

1

Divisibilidad



DESAFÍO

Creo que hoy no duermo

¿Cuánto tiempo crees que tardarías en contar en voz alta desde 1 hasta 100?

¿Y en contar desde 1 hasta 1 000 000?

¿Crees que si comienzas ahora mismo te dará tiempo a terminar antes de irte a acostar?



¿Qué sabes ya?

Cuándo una división es exacta

- Una división es exacta si el resto de la división es cero.
- Una división es entera si el resto es distinto de cero.

EJEMPLO

Decide si estas divisiones son exactas o no.

- a) $27 \overline{) 3}$ El resto de la división es cero. La división es exacta.
- b) $29 \overline{) 3}$ El resto de la división es distinto de cero. La división es entera.

ACTIVIDADES

1 Señala cuál de las siguientes divisiones es exacta.

- a) $35 : 4$ c) $54 : 6$
b) $93 : 9$ d) $62 : 7$

Cómo se realiza la prueba de la división

En una división siempre se cumple que:

$$\begin{array}{c} \text{Dividendo} \\ \text{resto} \end{array} \overline{\begin{array}{c} \text{divisor} \\ \text{cociente} \end{array}} \quad \text{Dividendo} = \text{divisor} \cdot \text{cociente} + \text{resto}$$

$$D = d \cdot c + r \text{ y } r < d$$

EJEMPLO

Comprueba si se cumple la prueba de estas divisiones.

$$57 \overline{) 5} \quad D = 57, d = 5, c = 11, r = 2$$

$$2 \quad 11 \quad \rightarrow 57 = 5 \cdot 11 + 2 = 55 + 2 = 57 \text{ y } 2 < 5$$

$$89 \overline{) 17} \quad D = 89, d = 17, c = 4, r = 21$$

$$21 \quad 4 \quad \rightarrow 89 = 17 \cdot 4 + 21 \quad \text{No se cumple, porque } 21 > 17.$$

ACTIVIDADES

2 Localiza la división que tiene algún error.

- a) $75 \overline{) 9}$ b) $43 \overline{) 5}$ c) $92 \overline{) 12}$ d) $61 \overline{) 6}$
3 8 3 8 8 7 7 9

1. Potencias. Operaciones con potencias



base $\rightarrow 3^4 \leftarrow$ exponente

Una **potencia** es una forma de escribir una multiplicación de factores iguales. La **base** es el factor que se repite y el **exponente** es el número de veces que se repite la base.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ veces}}$$

1.1. Producto y cociente de potencias con la misma base

No olvides comprobar antes de operar si las dos potencias tienen la misma base.

- Para **multiplicar** dos o más **potencias con la misma base**, se mantiene la misma base y se suman los exponentes.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

- Para **dividir** dos **potencias con la misma base**, se mantiene la misma base y se restan los exponentes.

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

EJEMPLO

1. Calcula estas operaciones.

a) $6^3 \cdot 6^5 = \underbrace{(6 \cdot 6 \cdot 6)}_{3 \text{ veces}} \cdot \underbrace{(6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6)}_{5 \text{ veces}} = 6^{3+5} = 6^8$

c) $5^4 \cdot 5^2 = \underbrace{(5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5)}_{4 \text{ veces}} \cdot \underbrace{(5 \cdot 5)}_{2 \text{ veces}} = 5^{4+2} = 5^6$

b) $4^5 : 4^2 = \underbrace{(4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4)}_{5 \text{ veces}} : \underbrace{(4 \cdot 4)}_{2 \text{ veces}} = 4^{5-2} = 4^3$

d) $7^5 : 7^3 = \underbrace{(7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7)}_{5 \text{ veces}} : \underbrace{(7 \cdot 7 \cdot 7)}_{3 \text{ veces}} = 7^{5-3} = 7^2$

1.2. Potencias de exponente 1 y 0

- Una potencia de exponente 1 es igual a la base: $a^1 = a$.
- Una potencia de exponente 0 y base distinta de 0 es igual a 1: $a^0 = 1$.

EJEMPLO

2. Calcula.

a) $6^1 = 6$

c) $17^1 = 17$

b) $5^0 = 1$

d) $24^0 = 1$

ACTIVIDADES



1. Escribe el resultado de estos productos en forma de una sola potencia.

a) $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$

c) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$

b) $3 \cdot 3 \cdot 3$

d) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$



2. Calcula y escribe como una sola potencia.

a) $2^5 \cdot 2^4$

d) $10^6 : 10^2$

b) $3^7 \cdot 3^6$

e) $8^7 : 8^3$

c) $10^3 \cdot 10^0$

f) $6^5 : 6$



3. Calcula las siguientes potencias.

a) 3^0

b) 5^1

c) 0^1



4. ¿Cuántos huevos hay en 12 cajas con 12 hueveras de una docena cada una? Escríbelo en forma de potencia.



5. **REFLEXIONA.** Calcula el valor del triángulo y del rombo para que se cumplan las igualdades.

a) $5^\blacktriangle \cdot (5^\blacklozenge : 5^2) = 5^7$

b) $(3^7 : 3^\blacktriangle) \cdot 3^3 = 3^\blacklozenge$

1.3. Potencia de una potencia

Para elevar una potencia a otra potencia, se mantiene la misma base y se multiplican los exponentes.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

EJEMPLO

3. Calcula.

a) $(5^4)^2 = 5^4 \cdot 5^4 = 5^{4+4} = 5^{4 \cdot 2} = 5^8$

b) $(7^2)^3 = 7^2 \cdot 7^2 \cdot 7^2 = 7^{2+2+2} = 7^{2 \cdot 3} = 7^6$

RETO

¿Cuál es el número más grande que se puede escribir con tres cifras?



1.4. Potencia de un producto y de un cociente

- La potencia de una multiplicación es igual al producto de las potencias de sus factores.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

- La potencia de una división es igual al cociente de las potencias del dividendo y del divisor.

$$(a : b)^n = a^n : b^n$$

«

Utilizando estas propiedades se pueden simplificar los cálculos.

$$5^4 \cdot 2^4 = (5 \cdot 2)^4 = 10^4$$

$$6^3 : 2^3 = (6 : 2)^3 = 3^3$$

EJEMPLOS

4. Expresa como producto o cociente de dos potencias.

a) $(6 \cdot 5)^2 = (6 \cdot 5) \cdot (6 \cdot 5) = 6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 5 = 6^2 \cdot 5^2$

b) $(15 : 2)^4 = (15 : 2) \cdot (15 : 2) \cdot (15 : 2) \cdot (15 : 2) = (15 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 15) : (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 15^4 : 2^4$

5. Escribe como una sola potencia.

a) $8^3 \cdot 5^3 = 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = (8 \cdot 5) \cdot (8 \cdot 5) \cdot (8 \cdot 5) = (8 \cdot 5)^3 = 40^3$

b) $16^5 : 8^5 = (16 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 16) : (8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8) = (16 : 8) \cdot (16 : 8) \cdot (16 : 8) \cdot (16 : 8) \cdot (16 : 8) = (16 : 8)^5 = 2^5$

ACTIVIDADES

6. Expresa en forma de una sola potencia.

a) $(3^2)^6$

c) $(4^{12})^2$

e) $(6^9)^4$

b) $(7^3)^3$

d) $(5^3)^6$

f) $(12^3)^0$

7. Da el resultado como una sola potencia.

a) $2^2 \cdot 3^2$

c) $3^{12} \cdot 4^{12}$

e) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

b) $5^3 \cdot 7^3$

d) $5^9 \cdot 6^9$

f) $(7 \cdot 4)^6 : (7 \cdot 4)^3$

8. Calcula para que se cumplan las igualdades.

a) $5^{\square} \cdot 3^{\square} = 15^2$

c) $7^6 \cdot 3^{\square} = \square^6$

b) $\square^3 : 4^3 = 3^{\square}$

d) $6^8 : \square^{\square} = 2^8$

9. REFLEXIONA. Completa para que sean ciertas las igualdades.

a) $(2^4)^3 \cdot (3^3)^{\square} = \square^6$

b) $3^4 \cdot \square^4 : \square^2 = 1$

2. Divisibilidad de números naturales



Dividendo
resto

divisor
cociente

Un número es **divisible** por otro cuando la división entre ellos es exacta, es decir, su resto es 0.

$$\begin{array}{r} D \overline{)d} \\ 0 \quad c \end{array}$$

- D es divisible por d .
- D contiene exactamente c veces a d .

Si D es divisible por d , decimos que entre D y d existe una **relación de divisibilidad**.



EJEMPLO

6. Estudia si hay alguna relación de divisibilidad entre estos números.

a) Entre 204 y 6.

$$\begin{array}{r} 204 \overline{)6} \\ 24 \quad 34 \\ 0 \end{array}$$

La división es exacta porque el resto es 0.

Dividendo = divisor · cociente

$$204 = 6 \cdot 34$$

Decimos que:

- 204 es divisible por 6.
- 204 contiene exactamente 34 veces a 6.
- Como 204 es divisible por 6, entre 204 y 6 existe una relación de divisibilidad.

b) Entre 87 y 5.

$$\begin{array}{r} 87 \overline{)5} \\ 37 \quad 17 \\ 2 \end{array}$$

La división no es exacta porque el resto es distinto de 0.

Decimos que:

- 87 no es divisible por 5.
- 87 no contiene un número exacto de veces a 5.
- Como 87 no es divisible por 5, entre 87 y 5 no existe relación de divisibilidad.



RETO

Si soy un número, ¿los divisores de mis divisores son mis divisores?



Cuando el mayor de dos números no es divisible por el menor, entre ambos no existe relación de divisibilidad.

ACTIVIDADES



10 Indica, si existe, la relación de divisibilidad entre estos números.

- | | | |
|-----------|------------|-------------|
| a) 5 y 25 | d) 14 y 88 | g) 17 y 357 |
| b) 6 y 36 | e) 13 y 91 | h) 12 y 150 |
| c) 7 y 47 | f) 80 y 81 | i) 22 y 220 |



11 El número 504 contiene a algunos de estos números un número exacto de veces. ¿Cuáles son?

- | | | |
|-------|-------|-------|
| a) 28 | c) 63 | e) 36 |
| b) 49 | d) 34 | f) 42 |

12 Ordena de menor a mayor los números que tengan una relación de divisibilidad con 900.

- | | | |
|-------|-------|--------|
| a) 75 | d) 27 | g) 24 |
| b) 8 | e) 50 | h) 36 |
| c) 45 | f) 12 | i) 180 |

13 **REFLEXIONA.** Si un número a contiene b veces a otro número c , ¿cuál de las igualdades que hay a continuación es cierta?

- | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|
| a) $c = a \cdot b$ | b) $b = a \cdot c$ | c) $a = b \cdot c$ |
|--------------------|--------------------|--------------------|

3. Múltiplos de un número

1



Un número b es **múltiplo** de otro número a si la división de b entre a es exacta.

Si b es múltiplo de a , entonces b es divisible por a .

EJEMPLO

7. Comprueba si 56 es múltiplo de 7. ¿Y de 6?

$$\begin{array}{r} 56 \overline{) 7} \\ 0 8 \end{array}$$
 La división $56 : 7$ es exacta.
56 es múltiplo de 7. $\rightarrow$ 56 es divisible por 7.

$$\begin{array}{r} 56 \overline{) 6} \\ 2 9 \end{array}$$
 La división $56 : 6$ no es exacta.
56 no es múltiplo de 6. $\rightarrow$ 56 no es divisible por 6.

RETO

¿Cuál es el menor número que es múltiplo de tres números exactamente?

Los múltiplos de un número natural se obtienen multiplicándolo por los sucesivos números naturales.

Múltiplos de $a \rightarrow a \cdot 1, a \cdot 2, a \cdot 3, a \cdot 4, a \cdot 5, a \cdot 6, a \cdot 7 \dots$

Esto lo escribimos así:

$$\dot{a} = \{a \cdot 1, a \cdot 2, a \cdot 3, a \cdot 4, a \cdot 5, a \cdot 6, a \cdot 7 \dots\}$$

Es decir, el número de múltiplos de a es ilimitado. Además, cualquier número es múltiplo de sí mismo y de la unidad: $a \cdot 1 = a$.



SE ESCRIBE ASÍ

$\dot{a} \rightarrow$ Representa el conjunto de todos los múltiplos del número a .

$\dot{3} \rightarrow$ Todos los múltiplos de 3.

$\dot{12} \rightarrow$ Todos los múltiplos de 12.

EJEMPLOS

8. Obtén los ocho primeros múltiplos de 7.

$$\{7 \cdot 1, 7 \cdot 2, 7 \cdot 3, 7 \cdot 4, 7 \cdot 5, 7 \cdot 6, 7 \cdot 7, 7 \cdot 8\} = \{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56\}$$

9. Comprueba que 3 es múltiplo de sí mismo y de la unidad.

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 3} \\ 0 1 \end{array}$$
 La división $3 : 3$ es exacta.
3 es múltiplo de 3.

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 1} \\ 0 3 \end{array}$$
 La división $3 : 1$ es exacta.
3 es múltiplo de 1.

ACTIVIDADES



14 Copia y completa las frases para que sean ciertas.

- a) Como $48 : 3$ es una división exacta, entonces 48 es ... de 3.
- b) Como $102 : 8$ no es una división exacta, entonces ...
- c) Como $65 : 7 \dots$
- d) Como $78 : 13 \dots$
- e) Como $221 : 17 \dots$



15 Calcula los cinco primeros múltiplos de 15.

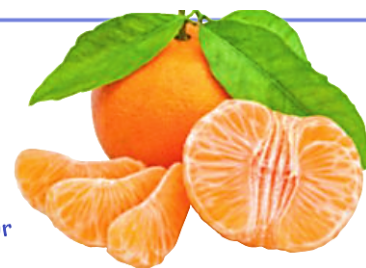
16 Copia los múltiplos de 9 y los múltiplos de 6. ¿Qué números son múltiplos de ambos?

- a) 12 d) 297 g) 72
- b) 260 e) 212 h) 216
- c) 153 f) 198 i) 318

17 REFLEXIONA. Explica si es verdadero o falso.

- a) Los múltiplos de un número son divisibles entre sí.
- b) Cualquier número es divisible por uno de sus múltiplos.

4. Divisores de un número



Un número a es **divisor** de otro número b si la división de b entre a es exacta.

Si a es divisor de b , entonces b es divisible por a .

24 es divisible por 3.
24 es múltiplo de 3.
3 es divisor de 24.



SE ESCRIBE ASÍ

Div (a) → Representa el conjunto de todos los divisores del número a .

Div (8) → Todos los divisores de 8.

Div (12) → Todos los divisores de 12.

EJEMPLOS

10. Comprueba si 5 y 7 son divisores de 65.

$$\begin{array}{r} 65 \\ 15 \overline{) 13} \\ 0 \end{array}$$

La división $65 : 5$ es exacta.

5 es divisor de 65. → 65 es divisible por 5.

$$\begin{array}{r} 65 \\ 2 \overline{) 9} \end{array}$$

La división $65 : 7$ es entera.

7 no es divisor de 65. → 65 no es divisible por 7.

11. Decide si 4 y 6 son divisores de 36.

$$\begin{array}{r} 36 \\ 0 \overline{) 9} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ 0 \overline{) 6} \end{array}$$

Las dos divisiones son exactas, por lo que 4 y 6 son divisores de 36.

Los divisores de un número se obtienen dividiendo ese número entre los sucesivos números naturales hasta que el cociente de la división sea menor o igual que el divisor.

Es decir, el número de divisores de a es limitado. Además, cualquier número tiene como divisores a sí mismo y la unidad.



EJEMPLO

12. Estudia si 14 y 1 son divisores de 14.

$$\begin{array}{r} 14 \\ 0 \overline{) 1} \end{array}$$

La división $14 : 14$ es exacta.
14 es divisor de 14.

$$\begin{array}{r} 14 \\ 0 \overline{) 1} \end{array}$$

La división $14 : 1$ es exacta.
1 es divisor de 14.

ACTIVIDADES



18. Calcula cuáles de estos números tienen a 12 como uno de sus divisores.

- a) 144 c) 184 e) 84
b) 56 d) 24 f) 112

19. Observa el dividendo, el divisor y el cociente de estas divisiones y establece dos relaciones de divisibilidad en cada caso.

- a) $63 : 3 = 21$ d) $72 : 4 = 18$
b) $88 : 11 = 8$ e) $375 : 15 = 25$
c) $96 : 8 = 12$ f) $136 : 8 = 17$



20. **REFLEXIONA.** Razona si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- a) Cualquier número es divisor de 1.
b) 1 es divisor de cualquier número.
c) 1 es múltiplo de cualquier número.
d) Cualquier número par es divisor de 2.
e) 2 es divisor de cualquier número par.
f) Cualquier número impar es múltiplo de 3.
g) Cualquier número es divisor de su doble.
h) Todo número tiene por lo menos 3 divisores.



Cómo se calculan todos los divisores de un número

Calcula todos los divisores de 50.

- ① Dividimos el número entre 1, 2, 3... hasta que el cociente sea menor o igual que el divisor.

$$\begin{array}{r} 50 \overline{) 1} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 50 \overline{) 2} \\ 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 50 \overline{) 3} \\ 20 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 50 \overline{) 4} \\ 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 50 \overline{) 5} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 50 \overline{) 6} \\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 50 \overline{) 7} \\ 1 \end{array}$$

El cociente es menor o igual que el divisor. Dejamos de dividir.

- ② De cada división exacta extraemos dos divisores: el divisor y el cociente.

$$50 : 1 = 50 \rightarrow 1 \text{ y } 50 \text{ son divisores de } 50.$$

$$50 : 2 = 25 \rightarrow 2 \text{ y } 25 \text{ son divisores de } 50.$$

$$50 : 5 = 10 \rightarrow 5 \text{ y } 10 \text{ son divisores de } 50.$$

Las demás divisiones no son exactas.

Los divisores de 50 son $\text{Div}(50) = \{1, 2, 5, 10, 25, 50\}$.

Si se multiplican los divisores de un número que están situados en los extremos, el resultado es el número del que has calculado los divisores.

$$\text{Div}(45) = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$$

ACTIVIDADES

- 21 Copia y relaciona cada número con sus divisores.

a) 6	1	6	14	25
b) 18	2	7	15	30
c) 30	3	9	18	42
d) 42	5	10	21	50
e) 50				

- 22 Halla todos los divisores de estos números.

- a) 12 c) 18 e) 49 g) 33
→ b) 35 d) 28 f) 52 h) 98

- 23 Calcula todos los divisores de estos números.

- a) 96 c) 441 e) 150
b) 100 d) 245 f) 304

- 24 Rocío va a hacer piñatas con 48 gominolas para repartir entre los asistentes a su fiesta de despedida.

- a) ¿Cuántas piñatas de 8 gominolas puede hacer?
b) Si solo invita a 3 personas a su fiesta, ¿cuántas gominolas habrá en cada piñata?

- 25 A partir de los divisores de 12, calcula los divisores de 24. ¿Qué relación encuentras?

- 26 Después de calcular los divisores de 18, indica cuáles son los divisores de:

- a) 36 b) 54 c) 90

- 27 Halla todos los divisores de 10. A partir de ellos encuentra todos los divisores de los siguientes.

- a) 20 b) 40 c) 80

- 28 Andrés tiene 45 pegatinas. Va a hacer montones con el mismo número de pegatinas y sin que sobre ninguna.

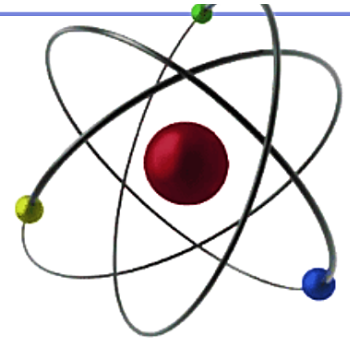
- a) ¿Cuántos tipos de montones puede hacer?
b) ¿Cuántas pegatinas tendrían en cada caso?

- 29 Por la mañana, se reparten 60 tizas entre varias aulas, de manera que cada aula tiene el mismo número de tizas y no sobra ninguna.

- a) ¿Cuántas aulas puede haber?
b) ¿Cuántas tizas se reparten por aula en cada caso?



5. Números primos y números compuestos



- Un **número** es **primo** si solo tiene dos divisores: él mismo y la unidad.

$$a \text{ es primo. } \rightarrow \text{Div}(a) = \{1, a\}$$

- Un **número** es **compuesto** si tiene más de dos divisores.
- El número 1 no es primo ni compuesto.

EJEMPLO

13. Averigua si los números 19 y 91 son primos o compuestos.

Calculamos sus divisores y comprobamos cuántos tienen.

$\text{Div}(19) = \{1, 19\} \rightarrow 19$ solo tiene dos divisores.

19 es un número primo.

$\text{Div}(91) = \{1, 7, 13, 91\} \rightarrow 91$ tiene más de dos divisores.

91 es un número compuesto.

Números primos hasta 100

2	3	5	7	11
13	17	19	23	29
31	37	41	43	47
53	59	61	67	71
73	79	83	89	97

Criterios de divisibilidad

Los **criterios de divisibilidad** son reglas que nos permiten reconocer, sin realizar la división, si un número es divisible por otro.

Los criterios de divisibilidad más importantes son:

Divisible por	Criterio de divisibilidad
2	Si la última cifra es 0 o par.
3	Si la suma de sus cifras es divisible por 3.
5	Si la última cifra es 0 o 5.
10	Si la última cifra es 0.
11	Si la diferencia entre la suma de las cifras de lugar par y la suma de las cifras de lugar impar es 0 o divisible por 11.

RETO

Después del 11, ¿cuáles son los siguientes tres números primos capicúas?



ACTIVIDADES



30. Decide si estos números son primos o compuestos.

a) 127 c) 109 e) 261 g) 199
b) 183 d) 217 f) 389 h) 251



31. Indica algunos de los divisores de estos números utilizando los criterios de divisibilidad.

a) 54 b) 729 c) 575 d) 444

32. Copia y completa la cifra que falta para que cada número sea divisible por 3.

a) 62□ c) 7□0 e) 8□88
b) □15 d) 18□0 f) 30□4

33. **REFLEXIONA.** ¿Hay algún número primo que acabe en 2? ¿Y en 3? Razona tu respuesta.



Cómo se determina si un número es primo

Determina si estos números son primos o compuestos.

- a) 51 b) 85 c) 119 d) 59

Los números primos para los que no tenemos un criterio de divisibilidad son 7, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47...

- ① Aplicamos los criterios de divisibilidad que conocemos para encontrar divisores del número. Si no los encontramos, dividimos entre los números primos para los que no conocemos criterios: 7, 13, 17..., hasta que el cociente sea menor o igual que el divisor.

a) 51 no es divisible por 2, porque no termina en 0 ni en cifra par.
51 es divisible por 3, porque la suma de sus cifras lo es: $5 + 1 = 6$.
Por tanto, 51 es un número compuesto.

- ② Si el número es divisible por alguno de ellos, es un número compuesto.

b) 85 no es divisible por 2, porque no termina en 0 ni en cifra par.
85 no es divisible por 3, porque la suma de sus cifras no lo es.
85 es divisible por 5, porque termina en 5.
Por tanto, 85 es un número compuesto.

c) 119 no es divisible por 2, porque no termina en 0 ni en cifra par.
119 no es divisible por 3, porque la suma de sus cifras no lo es.
119 no es divisible por 5, porque no termina en 0 ni en 5.
119 no es divisible por 11, porque $(1 + 9) - 1 = 9$ no es 0 ni divisible por 11.

119 es divisible por 7. $\begin{array}{r} 119 \overline{) 7} \\ 49 \quad 17 \end{array}$ $\rightarrow 0 \rightarrow$ 119 es un número compuesto.

- ③ Si no es divisible por ninguno de ellos, el número es primo.

d) 59 no es divisible por 2, porque no termina en 0 ni en cifra par.
59 no es divisible por 3, porque la suma de sus cifras no lo es.
59 no es divisible por 5, porque no termina en 0 ni en 5.
59 no es divisible por 11, porque $9 - 5 = 4$ no es 0 ni divisible por 11.

$\begin{array}{r} 59 \overline{) 7} \\ 3 \quad 8 \end{array}$ $\begin{array}{r} 59 \overline{) 11} \\ 4 \quad 5 \end{array}$ El cociente es menor que el divisor.
Dejamos de dividir.
59 es un número primo.

ACTIVIDADES

- 34 Aplica los criterios de divisibilidad y explica si estos números son primos o compuestos.

- a) 42 c) 191 e) 291
b) 320 d) 286 f) 7 007

- 35 Justifica que estos números son compuestos escribiendo al menos 3 divisores de cada uno.

- a) 32 c) 270 e) 451
b) 72 d) 321 f) 667



- 36 ¿Puedes escribir un número primo de 23 cifras que acabe en 6? Razona tu respuesta.

- 37 ¿En qué cifras puede terminar un número primo? ¿Son primos todos los números que acaban en esas cifras?

- 38 ¿Cuál es el menor número primo capicúa de 3 cifras?

- 39 ¿Hay algún número primo capicúa de 4 cifras?

6. Descomposición en factores



Descomponer un número en factores es expresarlo como un producto de varios factores.

- Un número primo solo admite una descomposición en factores: el producto de sí mismo por la unidad.
- Un número compuesto admite más de una descomposición en factores.

EJEMPLO

14. Halla todas las descomposiciones en dos factores de 11 y de 36.

11 es un número primo. $\rightarrow \text{Div}(11) = \{1, 11\}$

$11 \cdot 1$ es la única descomposición en dos factores de 11.

36 es un número compuesto. $\rightarrow \text{Div}(36) = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$

$36 = 1 \cdot 36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9 = 6 \cdot 6$

$1 \cdot 36, 2 \cdot 18, 3 \cdot 12, 4 \cdot 9$ y $6 \cdot 6$ son las descomposiciones en dos factores de 36.

Factorización de un número

Factorizar un número es descomponerlo en factores primos, es decir, expresarlo como producto de sus divisores primos.



EJEMPLO

15. Razona cuál es la descomposición en factores primos de 90.

- a) $90 = 2 \cdot 45 \rightarrow 45$ no es primo. No es la factorización de 90.
- b) $90 = 2 \cdot 9 \cdot 5 \rightarrow 9$ no es primo. No es la factorización de 90.
- c) $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \rightarrow$ Todos son primos. Es la factorización de 90.

Al escribir la factorización se suelen anotar los factores primos de menor a mayor.

ACTIVIDADES

40. Halla una descomposición en dos factores y otra en tres factores de cada uno de estos números.

- a) 40 c) 96 e) 560 g) 385
b) 84 d) 88 f) 105 h) 625

¿Coincide alguna con su factorización?

41. Escribe dos descomposiciones diferentes para cada número en las que aparezca el factor 3.

- a) 90 b) 126 c) 156 d) 294 e) 273



42. Calcula el número al que corresponden estas factorizaciones.

- a) $2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$ b) $2^4 \cdot 3 \cdot 5$ c) $2 \cdot 7 \cdot 11^2$

¿Cómo escribirías la factorización del doble de cada uno de estos números? ¿Y de sus triples?

43. REFLEXIONA. La descomposición en factores de un número es $2 \cdot 3 \cdot 5$.

¿Cuál sería la factorización si lo multiplicamos por 6? ¿Y por 10? ¿Y por 15?



Cómo se factorizan números naturales

Descompón el número 588 como producto de factores primos.

- ① Dividimos el número entre los sucesivos números primos: 2, 3, 5, 7... tantas veces como se pueda hasta obtener la unidad.

588 es divisible por 2.

$$588 : 2 = 294$$

294 es divisible por 2.

$$294 : 2 = 147$$

147 no es divisible por 2.

147 es divisible por 3.

$$147 : 3 = 49$$

49 no es divisible por 2, ni por 3, ni por 5.

49 es divisible por 7.

$$49 : 7 = 7$$

7 es un número primo.

$$7 : 7 = 1$$

Esta descomposición se puede escribir de una forma abreviada de este modo:

588	2
294	2
147	3
49	7
7	7
1	

- ② Escribimos el número como el producto de todos los divisores primos obtenidos.

La factorización de 588 es

$$588 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7^2$$

Como 2 y 7 están repetidos, los expresamos como potencia.

ACTIVIDADES

- 44 Halla la descomposición factorial de estos números y escríbelos como producto de factores primos.

- a) 6 d) 54 g) 82
b) 20 e) 77 h) 91
c) 23 f) 72 i) 99

- 45 Halla la factorización de estos números.

- a) 102 d) 675
b) 242 e) 391
c) 405 f) 2431

- 46 Factoriza el número 210. A partir de su descomposición factorial, descompón los siguientes números en factores primos.

- a) 105 c) 30
b) 70 d) 840

- 47 Expresa como producto de factores primos.

- a) $8 \cdot 9 \cdot 25$ c) $27 \cdot 12 \cdot 24$ e) $15^3 \cdot 12^2$
b) $10 \cdot 15 \cdot 6$ d) $16^2 \cdot 6^3$ f) $35^2 \cdot 21^3$

- 48 Razona si estas afirmaciones son verdaderas o falsas.

- a) Un número puede tener dos descomposiciones en factores primos diferentes.
b) Al factorizar 500 aparecen los factores 2, 10 y 25.
c) Cualquier número acabado en 0 tiene, al menos, dos factores primos en su descomposición.
d) No existe un número de cuatro cifras con un solo factor primo en su descomposición.

7. Máximo común divisor

Si a y b no tienen divisores comunes, entonces:

$$\text{m.c.d.}(a, b) = 1$$

Decimos que a y b son números primos entre sí.

El **máximo común divisor** de dos o más números es el mayor de sus divisores comunes.

El máximo común divisor de dos o más números $a, b, c, \dots$ se expresa como **m.c.d.** ($a, b, c, \dots$).



RETO

Si un número es múltiplo de otro, ¿cuál es el máximo común divisor de los dos números?

EJEMPLO

16. Calcula los divisores de 12 y 30, y su máximo común divisor.



GEOGEBRA

$$\text{Div}(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

$$\text{Div}(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$

Los divisores comunes de 12 y 30 son 1, 2, 3 y 6.

El mayor de los divisores comunes es 6.

$$\text{m.c.d.}(12, 30) = 6$$

EJEMPLO

17. Halla el máximo común divisor de 54, 90 y 126.

Primero descomponemos los números en factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$54 = 2 \cdot 3^3$$

$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$\begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$$

Los factores primos comunes son 2 y 3.

Elevados al menor exponente son 2 y 3².

$$\text{m.c.d.}(54, 90, 126) = 2 \cdot 3^2 = 18$$

Para calcular el máximo común divisor seguimos estos pasos:

- 1.º Descomponemos los números en factores primos.
- 2.º Escogemos los factores comunes elevados al menor exponente.
- 3.º El producto de estos factores es el m.c.d. de los números.

ACTIVIDADES

49. Calcula todos los divisores de cada número. Después, indica el mayor divisor común de cada pareja.

- | | |
|------------|------------|
| a) 42 y 63 | c) 27 y 36 |
| b) 30 y 54 | d) 18 y 25 |



50. Halla el máximo común divisor de los siguientes números.

- | | |
|------------|---|
| a) 4 y 14 | → d) 6 y 15
e) 20, 30 y 35
f) 12, 18 y 20 |
| b) 20 y 25 | |
| c) 45 y 75 | |
| | |



51. Halla el máximo común divisor de 36 y 56. A partir de él, calcula sin factorizar.

- | | |
|---------------------|----------------------|
| a) m.c.d. (18, 28) | d) m.c.d. (54, 84) |
| b) m.c.d. (9, 14) | e) m.c.d. (360, 560) |
| c) m.c.d. (72, 112) | f) m.c.d. (90, 140) |

52. **REFLEXIONA.** Encuentra tres parejas de números cuyo máximo común divisor sea 12.

- a) ¿Qué condición deben cumplir?
- b) ¿Qué otros divisores tienen en común?



Cómo se resuelven problemas de máximo común divisor



Los problemas de m. c. d. consisten en dividir en grupos varios tipos de elementos sin que sobre ninguno.

Para una fiesta se han preparado 84 magdalenas con lactosa y 36 sin lactosa. Se van a colocar en bandejas diferentes para no mezclarlas, pero con el mismo número de magdalenas en cada una. Además, quieren que haya el mínimo número posible de bandejas para hacer menos viajes.

¿Cuántas magdalenas debe tener cada bandeja? ¿Cuántas bandejas habrá de cada tipo?

- ① **Decidimos si se trata de un problema donde interviene el máximo común divisor.**

Las bandejas deben tener la misma cantidad de magdalenas y no se mezclan. El número de magdalenas por bandeja tiene que ser un divisor común de 84 y 36. Quieren hacer el mínimo número de bandejas, por lo que las bandejas deben tener el mayor número posible de magdalenas.

Se trata del máximo común divisor.

- ② **Descomponemos los números en factores primos.**

$$\begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$$

$$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$

- ③ **Elegimos los que sean comunes y calculamos el máximo común divisor.**

Factores comunes: 2 y 3

Elevados al menor exponente: 2^2 y 3

m. c. d. (84, 36) = $2^2 \cdot 3 = 12$

- ④ **Interpretamos el resultado.**

El tamaño de cada bandeja debe de ser de 12 magdalenas.

$84 : 12 = 7 \rightarrow$ Se preparan 7 bandejas de 12 magdalenas con lactosa.

$36 : 12 = 3 \rightarrow$ Se preparan 3 bandejas de 12 magdalenas sin lactosa.

ACTIVIDADES

- 53 Lucía necesita 90 l de pintura roja y 126 l de pintura verde para realizar su próximo trabajo. Sabe que comprando los botes más grandes el precio del litro es más barato.

Por otro lado, quiere comprar todos los botes del mismo tamaño para poder almacenarlos más cómodamente en el trastero.

- ¿De cuántos litros debe comprar los botes?
- ¿Cuántos botes de cada tipo tiene que comprar?



- 54 En la clase de 2.º de Bachillerato han encargado ramilletes de flores para la fiesta de graduación. Darán ramilletes rojos para aquellas personas que se gradúan con un sobresaliente de nota media y azules para el resto. En la floristería tienen 147 flores rojas y 252 flores azules, y las van a utilizar todas.

Quieren que cada ramillete tenga el mismo número de flores.

- ¿Cuántas tendrán que poner como máximo en cada uno?
- ¿Cuántos estudiantes se gradúan y con qué calificaciones?



8. Mínimo común múltiplo



Si $m.c.m. (a, b) = a \cdot b$,
 a y b no tienen ningún
 divisor común.

El **mínimo común múltiplo** de dos
 o más números es el menor de sus
 múltiplos comunes.

El mínimo común múltiplo de dos
 o más números $a, b, c, \dots$ se expresa
 como $m.c.m. (a, b, c, \dots)$.

EJEMPLO

18. Calcula el mínimo común múltiplo de 8 y 20.

Múltiplos de $8 = \dot{8} = \{8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, \dots\}$

Múltiplos de $20 = \dot{20} = \{20, 40, 60, 80, \dots\}$

Múltiplos comunes de 8 y 20 = $\{40, 80, \dots\}$

El menor de los múltiplos comunes es 40.

$m.c.m. (8, 20) = 40$

RETO

Si un número
 es divisor
 de otro, ¿cuál
 es el mínimo
 común múltiplo
 de ambos?



EJEMPLO

19. Halla el mínimo común múltiplo de 24, 30 y 45.

Primero descomponemos los números en factores primos.

24	2	30	2	45	3
12	2	15	3	15	3
6	2	5	5	5	5
3	3	1		1	
1					

$$24 = 2^3 \cdot 3$$

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$45 = 3^2 \cdot 5$$

Los factores primos comunes y no comunes son 2, 3 y 5.

Elevados al mayor exponente son $2^3, 3^2$ y 5.

$$m.c.m. (24, 30, 45) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$$

ACTIVIDADES

55. Calcula los primeros múltiplos de 18 y de 24 hasta encontrar tres múltiplos comunes. Indica cuál es el menor múltiplo común.



56. Halla el mínimo común múltiplo en cada caso.

- a) 22 y 8 c) 15 y 45
 b) 14 y 5 d) 18 y 64



57. Calcula el mínimo común múltiplo.

- a) 10, 14 y 20 b) 8, 12 y 18



58. Calcula el mínimo común múltiplo de estas parejas de números, sin factorizarlos, sabiendo que $m.c.m. (36, 27) = 2^2 \cdot 3^3$.

- a) $m.c.m. (72, 54)$
 b) $m.c.m. (72, 27)$
 c) $m.c.m. (108, 81)$

59. **REFLEXIONA.** Piensa y explica razonadamente si puede existir alguna pareja de números cuyo mínimo común múltiplo sea 1.



Cómo se resuelven problemas de mínimo común múltiplo



Los problemas de m.c.m. consisten en encontrar el primer número que es múltiplo de varios números a la vez.

1

Juan vive en Almería y cada 42 días va a Sevilla a visitar a su familia. Su hermana Encarna vive en Ávila y va a Sevilla cada 56 días.

Si hoy es Año Nuevo y han ido los dos, ¿cuántos días pasarán hasta que vuelvan a coincidir?

¿Cuántas veces habrá ido cada uno hasta entonces?

- ① **Decidimos si se trata de un problema donde interviene el mínimo común múltiplo.**

Para que coincidan tiene que pasar un número de días que sea múltiplo común de 42 y 56.

Como buscamos la primera vez que vuelven a coincidir, tendrá que ser el menor número de días posible, es decir, el menor de los múltiplos comunes.

Se trata del mínimo común múltiplo.

- ② **Descomponemos los números en factores primos.**

$$\begin{array}{r|l} 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 56 & 2 \\ 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \quad 56 = 2^3 \cdot 7$$

- ③ **Elegimos los que sean comunes y no comunes y calculamos el mínimo común múltiplo.**

Factores comunes y no comunes: 2, 3 y 7

Elevados al mayor exponente: 2^3 , 3 y 7

m.c.m. (42, 56) = $2^3 \cdot 3 \cdot 7 = 168$

- ④ **Interpretamos el resultado.**

Volverán a coincidir dentro de 168 días.

$168 : 42 = 4 \rightarrow$ Juan habrá ido 4 veces a visitar a su familia.

$168 : 56 = 3 \rightarrow$ Encarna habrá ido 3 veces a visitar a su familia.

ACTIVIDADES

- 60 En una parada de autobuses coinciden dos líneas diferentes. Los autobuses de una de las líneas pasan cada 15 minutos, y los de la otra, cada 12 minutos.

Si han salido a las 8:00 h:

- ¿A qué hora vuelven a coincidir?
- ¿Cuántas veces habrá pasado cada uno en ese tiempo?



- 61 Una ONG envía, cada 36 días, ayuda inmediata a un poblado: comida, agua... Otra ONG les proporciona, cada 84 días, financiación para el desarrollo: compra de semillas, construcción de pozos...

Si el día 1 de enero el poblado ha recibido los dos tipos de ayuda, ¿qué día volverán a coincidir?

- 62 En el pueblo de Raúl montan una feria cada verano con tres atracciones.

El viaje en noria dura 10 minutos, los coches eléctricos 12 minutos y el tren de la bruja 18 minutos.

Si todas han comenzado a funcionar a las 17:45 h:

- ¿A qué hora volverán a iniciar juntas su funcionamiento?
- ¿Cuántas veces habrá funcionado cada una hasta entonces?

- 63 En una calle, cuatro establecimientos tienen luces intermitentes como decoración navideña. Los intervalos de tiempo durante los que están encendidas son 2, 3, 6 y 8 segundos, respectivamente. Si inician el encendido todas a la vez, a las 7 de la tarde, ¿cuánto tiempo transcurre hasta que vuelven a encenderse al mismo tiempo?



ACTIVIDADES FINALES

1. Opera con potencias

ACTIVIDADES FLASH

64 Escribe, si es posible, en forma de potencia.

- a) $2 \cdot 2 \cdot 2$ c) $6 + 6 + 6 + 6$ e) $5 \cdot 5$
b) $3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5$ d) 7 f) 1

65 Realiza estas operaciones y di cómo lo haces.

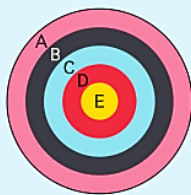
- a) $3^2 \cdot 3^7$ e) $3^8 : 3$ i) $3^9 : 3^2 : 3^3$
b) $5^6 : 5^4$ f) $5^3 \cdot 5^4 \cdot 5$ j) $8^4 : 8 \cdot 8^3$
c) $7^8 \cdot 7^2$ g) $6^2 \cdot 6^3 : 6^4$ k) $4 \cdot (4^3)^2$
d) $6^5 : 6^2$ h) $7^5 \cdot (7^2 \cdot 7^3)$ l) $(4^5)^3 : 4^7$

66 Completa en tu cuaderno.

- a) $2^{\square} = 128$ b) $\square^3 = 27$ c) $5^3 = \square$

67 Descubre la puntuación oculta de la diana y di cómo obtener 41 puntos con 4 dardos.

- A. $\square^7 : 5^3 = 5^4$
B. $12^{\square} : 12^6 = 12^9$
C. $9^5 : 9^{\square} = 9^3$
D. $3^9 : 3^{\square} = 3^2$
E. $4^{15} : 4^{\square} = 4$



74 MATEMÁTICAS Y... BIOLOGÍA.

••• Una célula se reproduce mediante mitosis, dividiéndose en dos células idénticas a la anterior, cada dos horas.

- a) ¿Cuántas células habrá dentro de 4 horas?
b) ¿Y dentro de 6 horas? ¿Y después de 100?
c) ¿Puedes escribir una fórmula general para saber el número de células después de n horas?



75 La hidratación es muy importante para las personas.

••• Adrián se encarga de darle un vaso de zumo cada día a los 72 mayores de una residencia. Compra los vasos en cajas que tienen 4 filas de vasos con 4 vasos en cada fila. ¿Tendrá suficientes vasos si compra 4 cajas?

76 MATEMÁTICAS Y... REDES SOCIALES. De media, cada persona que utiliza Twitter publica 5 tuits diarios. Si una persona manda un tuit a otras 5 que lo reenvían a otras 5 personas diferentes, ¿a cuántas les llegará después de enviarlo seis veces?

77 INVESTIGA. ¿En qué cifra termina 5^{2020} ?
••• ¿Y el número 4^{2020} ?

68 Completa en tu cuaderno.

- a) $3^4 \cdot \square^2 \cdot 3^7 = 3^{\square}$ c) $(\square^7 \cdot 10^{\square}) : 10 = 10^8$
b) $(5^8 : 5^{\square}) \cdot 5^3 = \square^4$ d) $6^8 \cdot (\square^7 : 6^{\square}) = 6^{12}$

69 Completa en tu cuaderno los exponentes que faltan.

- a) $8^3 = 2^{\square}$ b) $27^4 = 3^{\square}$ c) $125^6 = 5^{\square}$

70 Expresa en forma de una única potencia, si se puede.

- a) $8^2 \cdot 4^2$ c) $2^6 \cdot 7^5$ e) $6^{12} \cdot 6^2$
b) $15^3 : 3^3$ d) $6^3 : 6^3$ f) $18^3 : 2^9$

71 Copia y relaciona.

- a) $3^2 \cdot (2^4 : 2^2)$ b) $2^3 \cdot (3 \cdot 3^2)$ c) $2^6 : 2^2 \cdot 3^4$
1) 6^4 2) 6^2 3) 6^3



72 JUEGO. Se escribe en un papel el número 100. Cada participante, en su turno, tiene que restar al número escrito en el papel una potencia de 2. Se tacha el número anterior y se escribe como nuevo número la diferencia. Gana el que alcance el número 0.

73 Detecta el error en las siguientes operaciones.

- a) $3^2 \cdot 4^5 = 12^7$ c) $4^4 : 2^3 = 2$ e) $2^5 \cdot 2^2 = 4^7$
b) $2^3 \cdot 3^2 = 6^6$ d) $7^8 : 5^8 = 2^8$ f) $2^5 : 2^2 = 1^3$

78 RETO. Busca el menor número a tal que $24 \cdot a$ sea el cuadrado de un número natural.

2. Aplica los criterios de divisibilidad

Múltiplos y divisores

ACTIVIDADES FLASH

79 Di cinco múltiplos de cada número.

- a) 4 b) 7 c) 8 d) 3

80 Dada la relación $104 = 4 \cdot 26$, explica qué afirmaciones son verdaderas.

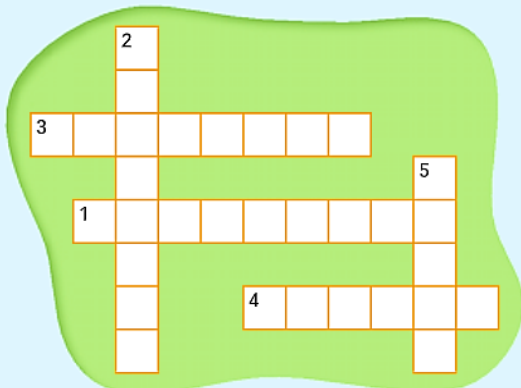
- a) 104 es divisible por 4.
b) 104 es múltiplo de 4.
c) 26 es divisor de 104.
d) 104 es divisible por 26.

81 Di tres números que sean múltiplos de 2 y de 3 a la vez y explica cómo lo haces.

82 Razona y di cuáles son los primeros tres múltiplos de 5 que también son múltiplos de 2.

83 Copia, completa el texto y resuelve el crucigrama.

- 24 : 4 = 6 → 24 es (1) por 4 y, además, 24 es un (2) de 4. Entre 24 y 4 existe una (3) de divisibilidad. 24 : 4 es una división (4) porque el (5) es 0.



84 Indica si existe relación de divisibilidad entre estos pares de números y di cuál es.

- a) 16 y 48 b) 23 y 90 c) 40 y 41 d) 57 y 58

¿Puede existir relación de divisibilidad entre dos números consecutivos?

85 **INVESTIGA.** Escribe todos los números del 2 al 20.

- a) ¿Qué números son múltiplos de otro número distinto?
b) ¿Cuántos números no son múltiplos de ninguno?
c) ¿Cuáles son los números que son múltiplos de más números?



ACTIVIDADES FLASH

92 Explica si las siguientes afirmaciones equivalen a esta: «La división de 56 entre 4 es exacta».

- a) 56 es divisor de 4. d) 4 es divisible por 56.
b) 4 es divisor de 56. e) 4 es múltiplo de 56.
c) 56 es divisible por 4. f) 56 es múltiplo de 4.

93 De la relación $27 \cdot 4 = 108$, razona y di qué afirmaciones son verdaderas.

- a) 27 es divisor de 108. d) 4 es múltiplo de 27.
b) 27 es múltiplo de 108. e) 4 es divisor de 27.
c) 4 es divisor de 108. f) 108 es divisible por 27.

94 Piensa y contesta.

- a) ¿Es 1 divisor de 7? ¿Y de 17?
b) ¿Es 9 divisor de 8? ¿Y 10? ¿Puede ser divisor de 8 un número mayor que 8?
c) ¿Cuáles son el menor y el mayor divisor de un número?

95 Comenta razonadamente si es verdadero o falso.

- a) Los únicos divisores de 12 son 2 y 4.
b) 2, 5 y 10 son divisores de 40.
c) Los divisores de 77 son 1, 7, 11 y 77.

86 Indica los múltiplos de 3 que no son múltiplos de 2 y que estén comprendidos entre 50 y 70.

87 Calcula un número entre 540 y 550 que sea:

- a) Múltiplo de 14. c) Múltiplo de 26.
b) Múltiplo de 17. d) Múltiplo de 39.

¿Existe algún múltiplo de 19 entre esos números?

88 Escribe el menor múltiplo de 43 que sea mayor que 1500 y el mayor múltiplo que sea menor que 2000.

89 ¿Cuántos múltiplos de 3 y 11 a la vez hay menores que 200?

90 Piensa tres números que sean múltiplos de 6 y de 5 a la vez. ¿Son múltiplos de 10? ¿Por qué?

91 **RETO.** Escribe un número con las cifras del 1 al 6, sin repetir ninguna, de tal manera que el número que formen la primera y la segunda cifra sea múltiplo de 2, el número que formen la segunda y la tercera cifra sea múltiplo de 3, el número que formen la tercera y la cuarta cifra sea múltiplo de 4, y así sucesivamente. De todos los números posibles, ¿cuál es el menor?

96 Encuentra todos los divisores de cada uno de los diez primeros números naturales.

97 Mediante el movimiento del caballo de ajedrez, recorre todos los divisores de 126 sin pasar dos veces por el mismo divisor.

1	22	15	51	10	2	37	11
40	31	26	63	32	16	47	50
56	14	45	25	43	39	3	29
20	41	13	34	6	24	61	4
58	23	42	5	28	55	48	38
30	49	35	52	21	33	19	57
12	126	8	44	59	54	120	9
36	27	53	18	17	7	46	60



98 **INVESTIGA.** Razona si todos los números divisibles por 2 son divisibles también por 4. ¿Y al revés?

99 Razona si son correctas las siguientes afirmaciones.

- a) Como 9 es divisor de 72, 3 también lo es.
b) Como 3 es divisor de 42, 9 también lo es.

ACTIVIDADES FINALES

- 100 Completa el crucigrama escribiendo una cifra en cada casilla, la suma de cada fila o columna debe ser igual.

	A	B	C
1			
2			
3			

HORIZONTALES

- Divisible por 2. Cociente = 13.
- Al dividir por 13, el cociente es 4 y el resto es 10.
- Al dividir por 9, el cociente y el resto valen 8.

- 101 36 deportistas van a organizarse por equipos con el mismo número de personas. ¿Pueden organizarse en equipos con un número impar de personas?

- 102 **INVESTIGA.** En una clase de 25 estudiantes hay 16 pupitres de dos plazas.
¿Cuál es el número máximo de personas que se pueden sentar solas? ¿Y si hubiese solo 20 estudiantes?

- 103 Encuentra tres números naturales que cumplan cada una de las condiciones.

- Divisibles por 2, por 4 y por 8 a la vez.
- Divisibles por 3, por 9 y por 27 a la vez.
- Divisibles por 2, por 3 y por 4 a la vez.
- Divisibles por 2, por 3 y por 9 a la vez.
- Divisibles por 3, por 6 y por 9 a la vez.

- 108 Escribe varios números pares e impares y razona si es verdadero o falso.

- Un número par puede ser divisor de un número impar.
- Un número impar puede ser divisor de un número par.
- Un número impar puede ser múltiplo de un número par.
- Un número impar puede ser divisible por un número par.
- Entre un número par y un número impar puede existir una relación de divisibilidad.

Criterios de divisibilidad

ACTIVIDADES FLASH

- 109 Utiliza los criterios de divisibilidad y di si estos números son divisibles por 2, 3, 5, 10 y 11.
a) 128 b) 251 c) 495 d) 968 e) 116160
- 110 Un número es divisible por 4 cuando sus dos últimas cifras son ceros o forman un múltiplo de 4. Comenta si estos números son múltiplos de 4.
a) 128 c) 434 e) 11610
b) 271 d) 952 f) 5624

- 104 Encuentra los múltiplos de 11 que se pueden formar ordenando las cifras 1, 3, 4 y 6.

- 105 Utiliza las cifras 3, 4, 5 y 6 para escribir números de 4 cifras que sean divisibles por 11.

- 106 **JUEGO.** Se recortan 32 papelitos y se agrupan en un montón. Por turnos, cada persona debe dividir en montones iguales los papelitos que tenga en cualquiera de los montones que hay sobre la mesa, pero no puede dividirlos en más de 4 montones. Quien consiga primero un montón con un solo papelito gana.

107 MATEMÁTICAS Y... FÚTBOL.

INTERNET

- En la liga de fútbol, por cada partido que gana un equipo obtiene 3 puntos, si empata obtiene 1 punto y si pierde obtiene 0 puntos. Busca los puntos obtenidos por tu equipo de fútbol favorito en su liga.
¿Puedes saber cuántas victorias ha logrado como máximo conociendo solo los puntos totales?
¿Y como mínimo?



- 111 **INVENTA.** Escribe un número de 10 cifras divisible por 2, 3, 5, 7 y 11.

- 112 Determina si $2^{15} \cdot 3$ es divisible por estos números.
a) 2 c) 4 e) 6 g) 8 i) 10 k) 12
b) 3 d) 5 f) 7 h) 9 j) 11 l) 14



Cómo se calcula una cifra de un número para que sea divisible por otro

- 113 ¿Cuánto debe valer a para que el número $3a2$ sea múltiplo de 3?

PRIMERO. Se aplica el criterio de divisibilidad. En este caso, la suma de las cifras del número debe ser un múltiplo de 3.

$$3 + a + 2 = 5 + a$$

La suma, $5 + a$, tiene que ser un múltiplo de 3.

SEGUNDO. Se tantean los valores de a para que se cumpla el criterio de divisibilidad.

- $a = 1$, ya que $5 + 1 = 6$.
- $a = 4$, ya que $5 + 4 = 9$.
- $a = 7$, ya que $5 + 7 = 12$.

114 ¿Cuánto puede valer a para que el número $5a4a$ sea divisible por 3? ¿Y por 5? ¿Y por 2?

115 Los 114 estudiantes de 1.º de ESO hemos hecho una excursión al lago. Allí hay distintos tipos de barcas. Las hay para 2 y 3 personas y también con capacidad para 5, 6, 9 y 10 personas.

- a) Si queremos llenar barcas con el mismo número de plazas, ¿qué tipo de barcas podemos coger?
b) ¿Cuántas personas más tendrían que venir para poder llenar barcas de 5 personas? ¿Y de 10 personas?

Números primos. Descomposición factorial

ACTIVIDADES FLASH

116 Clasifica estos números en primos y compuestos.
3 9 23 35 47 53 65 73 81 96

117 Si la división $a : 7$ es exacta, ¿el número a es primo o compuesto? Expón tu respuesta.

118 **INVENTA.** Buscad todos los números primos comprendidos entre el 1 y el 106 y ordenadlos de menor a mayor. Asignad a cada número una letra del abecedario, de manera ordenada, y utilizad los números para escribir un mensaje secreto. ¿Puedes descifrar el mensaje de tu pareja?

119 **RETO.** ¿Es 111 111 111 111 un número primo? ¿Por qué?

120 Si multiplicamos dos números primos, ¿cuáles son los divisores de su producto?

121 La descomposición en factores primos de un número contiene cinco números primos diferentes. ¿Cuál es el menor número que lo cumple?

122 **JUEGO.** La conjetura de Goldbach dice que cualquier número par no primo se puede escribir como una suma de dos números primos.

Preparad trozos de papel y escribid en cada uno un número par distinto. Después, elegid un trozo al azar y quien descomponga primero el número según la conjetura de Goldbach ganará.



123 **INVESTIGA.** ¿En qué cifras puede acabar el doble de un número primo?



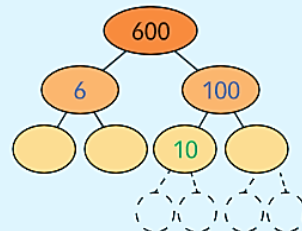
124 ¿A qué número corresponden las siguientes descomposiciones en factores primos?

- a) $2^2 \cdot 3$ b) $2^3 \cdot 3^2$ c) $2 \cdot 3^2 \cdot 5$

125 Realiza dos descomposiciones diferentes para cada número e indica cuatro divisores de cada uno.

- a) 600 d) 616
b) 420 e) 784
c) 810 f) 2700

Después, indica cuál es su descomposición en factores primos.



126 Obtén la descomposición en factores primos de los siguientes números.

- a) 560 c) 440 e) 378
b) 2800 d) 858 f) 405

127 Identifica los errores existentes en estas descomposiciones en factores primos.

- a) $77 = 7 \cdot 7$ d) $1200 = 15 \cdot 8 \cdot 10$
b) $99 = 33 \cdot 3$ e) $800 = 2^3 \cdot 100$
c) $100 = 10 \cdot 2$ f) $500 = 5 \cdot 10^2$

128 Al sumar tres unidades a un número primo, ¿el resultado será un número primo o compuesto?

3. Calcula el m.c.d. y el m.c.m.

129 Copia y completa el crucigrama con una cifra en cada casilla.

	A	B	C	D
1				
2				
3				
4				

HORIZONTALES

1. Al revés, m.c.m. (3, 17)
2. Al revés, m.c.d. (24, 36)
m.c.d. (32, 40)
3. m.c.m. (21, 33)
4. m.c.d. (91, 21)
m.c.d. (64, 80)

VERTICALES

- A. m.c.d. (14, 30)
m.c.d. (56, 77)
B. m.c.m. (14, 16)
C. m.c.d. (15, 20)
m.c.d. (93, 124)
D. m.c.m. (48, 102)

130 Encuentra tres parejas de números, a y b , que cumplan lo siguiente.

- a) m.c.m. (a, b) = 28 c) m.c.d. (a, b) = 6
b) m.c.m. (a, b) = 120 d) m.c.d. (a, b) = 15

131 **INVESTIGA.** ¿Cuál es el mínimo común múltiplo de dos números primos? ¿Y su máximo común divisor?

ACTIVIDADES FINALES

4. Resuelve problemas de divisibilidad

- 132** En clase somos 24 personas. Queremos dividirnos en grupos del mismo número de integrantes y que no sobre ni falte nadie. ¿En cuántos grupos y de cuántas personas podemos dividir la clase?

- 133 MATEMÁTICAS Y... FÚTBOL.** En un álbum de cromos de fútbol, cada equipo tiene 18 recuadros para colocar los cromos de sus futbolistas. Hay 20 equipos y al final del álbum hay otros 40 recuadros para colocar los fichajes de última hora.

- ¿Cuántos cromos se necesitan para rellenar el álbum?
- Si cada sobre de cromos tiene 6 cromos, ¿cuántos sobres habrá que comprar como mínimo para tener la colección completa?
- Exceptuando los recuadros destinados al escudo y a la entrenadora o entrenador, donde se coloca un solo cromo, el resto de los recuadros pueden incluir hasta dos cromos (se coloca uno encima de otro). ¿Cuántos cromos se pueden incluir, como máximo, en el álbum?



- 136** Para una merienda con toda la familia, mi padre ha preparado unos bocadillos.



42 de jamón



49 de chorizo

Los quiere repartir en bandejas por las mesas y que tengan el mismo número de bocadillos sin que sobre ninguno. Como mínimo quiere poner 3 bocadillos y no caben más de 8.

- De los bocadillos de jamón, ¿cuántos puede poner por bandeja? ¿Cuántas necesita? ¿Y de los de chorizo?
 - Si en cada bandeja hay bocadillos de los dos tipos, y todas tienen la misma composición de bocadillos, ¿cuántos bocadillos de cada tipo tiene que poner? ¿Podría hacerlo?
- 137 MATEMÁTICAS Y... CONSUMO.** Una máquina expendedora de bebidas y bocadillos acepta y devuelve monedas de 1 € y 2 €, y billetes de 5 €, 10 € y 20 €. Si hemos pagado 5 € por un bocadillo con un billete de 20 €, ¿de cuántas formas puede dar el cambio solo con monedas o billetes iguales?

- 134** Se ha contratado a 17 personas para recoger fruta. Se quieren formar grupos del mismo número de personas sin que sobre nadie.



- ¿Se pueden formar varios grupos de más de una persona? ¿Por qué?
- Si se contrata a un trabajador más, ¿cuántos grupos se podrían formar y cuántas personas tendría cada grupo? ¿Existen varias posibilidades de formarlos?
- ¿Cuántas personas más habría que contratar para formar grupos de 5? ¿Cuántos grupos se formarían?

- 135** Mañana es mi cumpleaños. He invitado a todos mis amigos y amigas y en total seremos 12 personas. Compraré 3 refrescos para cada una.



¿Con qué marca de refrescos me saldrá más barato?

- 138 RETO.** En un instituto hay 298 estudiantes. Al fútbol se juega 11 contra 11 y al baloncesto 5 contra 5. Todos los estudiantes forman parte de un equipo y al menos 100 practican cada deporte. Si ninguno puede jugar en dos equipos a la vez, ¿cuántas personas juegan al fútbol y cuántas al baloncesto?



- 139** En un supermercado reciben la leche en paquetes con 6 botellas cada uno. Hoy ha llegado este pedido.

Tipo de leche	Entera	Semidesnatada	Sin lactosa
N.º de botellas	126	90	88
Precio total (€)	127	99	84

¿Han podido recibir 126 botellas de leche entera? Comprueba si hay algún error en otra cantidad. ¿Crees que el coste de las botellas es correcto?



1

➔ 140 Andrea va al polideportivo cada 4 días y su amiga cada 3. Hoy han coincidido. ¿Cuántos días, como mínimo, han de pasar para que vuelvan a coincidir?

➔ 141 En una frutería había 21 kg de cerezas y 15 kg de fresas. Hicieron bandejas de igual peso y tipo de fruta, todas del mayor peso posible, y no sobró fruta. ¿Cuántas bandejas obtuvieron?

➔ 142 Iván tiene gripe y toma un jarabe cada 8 horas y una pastilla cada 12 horas. Acaba de tomarse las dos medicinas juntas. ¿Dentro de cuántas horas tomará de nuevo las dos medicinas a la vez?



➔ 143 Un semáforo se pone rojo cada 14 segundos y otro semáforo cada 10 segundos. A las 9:30 h los dos semáforos estaban en rojo. ¿Cuántos segundos pasarán hasta que vuelvan a estar ambos en rojo?

➔ 144 **MATEMÁTICAS Y... CONSTRUCCIÓN.**
Una habitación mide 6 m de largo y 9 m de ancho.
a) ¿Qué tamaño tendrían las baldosas cuadradas más grandes que se podrían poner sin cortar ninguna?
b) Los tamaños más habituales de las baldosas para el suelo son de 25×25 cm y de 60×60 cm. ¿Qué baldosas se podrían poner sin cortar ninguna?

Nuevo robo en las tiendas Shop

La empresa de seguridad encargada de la vigilancia del centro comercial ha manifestado que «cumple a rajatabla el convenio laboral de sus empleados, respetando los tiempos de descanso e impidiendo las horas extras». Asimismo manifiesta que los 9 agentes semanales son suficientes para cubrir las labores para las que han sido contratados.

Convenio laboral de seguridad

- Horario máximo semanal: 42 horas.
- Jornada diaria máxima: 12 horas, seguida de un descanso mínimo del doble de la duración de la jornada.

Plan de seguridad para el centro comercial

- Horario de apertura (todos los días de la semana de 10:00 a 22:00 h): dos agentes paseando por el centro y un tercero en la sala de videovigilancia.
- Cierre del local: dos agentes en la sala de videovigilancia que efectuarán rondas cada hora.

Y tú, ¿qué opinas?

PROBLEMAS APARENTEMENTE DISTINTOS

145 Dado el número natural 144:
a) Enumera de forma ordenada todos sus divisores.
b) Anota todos los productos de dos números que den como resultado 144.

146 Benita tiene 144 olmos. Hasta que crezcan los quiere plantar en un terreno rectangular de forma que las filas y columnas tengan el mismo número de árboles. ¿Cuántos puede tener cada fila?

147 Factoriza los números 140 y 200 y calcula el máximo común divisor de ambos.

➔ 148 Queremos dividir una nave rectangular de 140 m de ancho y 200 m de largo en compartimentos cuadrados con la máxima superficie posible. ¿Cuánto debe medir el lado de cada compartimento?

149 Factoriza la siguiente pareja de números: 20 y 12.
a) ¿Cuál es su mínimo común múltiplo?
b) Halla el cociente de la división del mínimo común múltiplo entre cada uno de los números.

150 María visita a sus padres cada 20 días y su hermano Juan cada 12. Si han coincidido hoy:
a) ¿Cuántos días tardarán en volver a coincidir?
b) ¿Cuántas visitas habrá hecho cada uno antes de que vuelvan a coincidir?

¿Qué hago con las salchichas que me sobran?

Cuando descargamos la compra me fijo en la cantidad de unidades que tiene cada paquete y cómo está distribuido en filas y columnas. ¿Por qué lo harán así y no de otra forma?

He leído que los distribuyen así para poder transportarlos mejor. Hacen los paquetes con forma de rectángulo grande porque es la manera más cómoda de cogerlos con las manos y desplazarlos. Por este motivo, para que los paquetes tengan forma rectangular, siempre tienen más columnas que filas.



Las latas de refrescos suelen venir en paquetes de 24 latas, distribuidas en 4 filas y 6 columnas.



Los envases de leche normalmente vienen con 6 tetrabriks o 6 botellas ordenados en 2 filas de 3 botellas cada una.



Las botellas de agua se empaquetan en 3 filas y 4 columnas.

1 ¡Qué difícil es llevar esto!

El número de unidades es importante a la hora de empaquetar y, en algunos casos, se puede hacer más cuadrado o más alargado.

- ¿De cuántas formas se pueden empaquetar las 24 latas de refresco? ¿Cuántas filas y columnas tendría cada paquete?
- ¿Y si hay que empaquetar 25 latas? ¿Qué forma tendría el paquete? ¿Sería más sencillo transportarlo?
- Los 6 tetrabriks de leche, ¿de cuántas maneras distintas podrías empaquetarlos? ¿Y si se quisieran empaquetar 9 tetrabriks?
- ¿Se te ocurre alguna manera distinta de empaquetar las 12 botellas de agua? ¿Por qué crees que no se suelen hacer paquetes de 80 botellas?





2 No me cabe en la nevera

La nevera que tenemos en casa tiene varias repisas para colocar los alimentos. Sus dimensiones son 72 cm de ancho y 60 cm de profundidad.

- Una lata de refresco mide 6 cm de diámetro. ¿Cuánto mide un paquete de 24 latas que está empaquetado en 4 filas de 6 latas en cada fila?
- ¿Cuántos paquetes de 24 latas puedo meter en una repisa sin colocar unos encima de otros? ¿Cuántas latas en total tienen esos paquetes?
- ¿Ocuparían estos paquetes toda la repisa o quedaría algún hueco libre?
- Si los paquetes de latas tuvieran forma cuadrada, es decir, tuvieran el mismo número de latas por filas y por columnas, ¿cuánto debería medir de lado cada paquete para que no quedasen huecos libres en la repisa?
- ¿Cuántas latas tendría cada paquete? ¿Cuántas latas en total podría meter en cada repisa de la nevera?
- Para organizar mejor mi nevera, ¿sería mejor que los paquetes fueran cuadrados?

3 ¡Siempre me sobra algo!

Hemos decidido que esta noche cenaremos perritos calientes. He sacado una bolsa de panecillos, que vienen de 6 en 6, y mis salchichas favoritas, que están envasadas en paquetes de 5 unidades. Si pongo una salchicha por panecillo, o me sobran panecillos, o me sobran salchichas.



- ¿Cuántas bolsas de salchichas y de pan hay que comprar como mínimo para que no me sobre nada? ¿Y si los paquetes de salchichas tuvieran 4 unidades?
- Si cenamos mi madre, mi padre, mi hermana y yo, ¿cuántos perritos calientes tendremos que comer cada uno para que no sobre?
- Queremos comernos dos perritos cada uno. ¿Cuántas unidades deberían venir en los paquetes para que no nos sobre nada?

Me he dado cuenta de que me pasa lo mismo con las hamburguesas. La carne suele estar envasada en paquetes de 6 unidades, mientras que los panecillos vienen en paquetes de 8.

- ¿Sería mejor que las bolsas de panecillos tuvieran 4 unidades?



RESUMEN DE UNIDAD

DIVISIÓN

Dividendo $\rightarrow 25 \overline{) 3}$ Divisor
 Resto $\rightarrow 1$ 8 Cociente

DIVISIBILIDAD

8 : 2 es una **división exacta**.
 $\updownarrow$
 8 es **divisible** por 2.
 $\swarrow \searrow$
 8 es **múltiplo** de 2. $\rightarrow$ 2 es **divisor** de 8.

POTENCIA

$14^5 = 14 \cdot 14 \cdot 14 \cdot 14 \cdot 14$
 Base Exponente 5 veces

NÚMERO PRIMO

Div (7) = {1, 7}
 Div (11) = {1, 11}

NÚMERO COMPUESTO

Div (10) = {1, 2, 5, 10}
 Div (12) = {1, 2, 3, 4, 6, 12}

AUTOEVALUACIÓN



1. Opera con potencias

- 1 Resuelve $5^2 \cdot 5^7 : 5^3$.
 a) 5^{12} b) 5^{-2} c) 5^6 d) 5^{-8}
- 2 Copia y completa el hueco: $2^{\square} \cdot 2^3 : (2^3 \cdot 2) = 2^4$.
 a) 2 b) 3 c) 4 d) 5
- 3 Opera $7^3 : 7^2 \cdot 7^5 : 7^2$.
 a) 7^{12} b) 7^4 c) 7^8 d) 7^2
- 4 Expresa como una sola potencia $2^5 \cdot 3^5 : (6^2 \cdot 6) \cdot 4^2$.
 a) 6^2 b) 12^2 c) 24^2 d) 24^6

2. Aplica los criterios de divisibilidad

- 5 Decide cuál de estos números no es divisor de 24.
 a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5
- 6 Señala el número primo.
 a) 91 b) 93 c) 95 d) 97 e) 99
- 7 Encuentra el número compuesto.
 a) 101 b) 103 c) 105 d) 107 e) 109
- 8 Sin realizar cálculos, decide a qué número corresponde la descomposición factorial $2^3 \cdot 5 \cdot 3^2$.
 a) 300 b) 350 c) 360 d) 390
- 9 ¿Cuál es la descomposición en factores primos de 720?
 a) $2^4 \cdot 3 \cdot 5$ b) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 4 \cdot 5$ c) $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$
- 10 ¿Cuántos múltiplos de 13 hay entre 100 y 200?
 a) 6 b) 7 c) 8 d) 9

3. Calcula el m. c. d. y el m. c. m.

- 11 ¿Cuál es el mínimo común múltiplo de 25 y 55?
 a) 5 b) 25 c) 250 d) 275
- 12 Indica el máximo común divisor de 84 y 120.
 a) 2 b) 4 c) 12 d) 28

4. Resuelve problemas de divisibilidad

- 13 Lorena quiere sembrar 450 árboles en filas, con el mismo número en cada fila. Señala lo incorrecto.
 a) Puede tener 50 filas iguales.
 b) Puede sembrar 36 árboles en cada fila.
 c) Puede sembrar 45 árboles en cada fila.
 d) Le hace falta un árbol para completar 11 filas.
- 14 La línea 1 de autobús pasa cada 6 minutos, la línea 2 cada 8 minutos y la línea 3 cada 10 minutos. Si acaban de coincidir las tres líneas, volverán a coincidir en:
 a) 45 min b) 90 min c) 1 h d) 2 h
- 15 Para hacer ramos iguales con el mayor número de flores, pero sin mezclar, hay 24 rosas y 18 claveles. ¿Cuántas flores debe tener cada ramo?
 a) 2 b) 3 c) 6 d) 12

VALORA TU APRENDIZAJE

- ¿Lo intentas de nuevo si algo no te sale bien?
- ¿Aceptas la ayuda de otras personas?