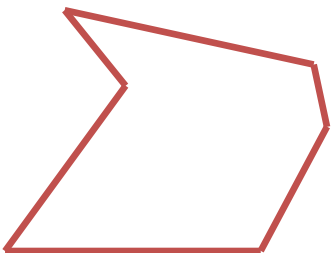
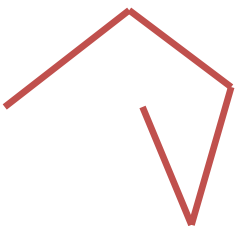
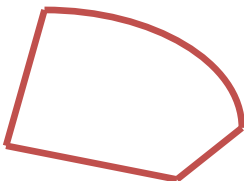


Unidad 1: elementos de geometría

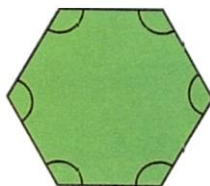
1.- los polígonos.

Un polígono es un trozo de plano limitado por una línea poligonal (sin curvas) cerrada.

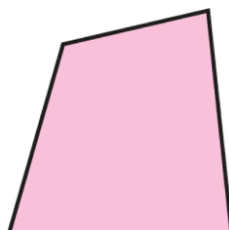
Es un polígono	No son polígonos	
		

Hay dos clases de polígonos:

- **Polígonos regulares.** Tienen todos sus **lados iguales** y sus **ángulos iguales**.



- **Polígonos irregulares.** Tienen **lados** y **ángulos distintos**



A continuación estudiaremos algunos tipos de polígonos: los **triángulos** y los **cuadriláteros**.

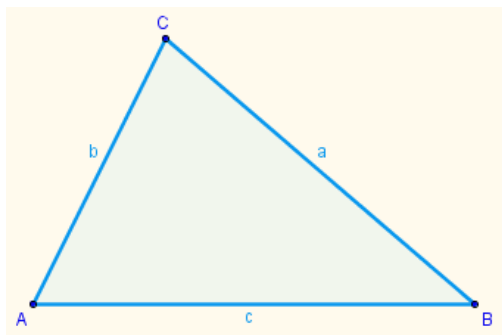
Los Triángulos

Un triángulo es un polígono de tres lados

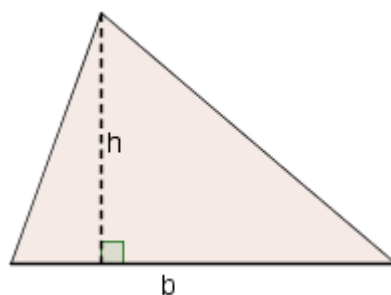
En un triángulo podemos distinguir los siguientes elementos

- **Lados.** Son los segmentos que determinan el triángulo. Se nombran con letras minúsculas.

- **Vértices.** Son los puntos donde se unen los lados. Se nombran con letras mayúsculas.

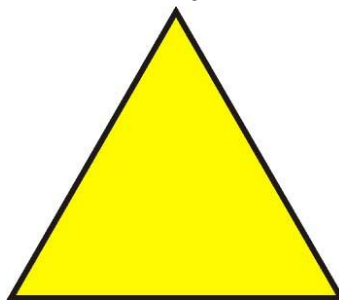


- **Base.** Es uno cualquiera de sus lados
- **Altura.** Es el segmento perpendicular a la base que sale del vértice opuesto

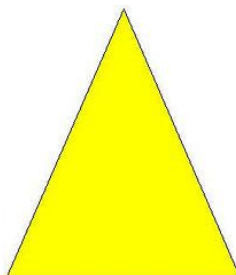


Todos los triángulos no son iguales, sino que según sean sus lados existen varios tipos, a saber:

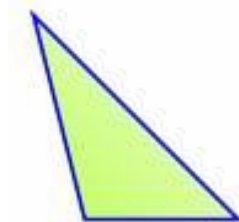
- **Triángulo equilátero.** Tiene sus tres lados y sus tres ángulos iguales.



- **Triángulo isósceles.** Tienen dos lados y dos ángulos iguales.



- **Triángulo escaleno.** Tiene sus tres lados y sus tres ángulos desiguales.



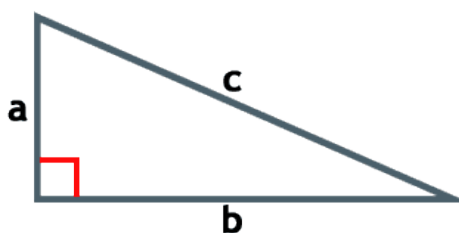
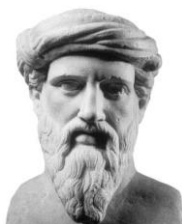
Un triángulo muy particular: el triángulo rectángulo

Un triángulo es rectángulo cuando uno de sus ángulos es recto, es decir, mide 90° .

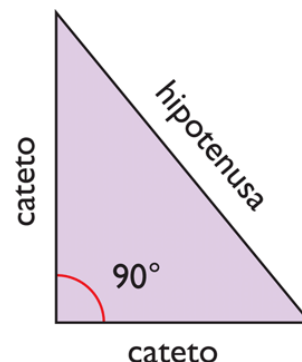
Los lados que forman el ángulo recto se llaman **catetos**. El lado opuesto al ángulo recto se llama **hipotenusa**.

En un triángulo rectángulo se cumple una de las propiedades más famosas de la historia de las matemáticas:

El teorema de Pitágoras.

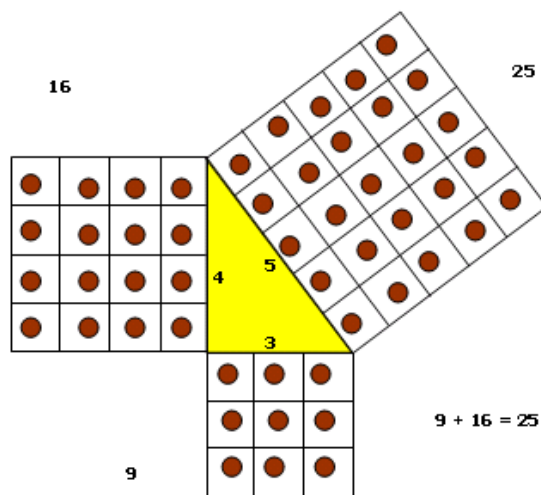


$$a^2 + b^2 = c^2$$



La suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa

Si no te lo crees, observa el siguiente dibujo y comprobarás que Pitágoras tenía razón.

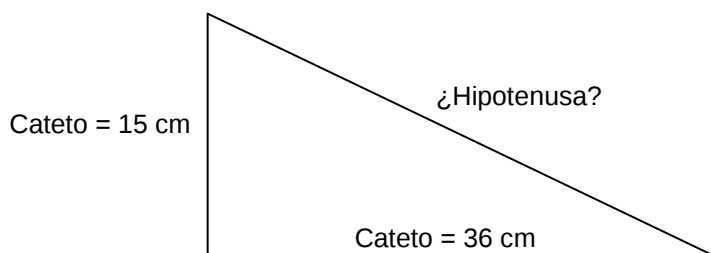


Ejercicios

1. (Ejemplo resuelto). Calcula el valor de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 15 cm y 36 cm respectivamente.

Solución:

En los problemas geométricos es conveniente hacer un dibujo de la situación, aunque sea un desastre.



Como la hipotenusa no la conocemos, la vamos a llamar x . aplicando el teorema de Pitágoras tendremos:

$$x^2 = 15^2 + 36^2$$

Efectuando las operaciones del miembro de la derecha:

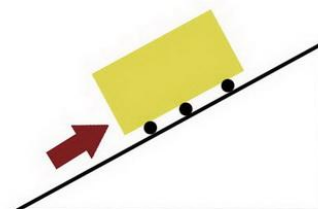
$$x^2 = 225 + 1296 = 1521$$

Despejamos la incógnita:

$$x = \sqrt{1521} = 39$$

Por tanto, la hipotenusa mide 39 cm

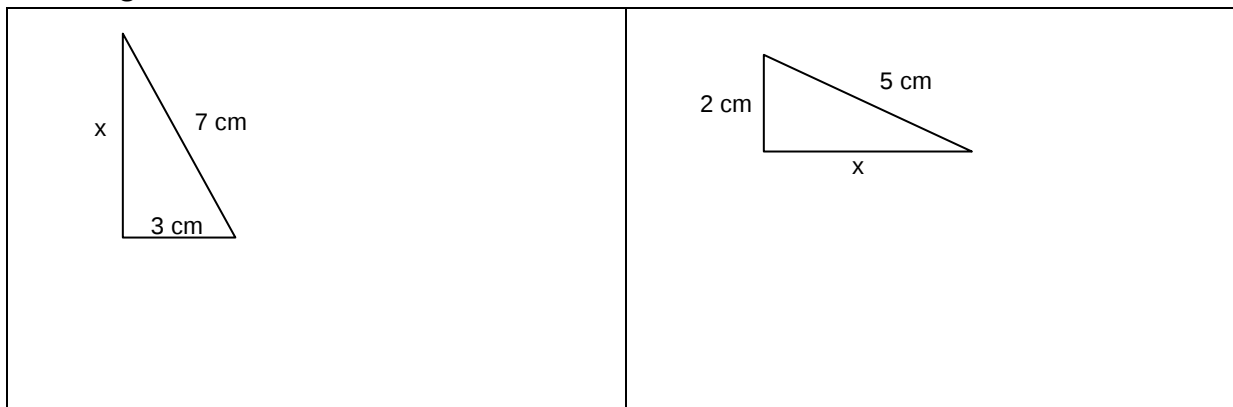
2. Tenemos una rampa inclinada cuya base mide 10 metros y su altura es de 5 metros. ¿Cuántos metros medirá la rampa?



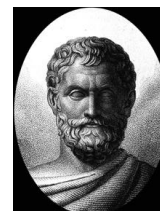
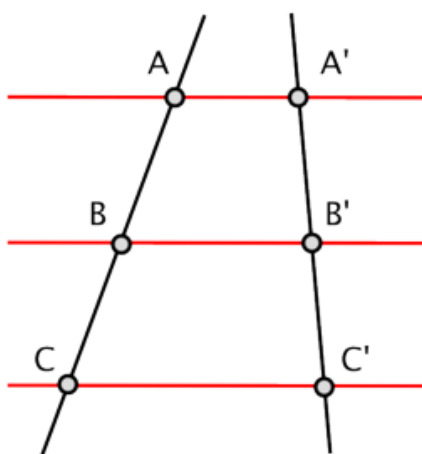
3. El entresuelo de esta moderna casa se encuentra a 2 m de altura. Queremos que la distancia desde el primer escalón a la vertical del último sea también de 2 m. ¿Cuánto debe medir la longitud de la escalera?



4. Calcula el valor del lado que falta en cada uno de los siguientes triángulos rectángulos:



El teorema de Tales



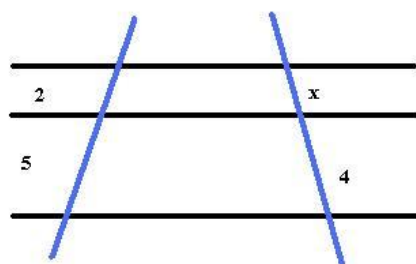
Si dos **rectas** son cortadas por varias rectas **paralelas**, los segmentos determinados son **proporcionales**.

Esto se interpreta en el dibujo de la siguiente forma:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Ejercicios

5. (Ejemplo resuelto). Calcula el valor del segmento desconocido:



Solución:

El teorema de Tales me dice, en este caso que:

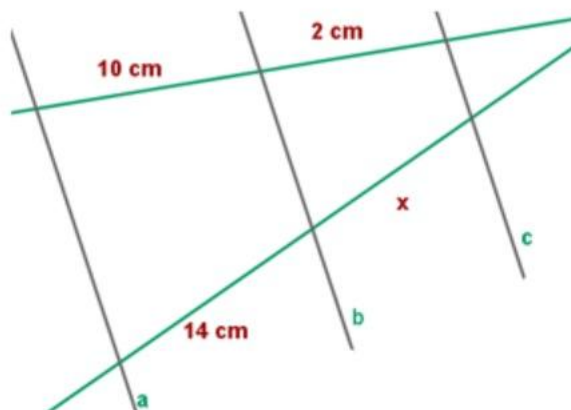
$$\frac{x}{2} = \frac{4}{5}$$

Despejando la incógnita:

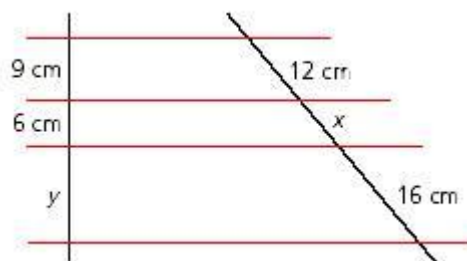
$$x = \frac{4 \cdot 2}{5} = \frac{8}{5} = 1,6$$

Por tanto, el segmento tiene un valor de **1,6**

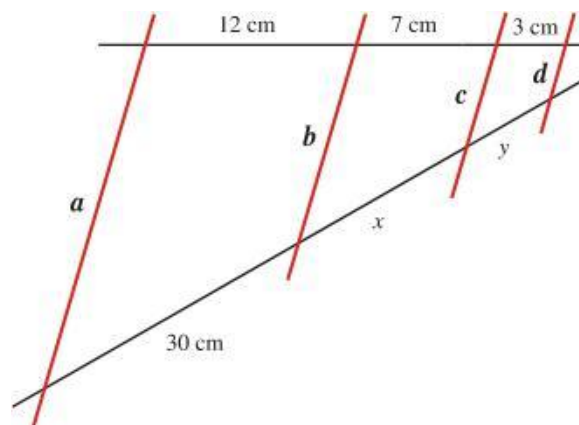
6. Calcula el valor del segmento faltante:



7. Calcula el valor de los dos segmentos que faltan en el siguiente dibujo:



8. Y ahora en el siguiente dibujo:

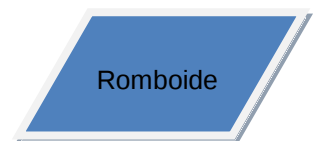
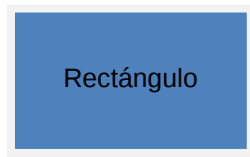


Los Cuadriláteros

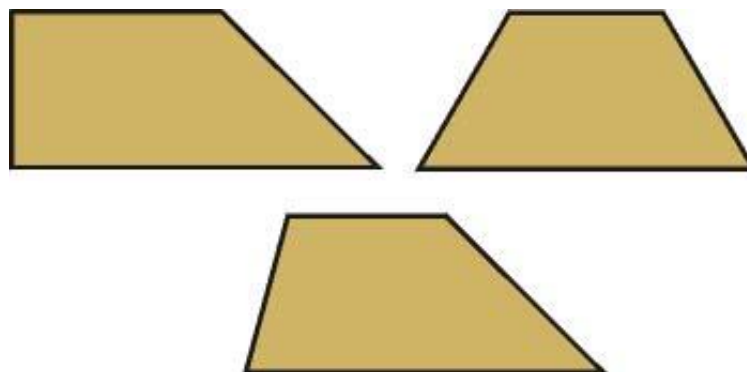
Un cuadrilátero es un polígono de cuatro lados

Pueden ser:

- **Paralelogramos.** Si tienen sus lados paralelos dos a dos

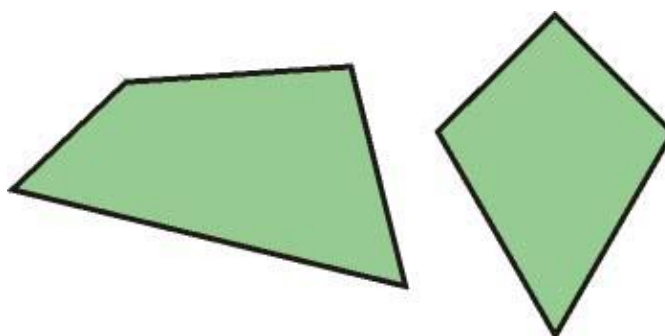


- **Trapecios.** Si tienen dos lados paralelos



Diferentes tipos de trapecios

- **Trapezoides.** Si no tienen lados paralelos



Trapezoides

Áreas de cuadriláteros y triángulos

ÁREA DE LOS CUADRILÁTEROS

- CUADRADO



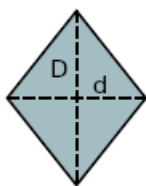
$$A = l \times l = l^2$$

- RECTÁNGULO



$$A = b \times h$$

- ROMBO



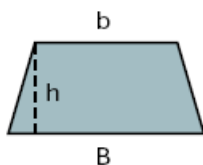
$$A = \frac{D \times d}{2}$$

- ROMBOIDE



$$A = b \times h$$

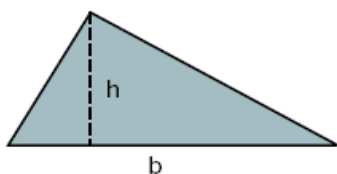
- TRAPÉCIO



$$A = \frac{B + b}{2} \cdot h$$

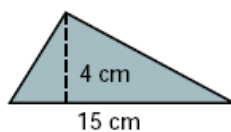
ÁREA DEL TRIÁNGULO

El área del triángulo es igual al semiproducto de la base por su altura.



$$A = \frac{b \times h}{2}$$

Ejemplo:



$$A = \frac{15 \times 4}{2} = 30 \text{ cm}^2$$

Ejercicios

9. Calcula el área de los siguientes cuadriláteros:



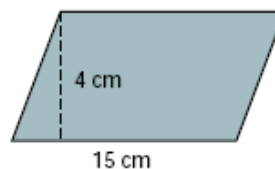
7 dm

$$A = 7 \times 7 = 49 \text{ dm}^2$$



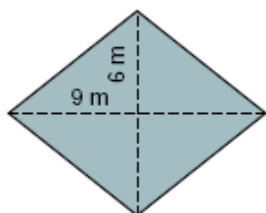
12 cm

$$A =$$

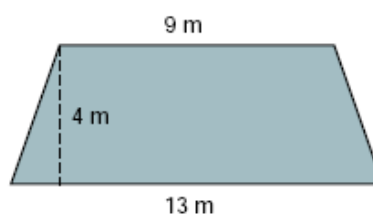


15 cm

$$A =$$



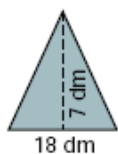
$$A =$$



13 m

$$A =$$

10. Calcula el área de los siguientes triángulos:



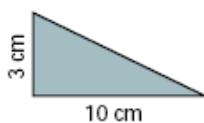
18 dm

$$A = \frac{18 \times 7}{2} =$$



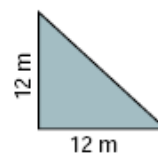
21 cm

$$A =$$



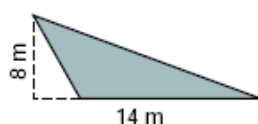
10 cm

$$A =$$



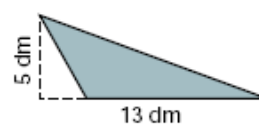
12 m

$$A =$$



14 m

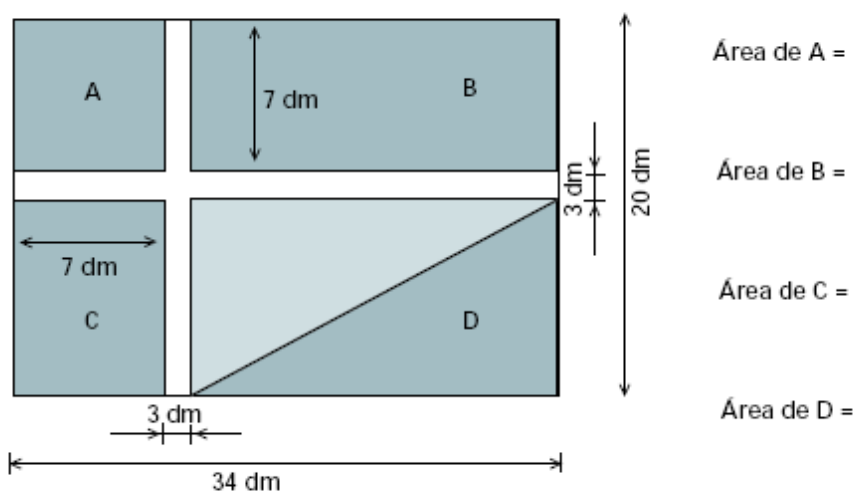
$$A =$$



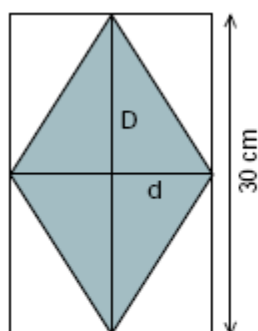
13 dm

$$A =$$

11. Calcula las áreas indicadas:



12. Calcula:



a) La longitud de las diagonales de un rombo inscrito en un rectángulo de 210 cm^2 de área y 30 cm de largo.

D =

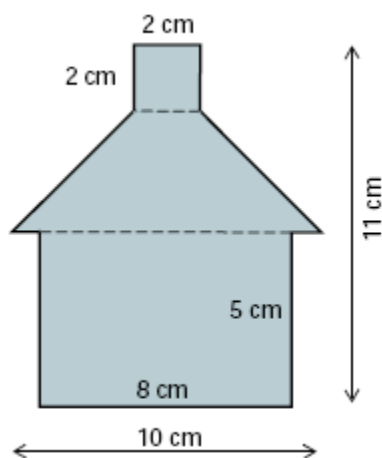
d =

b) El área del rombo.

A =

c) ¿Qué relación existe entre el área del rectángulo y la del rombo inscrito en él?

13. Calcula el área de la siguiente figura, si te atreves:



· Área del cuadrado =

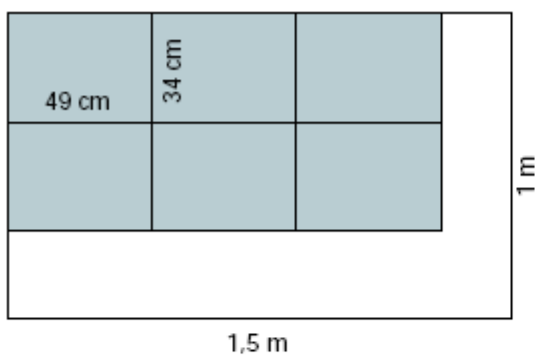
· Área del trapecio =

· Área del rectángulo =

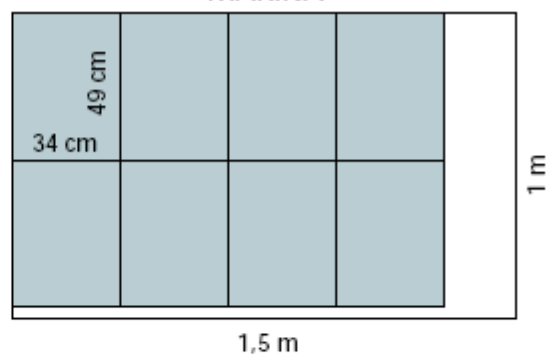
· Área de la figura =

14. Eduardo y Marina están forrando sus libros. Cada uno tiene un rollo de plástico de 1,5 m de largo y 1 m de ancho. Necesitan para cada libro un rectángulo de 49 cm de largo y 34 cm de ancho. Observa en los dibujos cómo ha cortado cada niño los rectángulos.

EDUARDO



MARINA



a) Calcula en cada caso cuántos cm^2 de plástico les han sobrado.

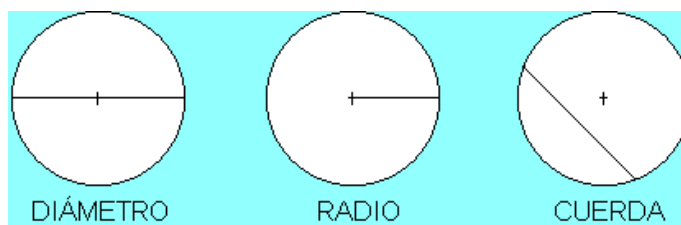
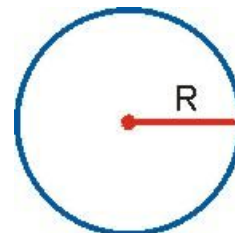
b) ¿Quién ha aprovechado mejor el rollo de plástico de forrar?

2.- La circunferencia y el círculo

La circunferencia es una curva cerrada y plana, donde todos los puntos están a la misma distancia de un punto interior llamado centro.

En una circunferencia podemos encontrar los siguientes segmentos:

- **Radio:** es el segmento que une un punto cualquiera de la circunferencia con el centro.
- **Cuerda:** es el segmento que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia.
- **Diámetro:** es una cuerda que pasa por el centro de la circunferencia. Su longitud es el doble que la del radio.

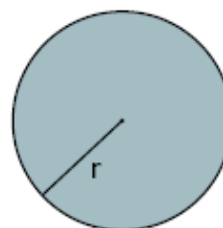


Área del círculo

• CÍRCULO

El área del círculo es igual al producto del número π por el radio al cuadrado.

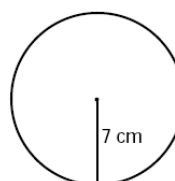
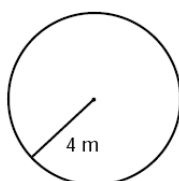
$$A = \pi \cdot r^2$$



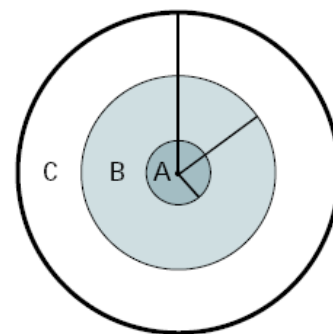
Recuerda que el valor aproximado del número π es: $\pi = 3,1416$

Ejercicios

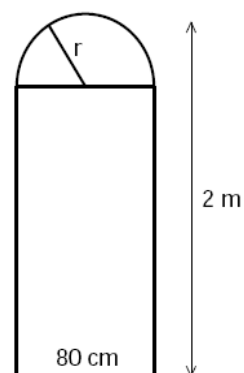
15. Calcula el área de los siguientes círculos:



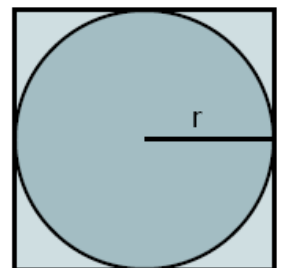
16. Calcula el área de cada una de las zonas de la diana, sabiendo que los radios de las tres circunferencias son, respectivamente, 5 cm, 10 cm y 15 cm. (Comienza por el círculo menor)



17. La siguiente figura representa el ventanal de la pared de una catedral. Calcula su área.



18. Se quiere recortar en un cartón cuadrado de 144 cm^2 de área el mayor círculo posible.



- ¿Cuánto medirá su radio?
- ¿Cuál será su área?
- ¿Cuántos cm^2 de cartón se desperdiciarán?

3.- Semejanzas

Dos objetos son semejantes cuando tienen la misma forma pero distinto tamaño.

Estos dos triángulos tienen la misma forma, ya que sus **ángulos correspondientes** son iguales, pero tienen distinto tamaño, luego son **semejantes**.

Ejemplo:

Observa las dos figuras siguientes:

Son dos triángulos semejantes. Si dividimos los lados homólogos, dos a dos, obtenemos el mismo resultado:

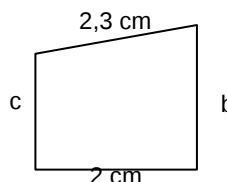
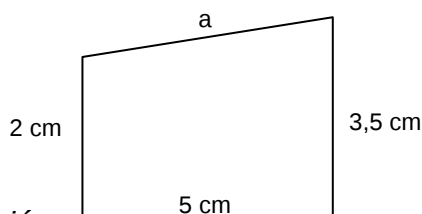
$$\frac{8}{4} = \frac{10}{5} = \frac{12}{6} = 2$$

La razón entre dos lados homólogos es 2. A este número se le llama **razón de semejanza**.

(La razón de semejanza puede ser cualquier número)

Ejemplo:

Si las dos figuras siguientes son semejantes, ¿cuánto miden los lados a, b y c?



Solución:

Con los dos lados homólogos conocidos podemos calcular la razón de semejanza:

$$r = \frac{5}{2} = 2,5$$

Con este número podemos calcular el resto de los lados:

$$a) \frac{a}{2,3} = 2,5 \rightarrow a = 2,3 \cdot 2,5 \rightarrow a = 5,75$$

$$b) \frac{3,5}{b} = 2,5 \rightarrow b = \frac{3,5}{2,5} \rightarrow b = 1,4$$

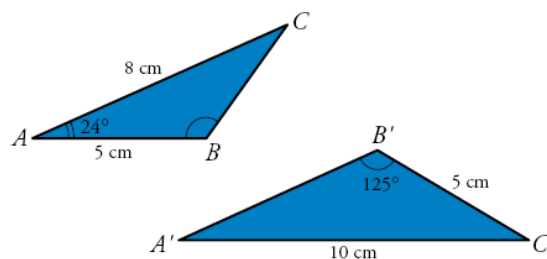
$$c) \frac{2}{c} = 2,5 \rightarrow c = \frac{2}{2,5} \rightarrow c = 0,8$$

Ejercicios

19. Un rectángulo tiene unas dimensiones de 8 cm x 20 cm. El lado menor de un rectángulo semejante a él mide 6 cm. Halla:

- La razón de semejanza para pasar del pequeño al grande
- El lado mayor del segundo
- Las áreas de los dos rectángulos

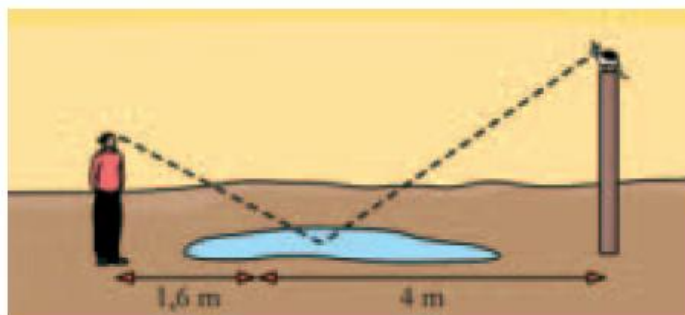
20. Nos aseguran que estos triángulos son semejantes. Halla los lados que faltan



21. Los lados de un triángulo miden 3 cm, 4 cm y 5 cm. Se construye otro semejante a él cuyo lado menor mide 15 cm.

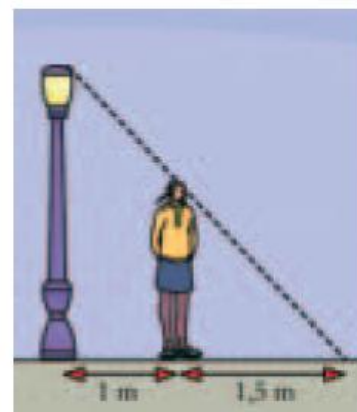
- ¿Cuál es la razón de semejanza?
- Halla los otros lados del segundo triángulo
- El primer triángulo es rectángulo, ¿lo será también el segundo?

22. El gato de Juanita se ha subido a un poste. Juanita, que es muy lista, puede ver a su gato reflejado en un charco. Toma las medidas que se indican en el dibujo y mide la altura de sus ojos, que es de 1,44 m. ¿a qué altura se encuentra el gato?



23. Un gran pino, a las once de la mañana de un día soleado, proyecta sobre el suelo una sombra de 6,5 m de longitud. Próximo a él, una caseta de 2,8 m de altura proyecta una sombra de 70 cm de altura. ¿Cuál es la altura del pino?

24. Sabiendo que María tiene una altura de 162 cm, calcula la altura de la farola.



4. - Escalas

En muchas ocasiones tenemos que trabajar con objetos demasiado grandes como para poder representarlos a tamaño real: una ciudad, una casa, un país entero, etc.

En todos estos casos utilizaremos una figura semejante al objeto real pero que se ajuste a un tamaño que nos resulte cómodo. Esto es lo que llamaremos dibujo a **escala**.

Llamamos escala a la razón de semejanza que existe entre un objeto real y la representación de este que estamos utilizando.

La escala se suele utilizar, sobre todo en los planos de las casas y en los mapas y callejeros de poblaciones.

Por ejemplo, si en una maqueta leemos la indicación: **Escala 1:250**, significa que **1 cm** del dibujo representa **250 cm** de la realidad.

Si conocemos las dimensiones reales de un objeto y las de su representación, podemos calcular la escala calculando la razón de semejanza.

Ejemplo:

La torre Eiffel de París mide 320 m de altura. En una tienda de regalos compramos una reproducción a escala que mide exactamente 16 cm de altura. ¿A qué escala está construida?

Solución:

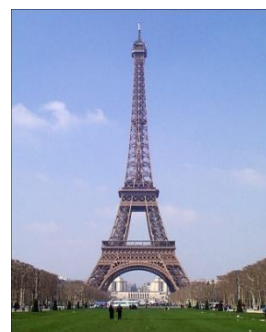
Hay que dividir la altura real entre la altura de la representación, pero con cuidado que las dos estén expresadas en las mismas unidades. En este caso, podemos establecer la equivalencia: 16 cm = 0,16 m

La razón de semejanza será:

$$r = \frac{320}{0,16} = 2000$$

Luego la escala se expresa de la siguiente forma:

Escala 1:2000



Ejercicios

25. Un grupo de alumnos decide hacer una maqueta de la torre de la iglesia de su pueblo. Esta torre mide 20 m de alto y se plantean realizar la maqueta con una escala 1:50. ¿Cuál será la altura de la maqueta?



26. Un mapa de Andalucía está dibujado a escala 1:100000. Si la distancia real entre dos pueblos es de 30 km, ¿Cuál será su distancia en el mapa? (Conviene que transformes los km en metros)



27. En un mapa dos ciudades están separadas 2 cm. Si el mapa está realizado a escala 1:200000, determina la distancia real que las separa, expresada en km.

28. Determina la escala a la que se ha hecho el plano de una ciudad, si 100 m de la realidad se representan por 1 cm en el plano.

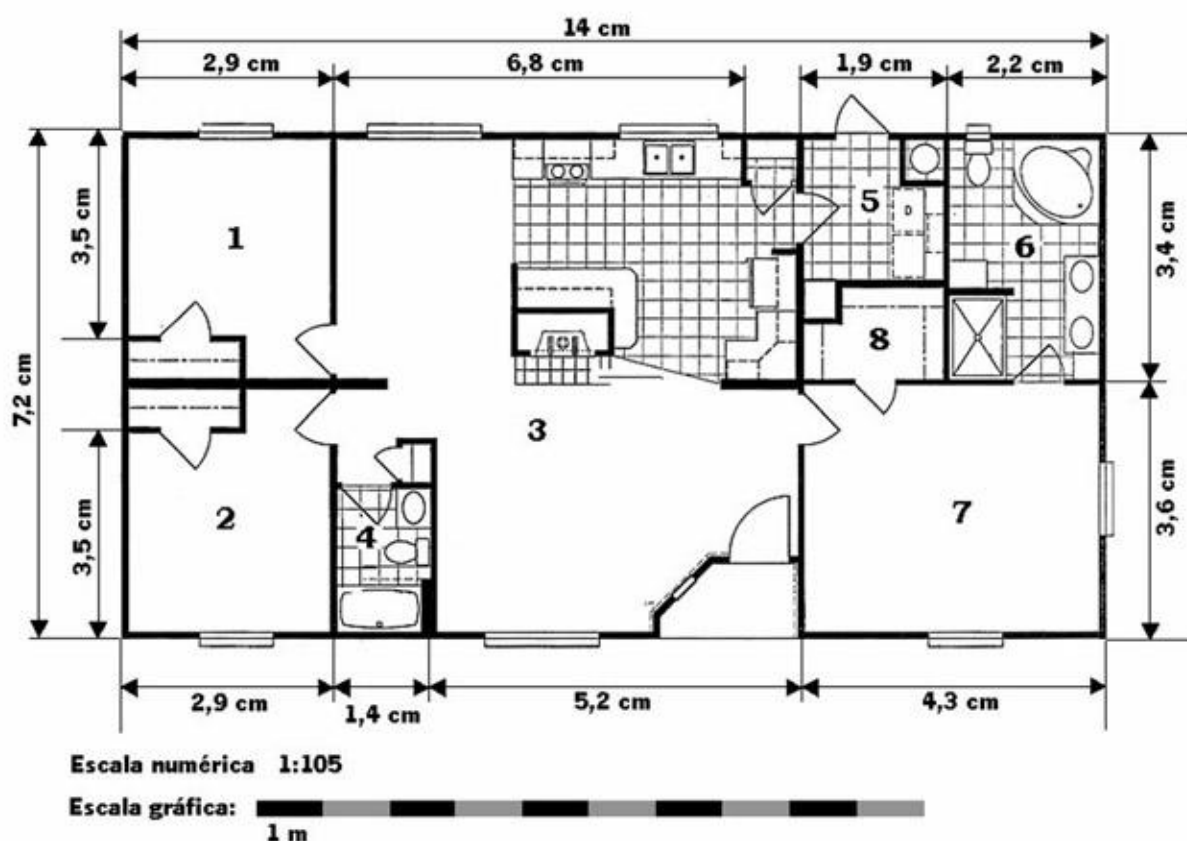
29. ¿Qué distancia separa en el plano anterior dos puntos separados por 3,2 km?

30. Un plano muestra un campo de fútbol de 90 m x 50 m a escala 1:400. Indica el tamaño del plano (sus dimensiones).

31. Calcula el tamaño con el que habría que dibujar un balón de 25 cm de diámetro (En el campo de fútbol anterior)

Planos de viviendas

Un caso particular de las maquetas a escala lo constituyen los planos de cualquier construcción.



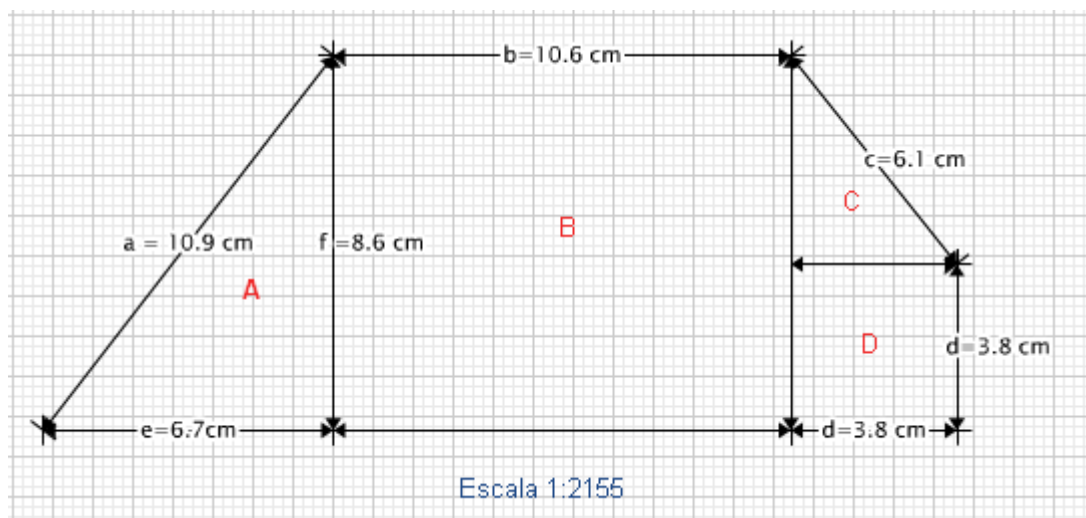
Normalmente, en los planos vienen especificadas las medidas reales, en metros, pero hay veces que no es así, como en el dibujo de arriba, en el que sólo aparece la escala y las medidas en cm.

Fíjate bien en el plano porque tendrás que calcular las medidas reales de los siguientes compartimentos:

- 1) Dimensiones de la habitación nº 1 (cuidado con el armario empotrado, que también cuenta)

- 2) Dimensiones del baño nº 4
- 3) Dimensiones de la habitación nº 7
- 4) Dimensiones del baño nº 6
- 5) Dimensiones del solar completo

Para terminar la unidad vas a calcular la superficie total real de una parcela en la que queremos construir nuestra casa.

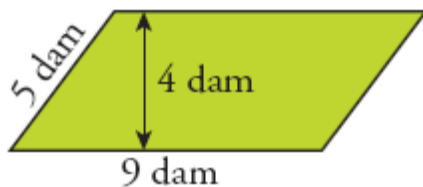


FIN DE LA UNIDAD I

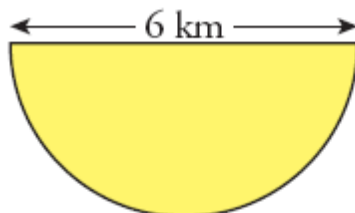


1. Calcula el área de las siguientes figuras (algunas medidas no tendrás que utilizarlas):

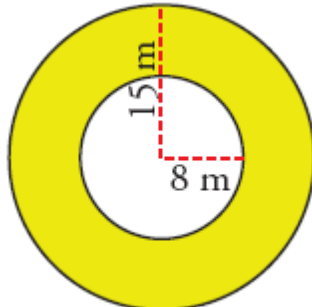
a) Un trapecio



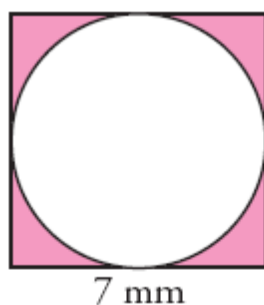
b) Un semicírculo



c) Una corona circular

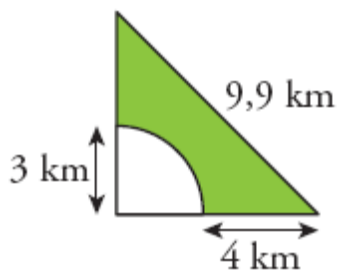


d) Cuatro esquinitas tiene mi cama

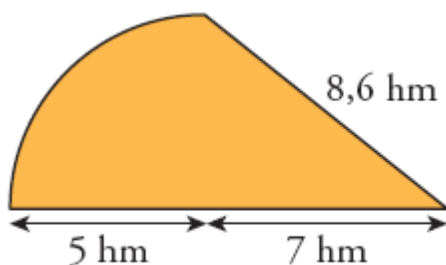




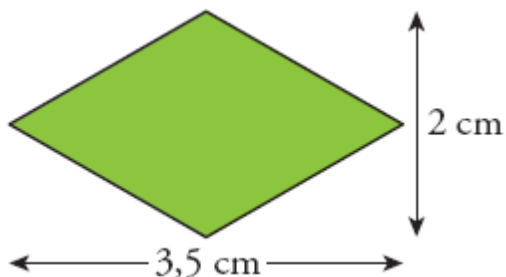
e) A este triángulo rectángulo isósceles le han dado un bocado



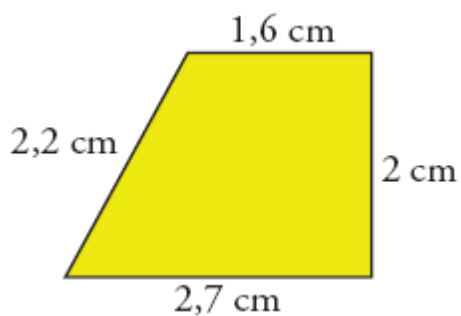
f) Este no tiene nombre, pero si te fijas, lo puedes descomponer en un triángulo rectángulo y un cuarto de círculo.



g) Este es un rombo, fácil.

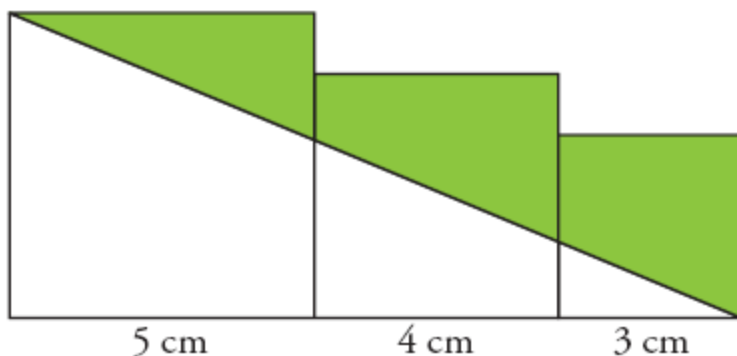


h) Un trapecio

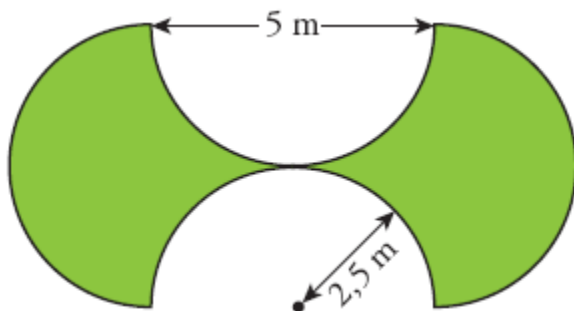




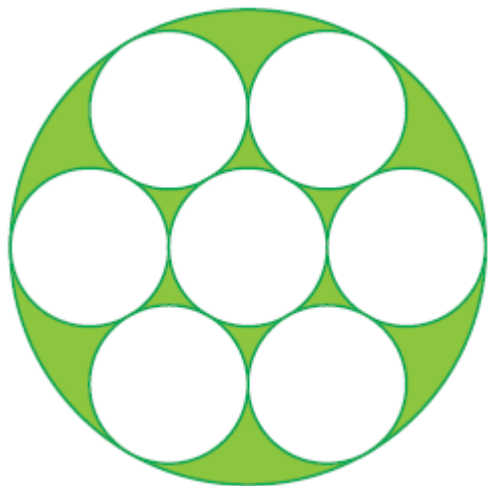
2. Calcula el área de la zona oscurecida



3. Calcula el área de la cosa extraña esta (es más fácil de lo que parece)

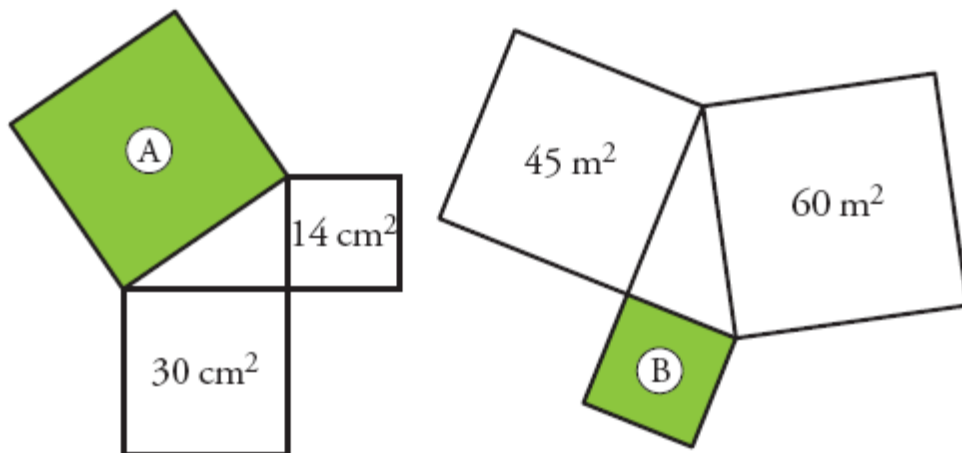


4. Halla el área de la zona más oscura sabiendo que el diámetro de la circunferencia grande es de 6 cm

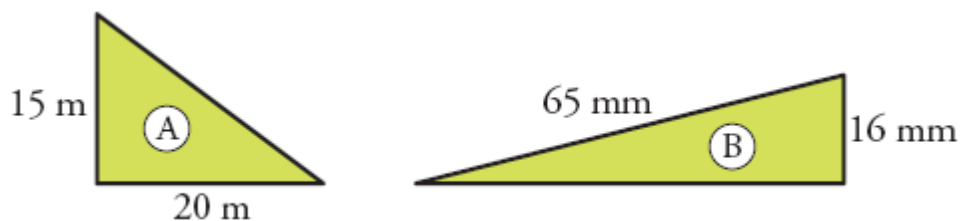




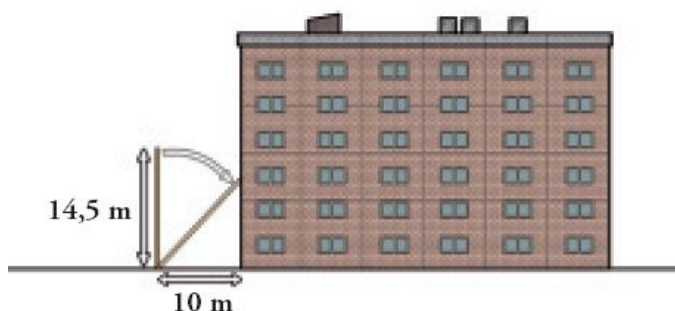
5. Calcula el área del cuadrado desconocido en cada uno de los siguientes casos (acuérdate de Pitágoras)



6. Calcula el lado desconocido en cada triángulo

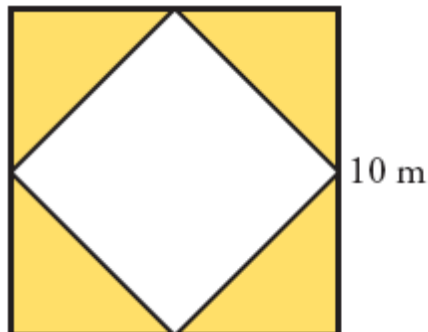


7. Se cae un poste de 14,5 m de alto sobre un edificio que se encuentra a 10 m de él. ¿Cuál es la altura a la que le golpea?





8. Atrévete a calcular el área de la zona coloreada. Te recomiendo que calcules primero el lado del cuadrado pequeño.

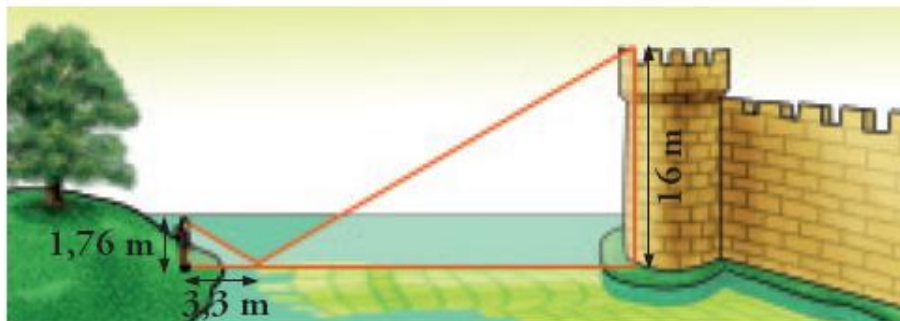


9. Una pareja, que va a comprar una casa, consulta un callejero a escala 1:30000, mide la distancia de esta al metro y resulta ser de 2 cm. ¿Cuál es la distancia real?

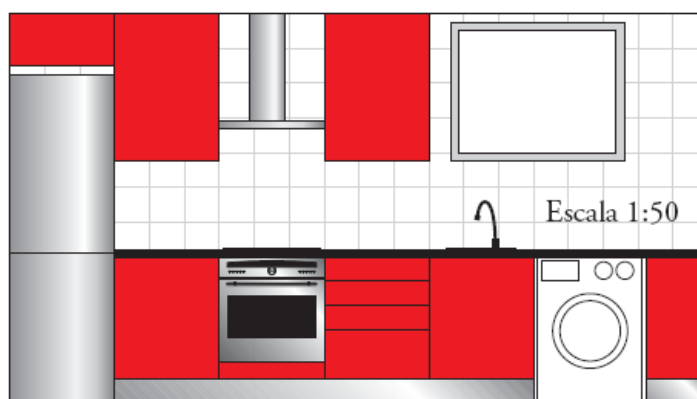
Por otro lado, saben que la distancia de esa casa a la guardería es de 1,5 km. ¿A qué distancia se encontrarán en el callejero?

10. Las medidas de un coche teledirigido de "Fórmula 1", a escala 1:40, son: 11,75 cm de largo, 5 cm de ancho y 3 cm de alto. ¿Cuáles son las dimensiones reales del coche?

- 11.** ¿Cuál es la distancia entre el chico y la base de la torre? (el chico ve la torre reflejada en el agua)

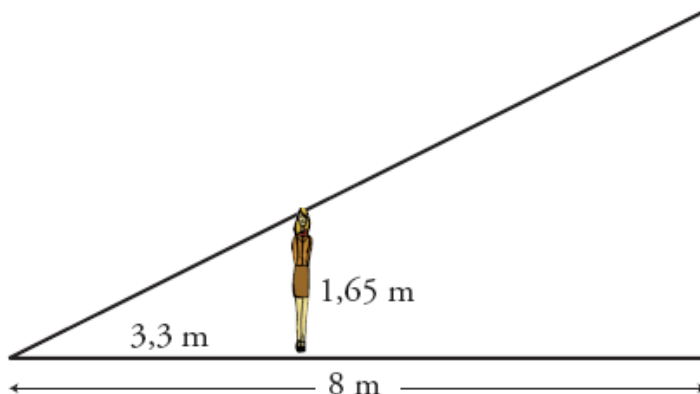


- 12.** Este es el plano de la pared de una cocina. Calcula:
- a) Sus dimensiones (largo y alto) ($8\text{ cm} \times 5\text{ cm}$ en el plano)
 - b) La distancia que hay entre los fogones y la campana extractora ($1,5\text{ cm}$ en el plano)
 - c) La superficie del cristal de la ventana ($2\text{ cm} \times 1,5\text{ cm}$ en el plano)

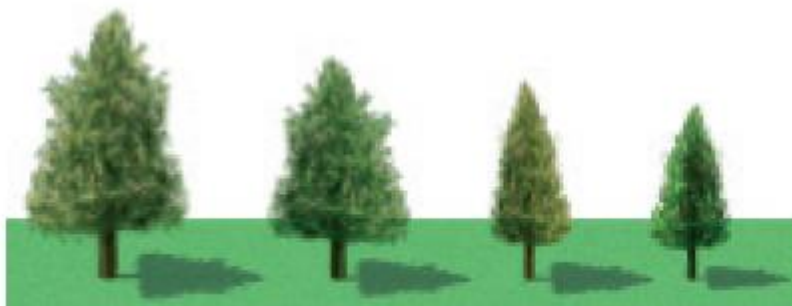




- 13.** El salón de una casa está en forma de buhardilla, y para medir su altura máxima, una persona se coloca como se ve en la figura. Calcula dicha altura.



- 14.** Las sombras de estos árboles medía, a las cinco de la tarde, 12 m, 8 m, 6 m y 4 m, respectivamente. El árbol pequeño mide 2,5 m. ¿Cuánto miden los demás?





- 15.** Halla la medida de los lados de un triángulo semejante a otro cuyos lados miden 5, 9 y 12 centímetros, con razón de semejanza igual a 3.
- 16.** Dibuja un triángulo rectángulo de catetos 15 cm y 8 cm, más o menos. Contesta a las siguientes cuestiones:
- a) Calcula el valor de la hipotenusa mediante el teorema de Pitágoras.
 - b) Uniendo los puntos medios de los catetos del triángulo anterior, se forma otro triángulo rectángulo semejante al anterior. Calcula su hipotenusa sin utilizar el teorema de Pitágoras.
- 17.** Los lados de un triángulo miden 10, 12 y 8 centímetros, y los de otro, 5, 6 y 4 centímetros. ¿Son semejantes?



18. En el plano de un piso, la escala es 150:1. Explica si es correcto o si se ha cometido algún error.

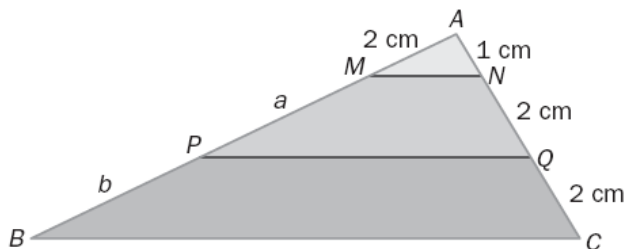
19. Halla las dimensiones de un salón de 4 metros de largo y 5 de ancho en un plano a escala:

a) 1:200

b) 1:400

20. La representación en un plano de una longitud de 20 m es un segmento de 2 cm. ¿A qué escala se ha hecho?

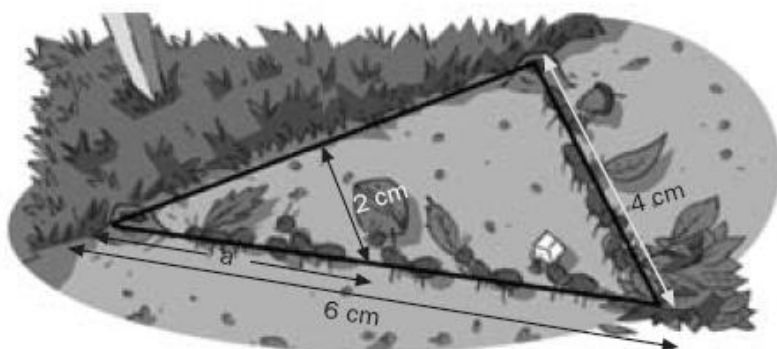
21. ¿Cuánto miden los segmentos a y b?



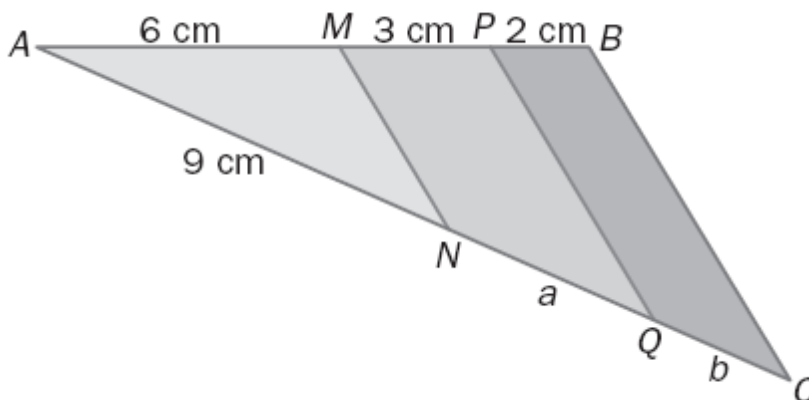


- 22.** Los lados de un triángulo miden 2, 4 y 5 centímetros. El lado mayor de otro semejante a él mide 15 centímetros. Calcula la razón de semejanza y los otros lados.

- 23.** Calcula la medida del lado a .



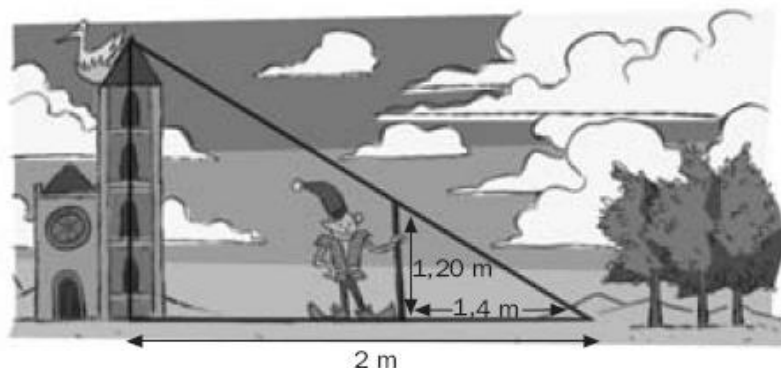
- 24.** Halla la medida de los segmentos a y b de la siguiente figura



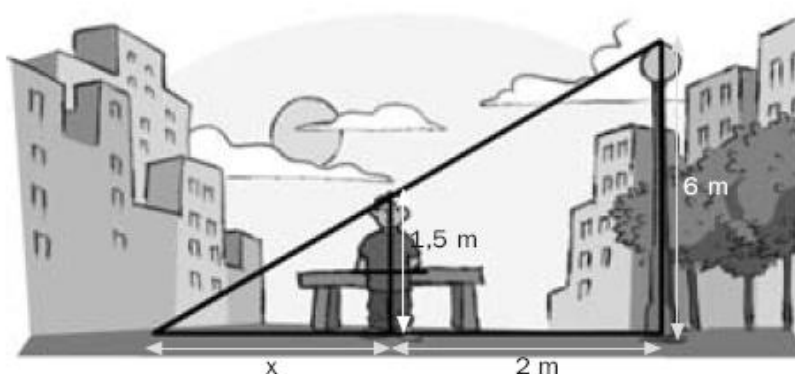


- 25.** La distancia entre Málaga y Salamanca es de 756 kilómetros. En un mapa a escala 1:1500000, ¿a qué distancia se encuentran?
- 26.** Dibuja a escala 1:8000 un parque rectangular de 140 m de largo por 120 m de ancho.
- 27.** Las dimensiones de un libro en miniatura son: 4 x 3 x 0,5 centímetros. La escala es 1:7. Calcula las medidas reales.
- 28.** En un mapa se ha representado con 1,5 centímetros una distancia real de 2,25 kilómetros. ¿Cuál es la escala del mapa?

- 29.** Las cigüeñas han anidado en lo alto del campanario. ¿A qué altura está el nido?



- 30.** La estatura del niño de la ilustración es de 1,5 metros, y la altura de la farola es de 6 metros. Calcula el valor de x .



- 31.** Los peldaños de esta escalera son paralelos y se ha roto uno de ellos. ¿Cuánto miden los tramos x e y ?

