivamente.

53. Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) ¿Qué relación existe entre su inversa A^{-1} y su traspuesta A^t?

b) Calcular la matriz X que verifica $AX + X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

54. Una persona obtuvo 6 000 € de beneficio por invertir un total de 60 000 € en tres empresas A, B y C. La suma del dinero invertido en A y en B fue 5 veces el invertido en C, y los beneficios fueron el 5% en A, el 10% en B y el 20% en C. Calcular la cantidad invertida en cada empresa.

Sean x, y, z las cantidades invertidas en las empresas A, B y C respectivamente.

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=60000 \\ x+y&=5z \\ 0,05x+0,1y+0,2z&=6000 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 60000 \\ 1 & 1 & -5 & 0 \\ 0,05 & 0,1 & 0,2 & 6000 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-0,05F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 60000 \\ 0 & 0 & -6 & -60000 \\ 0 & 0,05 & 0,15 & 3000 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x+y+z&=60000 \\ -6z&=-60000 \\ 0,05y+0,15z&=3000 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x&=20000 \\ z&=10000 \\ y&=30000 \end{aligned}$$

Se invirtieron 20000 € en la empresa A, 10000 € en la empresa B y 30000 € en la empresa C.

55. Un autobús urbano transporta en hora punta 90 viajeros de tres tipos: viajeros que pagan el billete entero, que vale 1 €; estudiantes que tienen un 25% de descuento al presentar el carnet; jubilados de la localidad que únicamente pagan el 50% del precio del billete. La recaudación del autobús en ese viaje fue de 64 €. Calcula el número de viajeros de cada clase sabiendo que el número de jubilados era el mismo que el número del resto de viajeros. Resolver por el MÉTODO DE GAUSS.

56. Una autoescuela tiene 3 sucursales en Pontevedra. El número total de matriculados es 352, pero los matriculados en la tercera son sólo una cuarta parte de los matriculados en la primera. Además, la diferencia entre los matriculados en la primera y en la segunda es inferior en dos unidades al doble de los matriculados en la tercera. Calcular cuántos están matriculados en cada sucursal resolviendo el problema por el MÉTODO DE GAUSS.

57. Una fábrica de televisores tiene una producción semanal fija de 42 unidades. La fábrica abastece a tres tiendas que demandan toda la producción. En una determinada semana la primera tienda solicitó tantas unidades como la segunda y la tercera juntas, mientras que la segunda tienda solicitó un 20% más que la suma de la mitad de lo pedido por la primera más la tercera parte de lo pedido por la tercera. ¿Cuántos fueron los televisores solicitados por cada tienda dicha semana? Resuelve utilizando el MÉTODO DE GAUSS.

58. Juan decide invertir una cantidad de 12000 € en bolsa, comprando acciones de tres empresas, A, B y C. Invierte en A el doble que en B y en C juntas. Transcurrido un año. Las acciones de la empresa a se han revalorizado un 4%, las de B un 5% y las de C han perdido un 2% de su valor original. Como resultado de todo ello, Juan ha obtenido un beneficio de 432,5 €. Determinar cuánto invirtió Juan en cada una de las empresas resolviendo por el MÉTODO DE GAUSS.