MATRICES

1. Matriz: Definición y elementos.
2. Tipos de matrices.
3. Operaciones con matrices.
4. Matriz inversa de una matriz cuadrada.
5. Rango de una matriz

Las matrices, vistas de una forma sencilla, no son más que una forma ordenada de colocar una serie de datos, donde a cada dato le asignamos una posición.

Desde el punto de vista matemático, sin embargo, su trascendencia va mucho más allá tanto por su estructura formal como por la multitud de sus aplicaciones, constituyendo una herramienta fundamental.

1. Matriz: Definición y elementos.

Definición: Llamaremos matriz de orden o dimensión $m \times n$ a un conjunto de m·n elementos reales dispuestos en m filas y en n columnas. Los representaremos de la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \; a_{12} \; .... \; a_{1n} \\ a_{21} \; a_{22} \; .... \; a_{2n} \\ .... \; .... \; ...... \\ a_{m1} \; a_{m2} \; .... \; a_{mn} \end{pmatrix}$$

Definición: Llamamos elemento a_{ij} al que pertenece a la fila i y a la columna j.

Ejemplo: La siguiente matriz tiene dimensión 3x4.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$ Además, $a_{23} = 5$ y $a_{33} = 6$

Si llamamos a la matriz A, también denotaremos a dicha matriz como $A = (a_{ij})_{m \times n}$ donde los a_{ij} son elementos reales. Al conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$ sobre el conjunto de los números reales lo denotaremos como $M_{m \times n}(\Re)$.

1. Calcular la dimensión de la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & -3 & -3 \\ 2 & 4 & 0 & -6 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Identificar los elementos a_{31} y a_{43} en la matriz B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$.

Vectores fila y vectores columna

Dada una matriz cualquiera, por ejemplo, $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ podemos escribirla separando sus filas, o bien, sus columnas, es decir,

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_1=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad A_2=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{A tiene dos vectores fila}$$

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{A}^1=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathrm{A}^2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathrm{A}^3=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{A tiene tres vectores columna}$$

Esto significa que podemos pensar en una matriz bien como una tabla de elementos, bien como un conjunto de vectores puestos en fila, bien como un conjunto de vectores puestos en columna.

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} \mathrm{a}_{11}\ \mathrm{a}_{12} \ldots\ldots\ldots \mathrm{a}_{1\mathrm{n}} \\ \mathrm{a}_{21}\ \mathrm{a}_{22} \ldots\ldots\ldots \mathrm{a}_{2\mathrm{n}} \\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots \\ \mathrm{a}_{\mathrm{m}1}\ \mathrm{a}_{\mathrm{m}2} \ldots\ldots\ldots \mathrm{a}_{\mathrm{mn}} \end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \ldots \\ A_m \end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix} A^1 & A^2 & \ldots\ldots & A^n \end{pmatrix}$$

Definición: Llamaremos submatriz de una matriz A de orden $m \times n$, a otra matriz M resultante de eliminar p filas y q columnas de A, donde p y q son números naturales tales que $0 \leq p < m \quad 0 \leq q < n$

Ejemplo: $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

Al eliminar la 2ª fila y la 3ª columna, nos queda: $M=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Matrices iguales.

Dos matrices A y B diremos que son iguales si tienen la misma dimensión y si los elementos que ocupan la misma posición son iguales, es decir,

A = (a_{ij}) y B = (b_{ij}) son iguales si $a_{ij} = b_{ij} \quad \forall_{ij}$

Ejemplo: Si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \\ c=-3 \\ d=5 \end{cases}$

2. Tipos de matrices.

Algunas matrices reciben nombres especiales según sea su dimensión o sus elementos.

Según su dimensión:

Matriz fila.

Llamaremos matriz fila a la matriz que solo tiene una fila, es decir, a una matriz de orden $1\times n$

Ejemplo: $A=\begin{pmatrix}1 & -4 & 3 & 0\end{pmatrix}$

Matriz columna.

Llamaremos matriz columna a la matriz que solo tiene una columna, es decir, a una matriz de orden $m\times 1$

Ejemplo: $A=\begin{pmatrix}2\\ 4\\ -1\end{pmatrix}$

Matriz cuadrada.

Llamamos matriz cuadrada de orden n a aquella que tiene igual número de filas que de columnas, por tanto su orden es $n\times n$. Al conjunto de todas las matrices de orden n sobre el conjunto de los números reales lo denotaremos $M_{n(}(\Re)$.

Ejemplo: $A=\begin{pmatrix}4 & -8 & 3\\ 7 & 1 & 0\\ 3 & 5 & -2\end{pmatrix}$

Dada una matriz cuadrada de orden n, A=(a_{ij}), llamaremos diagonal principal de A a los elementos a_{ii}, donde $1\le i\le n$.

$A=\begin{pmatrix}4 & -8 & 3\\ 7 & 1 & 0\\ 3 & 5 & -2\end{pmatrix}$ es la diagonal principal

De igual forma llamaremos diagonal secundaria a los elementos a_{ij} tal que i + j = n + 1.

$A=\begin{pmatrix}4 & -8 & 3\\ 7 & 1 & 0\\ 3 & 5 & -2\end{pmatrix}$ es la diagonal secundaria

Según sus elementos:

Matriz nula.

Llamaremos matriz nula a aquella en la que todos sus elementos son cero.

Ejemplo: $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Matriz triangular.

Dada una matriz *cuadrada* A entonces:

Diremos que A es una matriz triangular superior si todos los elementos por debajo de la diagonal principal son ceros.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Diremos que A es una matriz triangular inferior si todos los elementos por encima de la diagonal principal son ceros.

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Matriz diagonal.

Diremos que A es una matriz diagonal si es una matriz triangular superior e inferior a la vez, es decir, es la que tiene todos sus elementos nulos excepto los de la diagonal principal.

Ejemplo: $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Matriz escalar.

Llamaremos matriz escalar a una matriz diagonal en la que todos los elementos de la diagonal principal son iguales.

Ejemplo: $\mathrm{E} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Matriz identidad o matriz unidad.

Llamamos matriz unidad o matriz identidad de orden n, a una matriz escalar especial en la que todos los elementos de la diagonal principal son 1. A dicha matriz la denotamos por I o por I_n, donde n indica el orden de la matriz.

Ejemplo: $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Operaciones con matrices.

A la hora de trabajar con matrices, vamos a definir las siguientes operaciones:

- Suma de matrices.
- Producto de una matriz por un escalar.
- Producto de dos matrices.
- Transposición de matrices.

3.1. Suma de matrices

Dadas dos matrices A = (a_{ij}) y B = (b_{ij}), A,B$\in M_{m\times n}(\Re)$, (de la misma dimensión) entonces, se define la matriz suma de A y B como otra matriz C = $(c_{ij})\in M_{m\times n}(\Re)$ tal que:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall i, j \in \{1,...., n\}$$

Así pues, de la anterior definición de suma de matrices extraemos como consecuencia que, para poder sumar dos matrices, éstas tienen que tener el mismo orden, y que la suma se hace elemento a elemento.

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

3. Dadas las siguientes matrices A = $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$, calcular:

a) A + B b) B - A

Propiedades de la suma de matrices:

Con la definición vista de suma de matrices elemento a elemento es fácil imaginar que las propiedades de la suma de matrices son las mismas que la de la suma de números reales.

Considerando entonces las matrices A, B, C $\in M_{m\times n}(\Re)$, tendremos las siguientes propiedades:

1.- <u>Asociativa</u>: A + (B + C) = (A + B) + C

2.- <u>Conmutativa</u>: A + B = B + A

3.- <u>Existe elemento neutro</u>: El elemento neutro será la matriz nula 0, puesto que

A + 0 = A, sea cual sea la matriz A.

4.- <u>Existe elemento opuesto</u>: La matriz opuesta de A = (a_{ij}) será la matriz

–A = (-a_{ij}), ya que A + (-A) = 0.

3.2. Producto de una matriz por un escalar

Dada la matriz A$\in M_{m\times n}(\Re)$ y un número **k**$\in\Re$, entonces la <u>matriz producto k·A</u> será el producto de multiplicar cada elemento de A por k, es decir si A = (a_{ij}) entonces: k·A = (k·a_{ij})

Ejemplo: $$2\cdot\begin{pmatrix}7 & 1\\ 5 & 3\\ -4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & 2\\ 10 & 6\\ -8 & 2\end{pmatrix}$$

<u>Propiedades del producto de una matriz por un escalar:</u>

Igual que decíamos antes para la suma de matrices, las propiedades del producto de una matriz por un escalar serán las mismas que las del producto de números reales. Así sean A, B $\in M_{m\times n}(\Re)$ y $\lambda,\alpha\in\Re$ tendremos las siguientes propiedades:

1.- <u>Distributiva respecto de la suma de matrices:</u> λ·(A + B) = λ·A + λ·B

2.- <u>Distributiva respecto de la suma de escalares:</u> (λ + α)·A = λ·A + α·A

3.- <u>Asociativa mixta:</u> λ·(α·A) = ($\lambda\cdot\alpha$)·A

4.- <u>Existe elemento neutro:</u> Dicho elemento será el 1 (nº real), ya que: 1·A = A

4. Sean las matrices A =$\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ y B =$\begin{pmatrix}12 & 8\\ 8 & 4\end{pmatrix}$, calcular:

a) 2A + $\frac{1}{4}$B

b) 5A – 4B

c) 5(B – A) + 2(3B – 2A) + 3I siendo I la matriz unidad de orden 2.

3.3. Producto de dos matrices.

Antes de definir el producto de dos matrices con carácter general, vamos a definir el producto de una matriz fila por una matriz columna:

Producto de una matriz fila por una matriz columna:

Si consideramos una matriz fila A y otra matriz columna B, (ambas con el mismo número de elementos) entonces su producto será:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots\ldots & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ \ldots. \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots\ldots + a_n \cdot b_n$$

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = 1 \cdot 6 + 2 \cdot (-4) + 3 \cdot 5 = 6 - 8 + 15 = 13$

⇨ El resultado de multiplicar una fila por una columna es un número.

Producto de dos matrices.

Dada una matriz A = $(a_{ij}) \in M_{m\times n}(\Re)$ y otra matriz B = $(b_{ij}) \in M_{n\times p}(\Re)$, es decir, tales que el número de columnas de A es igual al número de filas de B, entonces se define la matriz producto A·B como otra matriz C = $(c_{ij}) \in M_{m\times p}(\Re)$, tal que c_{ij} será el producto de la fila i de A por la columna j de B, es decir:

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots\ldots & a_{in} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \ldots. \\ \ldots. \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots\ldots + a_{in} \cdot b_{nj} \text{ o también } c_{ik} = \sum_{h=1}^{n} a_{ih} . b_{hk}$$

Ejemplo:

$$\underset{2\text{x}3}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}} \underset{3\text{x}4}{\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 5 \\ -5 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}} = \underset{2\text{x}4}{\begin{pmatrix} -4 & 15 & 7 & 10 \\ 5 & 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}}$$

iguales

Explicación:

Para hallar $c_{11} = -4$ hemos hecho lo siguiente: elegimos la fila 1 de A y la multiplicamos por la columna 1 de B:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 3} \\ 0 \quad -1 \quad 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 5 \\ -5 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow c_{11} = 1 \cdot 6 + 2 \cdot (-5) + 3 \cdot 0 = -4$$

Para hallar $c_{23} = -1$ hemos hecho lo siguiente: elegimos la fila 2 de A y la multiplicamos por la columna 3 de B:

$$\begin{pmatrix} 1 \quad 2 \quad 3 \\ \boxed{0 \quad -1 \quad 1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 5 \\ -5 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow c_{23} = 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 1 = -1$$

Consecuencias:

➔ Dos matrices A y B son multiplicables si el número de columnas de A es igual al número de filas de B. (en el ejemplo anterior, A es de dimensión **2x3** y B de dimensión **3x4**)

➔ La matriz producto C tendrá tantas filas como A y tantas columnas como B. (**2x4**)

Propiedades del producto de matrices

Sean A $\in M_{m \times n}(\Re)$, y B, C $\in M_{n \times p}(\Re)$, entonces se verifican las siguientes propiedades:

1.- No es una ley interna, ya que las matrices que se multiplican no tienen por qué ser del mismo orden, y la matriz resultado normalmente no es de la misma dimensión que ninguna de las que se multiplica.

$$\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times p}{B} = \underset{m\times p}{C}$$

Vemos que C no es de la misma dimensión que A, ni que B.

2.- Asociativa: Si A $\in M_{m \times n}(\Re)$, B $\in M_{n \times p}(\Re)$ y C $\in M_{p \times q}(\Re)$ entonces:

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

3.- No es conmutativa.

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Ejemplo: Sean A= $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Está claro que podemos realizar A · B $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Sin embargo, es imposible realizar B · A $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

Ejemplo:

Si A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ entonces: A · B = $\begin{pmatrix} -1 & 10 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$ pero B · A = $\begin{pmatrix} 11 & -6 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$

4.- <u>Distributiva:</u>

$$A\cdot(B + C) = A\cdot B + A\cdot C$$

Además de las propiedades anteriores, que son válidas para todas las matrices, independientemente de su orden, si consideramos una matriz cuadrada de orden n $A \in M_n(\Re)$, podemos añadir las siguientes:

5.- <u>Existe elemento neutro:</u> El elemento neutro del producto de matrices 'cuadradas' de orden n será la matriz unidad o matriz identidad I, puesto que:

$$A\cdot I = I\cdot A = A$$

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

6.- <u>Elemento inverso:</u> Dada una matriz cuadrada A, el elemento inverso A^{-1} cumple:

$$A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I$$

Ejemplo:

Si consideramos la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ podemos probar que la matriz = $\begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{-3}{4} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$ verifica

que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{-3}{4} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{por tanto } A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{-3}{4} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

Pero, existen matrices que no tienen elemento inverso.

Ejemplo: $\begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Observaciones:

1.- Si A·B = 0, entonces no necesariamente se tiene que verificar que A = 0 o que B = 0.

Aunque esta es una propiedad evidente de los números reales, en las matrices no tiene por qué ocurrir. La causa o la propiedad que está detrás de esto es la existencia (para los números reales) o la no existencia (para las matrices) de elemento inverso.

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ninguna de las matrices multiplicadas es la matriz nula, pero su producto sí lo es. La causa es que ninguna de esas matrices tiene inversa.

2.- En general, $(A + B)^2 \neq A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2$.

La propiedad que subyace detrás de esta afirmación es la no conmutatividad de las matrices, en general. Veámoslo más claro:

$$(A + B)^2 = A^2 + A \cdot B + B \cdot A + B^2 \neq A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2$$

puesto que en general $A \cdot B \neq B \cdot A$.

3.- Por la misma razón, $(A - B)^2 \neq A^2 - 2 \cdot A \cdot B + B^2$.

4.- Y de igual forma, $(A + B) \cdot (A - B) \neq A^2 - B^2$.

5. Hallar todas las matrices X que satisfacen la ecuación $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} . X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

6. Dadas tres matrices A, B y C. Se sabe que A·B·C es una matriz de orden 2x3 y que B·C es una matriz de orden 4x3, ¿cuál es el orden de A? **[Mat II, Xuño 2002]**

7. Se consideran dos matrices A y b que verifican $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$ y $A - B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ Calcular $A^2 - B^2$. **[Mat II, Xuño 2003]**

3.4. Transposición de matrices

Matriz traspuesta.

Dada una matriz A = (a_{ij}), se llama traspuesta de A, y se representa por A^t, a la matriz que se obtiene intercambiando en A las filas por las columnas. Si A es de orden $m \times n$, A^t es de orden $n \times m$

Ejemplo:

Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ que es de orden 2 x 3 $A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ que es de orden 3 x 2.

Propiedades de las matrices traspuestas:

1.- $(A^t)^t = A$
2.- $(A + B)^t = A^t + B^t$
3.- $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$
4.- $(A:B)^t = B^t \cdot A^t$

Matriz simétrica.

Dada una matriz cuadrada A, diremos que A es una matriz simétrica si es igual a su traspuesta, es decir, si $A^t = A$.
(el elemento $a_{ij} = a_{ji}$.)

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 7 \\ 0 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ y $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 7 \\ 0 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ por tanto, A es simétrica

⇨ Si $A^t = -A$, A es una matriz antisimétrica.

8. Sean A, B e C tres matrices tales que el producto A·B·C es una matriz 3x2 y el producto $A \cdot C^t$ es una matriz cuadrada, siendo C^t la traspuesta de C. Calcular las dimensiones de A, B y C. **[Mat II, Set 2006]**

9. Calcular las matrices cuadradas X que verifican $P \cdot X = X \cdot P$, siendo $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

[xuño 1997]

10. Dadas las siguientes matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$, hallar una matriz simétrica P que sea regular y tal que $P \cdot B = A \cdot P$. **[xuño 1998]**

4. Matriz inversa de una matriz cuadrada.

Sea una matriz cuadrada A. De existir la matriz inversa de A, la representaremos por A^{-1} y la llamaremos matriz inversa de A.

⇨ Se cumple que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

Definición: Llamaremos matriz regular a toda matriz cuadrada que tenga inversa.

Definición: Llamaremos matriz singular a toda matriz cuadrada que no admita inversa.

Ejemplos:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz regular porque tiene inversa.

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ es una matriz singular porque no tiene inversa

Cálculo de la matriz inversa.

Vamos a calcular la matriz inversa mediante sistemas de ecuaciones a partir de la definición.

Ejemplo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Debemos calcular $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que cumple $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a-c & 2b-d \\ a+3c & b+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicando la igualdad de matrices obtenemos $\left.\begin{matrix} 2a-c=1 \\ a+3c=0 \end{matrix}\right\}$ y $\left.\begin{matrix} 2b-d=0 \\ b+3d=1 \end{matrix}\right\}$

y las soluciones son:

$$a = \frac{3}{7} \quad b = \frac{1}{7} \quad c = -\frac{1}{7} \quad y \quad d = \frac{2}{7}$$

La matriz inversa será:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: Vamos a calcular la inversa de la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Se trata de hallar una matriz $A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ que verifique que $A \cdot A^{-1} = I$, es decir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tendremos que resolver tres sistemas de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, luego la matriz pedida será

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{-3}{4} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

⇨ Podemos probar que, efectivamente, es A^{-1} la inversa de A.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{-3}{4} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

11. Una matriz cuadrada A tiene la propiedad de que $A^2 = 2A + I$, donde I es la matriz unidad. Demostrar que A admite matriz inversa, y obtenerla en función de A.

12. Encontrar todas las matrices $C=\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$ que verifiquen la igualdad

$$C\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}\cdot C$$

13. Si A es una matriz cuadrada, ¿la matriz $A+A^t$ es igual a su traspuesta?

14. Sean las matrices $B=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$. Calcular la matriz A, sabiendo que $A^2=B$ y $A^3=C$.

15. Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2-3A= -2I$ (siendo I la identidad). Calcular A^{-1} en función de A.

5. Rango de una matriz.

Dada una matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ de orden mxn,

Definición: Se define **Rango de la matriz A,** y se denota Rg(A), al número de filas o columnas de A linealmente independientes.

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Rg(A) = 3 pues observamos que cada una de sus filas o columnas son independientes,

$F_1 = (3 \ \ 0 \ \ 0)$
$F_2 = (0 \ \ 2 \ \ 0)$
$F_3 = (0 \ \ 0 \ \ 1)$

- Rg(B) = 2 porque las columnas segunda y tercera son combinación lineal de las dos primeras, que son las dos únicas independientes:

$C_1 = (1 \ \ 0)$
$C_2 = (0 \ \ 1)$
$C_3 = (2 \ \ 1) \qquad C_3 = 2C_1 + 1C_2$
$C_4 = (3 \ \ 2) \qquad C_4 = 3C_1 + 2C_2$

A la hora de estudiar el rango de una matriz existe un teorema muy importante.

Teorema del rango: En una matriz cualquiera, el número de filas linealmente independientes es igual al número de columnas linealmente independientes.

Por tanto, a la hora de calcular el rango de una matriz lo podemos hacer por filas o por columnas.

Además, en una matriz cualquiera de orden mxn el rango máximo posible será el valor más pequeño entre m y n.

$$\text{Máximo } Rg(A) = \text{Min } (m,n)$$

Ejemplo: A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Máximo nº de filas independientes = 2.
Máximo nº de columnas independientes = 4

Luego, al tener que ser iguales, Rg(A) = 2 como mucho.

OPERACIONES EN FILAS (O COLUMNAS) QUE DEJAN INVARIANTE EL RANGO:

A la hora de calcular el rango de una matriz, podremos realizar determinadas operaciones con las filas y las columnas de forma que el rango no varíe:

1.- Si en una matriz multiplicamos una fila (o columna) por un número distinto de 0, la matriz resultante tiene el mismo rango que la anterior.

2.- Si en una matriz a una fila (o columna) le sumamos otra fila (o columna), la matriz resultante tiene el mismo rango que la anterior.

3.- Si en una matriz a una fila (o columna) le sumamos una combinación lineal de las restantes, la matriz resultante tiene el mismo rango que la anterior.

4.- Si en una matriz eliminamos una fila (o columna) cuyos elementos sean todos 0, la matriz resultante tiene el mismo rango que la anterior.

5.- Si en una matriz eliminamos una fila (o columna) que sea igual o proporcional a otra, la matriz resultante tiene el mismo rango que la anterior.

6.- Si en una matriz intercambiamos dos filas (o columnas) entre sí, la matriz resultante tiene el mismo rango que la anterior.

16. Calcular el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$

17. Calcular el valor de los parámetros a y b para la matriz A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & a & 0 & b \end{pmatrix}$ tenga rango igual a 2. ***[xuño 1993]***

18. Sean las matrices A= $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, C= $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, y D= $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a. Hallar la matriz AB^t donde B^t indica la matriz traspuesta de B.
b. Hallar el rango de la matriz A^tD.

CÁLCULO DEL RANGO. MÉTODO DE GAUSS.

El método de Gauss consiste en llegar, mediante las operaciones vistas anteriormente que me dejan invariante el rango, a una matriz escalonada a partir de nuestra matriz original, Una vez hayamos obtenido una matriz escalonada (a_{ij}=0 cuando i>j), y después de haber eliminado las filas o columnas nulas y las iguales o proporcionales a otras, el rango será el menor número de filas o columnas que nos queden.

Aplicaciones del cálculo del rango.

Ejemplos:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{f_3´=f_3+f_1}{\overset{f_2´=f_2-2f_1}{\Longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \underset{f_3´=f_3+2f_2}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rg = 2$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{f_3+f_1}{\overset{f_2-2f_1}{\Longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \overset{f_3+3f_2}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow rg = 3$

- ⇨ Una matriz cuadrada A de orden n tendrá inversa si y sólo si su rango es n.

De aquí, la matriz A del ejemplo anterior no tendrá inversa porque su orden es 3 pero su rango es 2. Sin embargo, la matriz B, sí tiene inversa ya que su orden y su rango coinciden.

19. Calcula el rango de la matriz A por el Método de Gauss

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 7 \\ -1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

20. Dadas las matrices: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Averiguar cuáles deberán ser A, B, C y D para que se pueda realizar $A \cdot B^{-1} \cdot C^t + D$ y calcular su valor.