



## ACTIVIDADES RESUELTAS

### Límite de una sucesión

Determinar el límite de un cociente de polinomios con radicales

Calcula los siguientes límites. a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n - 1}{\sqrt{3n^4 - 2n^2 + 1}}$       b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n^2 + n - 7}}{2n + 2}$       c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 + 2n - 4}}{\sqrt[3]{2n^3 - n^2}}$

**PRIMERO.** Se determina el grado del numerador y del denominador.

a)  $\frac{4n - 1}{\sqrt{3n^4 - 2n^2 + 1}} \rightarrow \begin{matrix} \text{Grado} = 1 \\ \text{Grado} = \frac{4}{2} = 2 \end{matrix}$       b)  $\frac{\sqrt{3n^2 + n - 7}}{2n + 2} \rightarrow \begin{matrix} \text{Grado} = \frac{2}{2} = 1 \\ \text{Grado} = 1 \end{matrix}$       c)  $\frac{\sqrt{n^3 + 2n - 4}}{\sqrt[3]{2n^3 - n^2}} \rightarrow \begin{matrix} \text{Grado} = \frac{3}{2} \\ \text{Grado} = \frac{3}{3} = 1 \end{matrix}$

**SEGUNDO.** Se comparan los grados obtenidos para aplicar los resultados conocidos en la resolución de límites de cocientes.

a) Grado del numerador < Grado del denominador  $\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n - 1}{\sqrt{3n^4 - 2n^2 + 1}} = 0$

b) Grado del numerador = Grado del denominador  $\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n^2 + n - 7}}{2n + 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) Grado del numerador > Grado del denominador  $\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 + 2n - 4}}{\sqrt[3]{2n^3 - n^2}} = +\infty$

### PRACTICA

34. Calcula los siguientes límites.

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{2n^3 + 3n - 1}}{\sqrt{1 + 2n^2}}$

b)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{n^2 - 6n + 1}}{7n^3 - 7}$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{2n^2 + n + 7}}{8n - 1}$

### Límite de una función en un punto

Calcular el límite de una función en un punto

Calcula los siguientes límites.

a)  $\lim_{x \rightarrow -5} \sqrt{x^2 - 9}$

b)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x - 1}{x + 2}$

c)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

**PRIMERO.** Se sustituye  $x$  por el punto en el que se quiere calcular el límite.

a)  $\lim_{x \rightarrow -5} \sqrt{x^2 - 9} = \sqrt{(-5)^2 - 9} = 4$

b)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x - 1}{x + 2} = \frac{2(-2) - 1}{(-2) + 2} = \frac{-5}{0} = \infty$

c)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(-1)^2 - 1}{(-1) + 1} = \frac{0}{0}$

**SEGUNDO.** Se calcula el límite teniendo en cuenta el resultado anterior:

- Si es un número, el límite está resuelto.

a)  $\lim_{x \rightarrow -5} \sqrt{x^2 - 9} = 4$

- Si es  $\infty$ , hay que calcular los límites laterales. Si no coinciden, no existe límite.

b)  $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x - 1}{x + 2} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x - 1}{x + 2} = -\infty \rightarrow$  No existe  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x - 1}{x + 2}$

- Si es una indeterminación del tipo  $\frac{0}{0}$ , se resuelve factorizando los polinomios.

c)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x - 1)\cancel{(x + 1)}}{\cancel{x + 1}} = \lim_{x \rightarrow -1} (x - 1) = -1 - 1 = -2$

### PRACTICA

35. Halla el valor de los siguientes límites.

a)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 + 16}$

b)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{5x - 9}{2x^2 + 6x}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{3x^2 + x}$

**de una función en un punto**

ular un límite que presenta una  
terminación  $\frac{0}{0}$  cuando hay radicales

la el siguiente límite.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x-3}$$

RO. Se estudia si, al sustituir  $x$  por el punto, el límite da  
determinación.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x-3} = \frac{\sqrt{3+6} - 3}{3-3} \rightarrow \frac{0}{0}$$

DO. Para resolver la indeterminación, se multiplican  
erador y el denominador por el conjugado de  
resión que tiene la raíz.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+6} - 3)(\sqrt{x+6} + 3)}{(x-3)(\sqrt{x+6} + 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+6) - 3^2}{(x-3)(\sqrt{x+6} + 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+6} + 3)} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

**PRACTICA**

determina los siguientes límites.

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5} - 3}{x-2}$

**Ramas infinitas**

determinar el signo de las ramas infinitas de una función racional

la las ramas infinitas de estas funciones.

a)  $f(x) = \frac{2x^2 + 7x - 1}{x - 9}$

b)  $f(x) = \frac{-2x^2 - 1}{x + 6}$

c)  $f(x) = \frac{-2x^3 - 5x}{x + 5}$

d)  $f(x) = \frac{-2x^3 - 3x - 4}{-3x + 4}$

ERO. Se toman los monomios con las  $x$  de mayor grado en el numerador  
el denominador y se dividen.

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 7x - 1}{x - 9} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3 - 5x}{x + 5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^2) = -\infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2 - 1}{x + 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x) = -\infty$

d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3 - 3x - 4}{-3x + 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3}{-3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{3}x^2 = +\infty$

DO. Se calculan los límites teniendo en cuenta la regla de los signos.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^2) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^2) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x) = +\infty$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3}x^2 = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{3}x^2 = +\infty$

**Ramas infinitas. Asintotas**

Representar una función conociendo  
sus asíntotas y sus puntos de corte

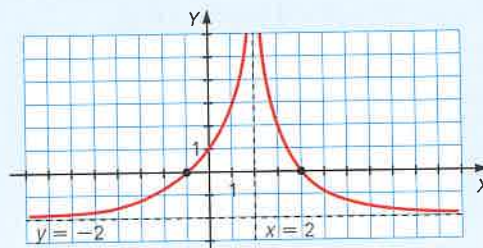
Dibuja la gráfica de una función tal que:

- La recta  $y = -2$  es una asíntota horizontal y se aproxima a ella por encima.
- La recta  $x = 2$  es una asíntota vertical.
- Corta al eje  $X$  en  $-1$  y  $4$ .

PRIMERO. Se representan las asíntotas y los puntos  
de corte en los ejes de coordenadas.

SEGUNDO. Se representa la información que se da sobre  
sus ramas infinitas.

TERCERO. Se unen las ramas infinitas con los puntos  
de corte mediante curvas.



**PRACTICA**

37. Representa la gráfica de una función que corta los ejes  
en el origen de coordenadas, siempre es creciente,  
tiene asíntotas verticales en  $x = -1$  y  $x = 3$  y una  
asíntota horizontal en  $y = 0$ .

Asintotas

Determinar si una función racional tiene asíntotas horizontales y oblicuas

Calcula las asíntotas. a)  $f(x) = \frac{4x - 1}{x^2 + 2}$     b)  $f(x) = \frac{-2x^2}{x^2 + 6}$     c)  $f(x) = \frac{x^3 - 4x}{-x^2 - 5}$     d)  $f(x) = \frac{-2x^3 - 3x}{-3x - 1}$

PRIMERO. Se determina el grado de los polinomios del numerador y del denominador.

a)  $\frac{4x - 1}{x^2 + 2} \rightarrow$  Grado 1 / Grado 2    b)  $\frac{-2x^2}{x^2 + 6} \rightarrow$  Grado 2 / Grado 2    c)  $\frac{x^3 - 4x}{-x^2 - 5} \rightarrow$  Grado 3 / Grado 2    d)  $\frac{-2x^3 - 3x}{-3x - 1} \rightarrow$  Grado 3 / Grado 1

SEGUNDO. Se comparan los grados de ambos polinomios.

- Si el grado del numerador es menor que el del denominador, la función tiene una asíntota horizontal en  $y = 0$ .

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - 1}{x^2 + 2} = 0 \rightarrow y = 0$

- Si el grado del numerador menos el grado del denominador es 1, la función tiene una asíntota oblicua.

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x}{-x^2 - 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x}{-x^3 - 5x} = -1$

$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-9x}{-x^2 - 5} = 0 \rightarrow y = -x$

- Si el grado del numerador es igual al grado del denominador, la función tiene una asíntota horizontal en  $y = a$  con  $a \neq 0$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2}{x^2 + 6} = -2 \rightarrow y = -2$

- Si el grado del numerador menos el grado del denominador es mayor que 1, la función no tiene asíntota horizontal ni oblicua.

d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^3 - 3x}{-3x - 1} = \infty$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^3 - 3x}{-3x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^3 - 3x}{-3x^2 - x} = \infty$

PRACTICA

39. Halla las asíntotas horizontales y oblicuas de estas funciones.

a)  $f(x) = \frac{2x^4 + 3x}{1 - x^2}$     b)  $f(x) = \frac{x^2 - 3}{-3x}$     c)  $f(x) = \frac{2x - x^3}{x^2 - 1}$     d)  $f(x) = \frac{3x - 1}{x^2 - 5x}$

Asintotas

Hallar asíntotas horizontales de funciones del tipo  $\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right)^{R(x)}$  que presentan la indeterminación  $1^\infty$

Halla las asíntotas de la función  $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x+2}$ .

PRIMERO. Se comprueba el tipo de indeterminación.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x+2} = \left(\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x-1}\right)^{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x+2)} \rightarrow 1^\infty$

SEGUNDO. Se suma y se resta 1 dentro del paréntesis y se pasa el numerador de la fracción al denominador.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{x+1}{x-1} - 1\right)^{x+2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{x+1-x+1}{x-1}\right)^{x+2} =$   
 $= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^{x+2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x-1}{2}}\right)^{x+2}$

TERCERO. Se multiplica el exponente por el denominador que se ha obtenido y por su inverso y se toma la parte del exponente necesaria para que el límite sea e.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x-1}{2}}\right)^{x+2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{x-1}{2} \cdot \frac{2}{x-1} \cdot (x+2)} =$   
 $= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\frac{2(x+2)}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x+4}{x-1}} = e^2$

La asíntota horizontal es  $y = e^2$ .

PRACTICA

40. Calcula estos límites. a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2x}{x^2 - 1}\right)^{3x}$     b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x - 1}{5 + 2x}\right)^{x^2 - 3}$     c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1 - x^2}{-x^2 + 2}\right)^{3x}$

## Continuidad de una función

### Estudiar la continuidad de una función definida a trozos

Estudia la continuidad y determina los tipos de discontinuidad que tiene la función  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+3} & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 + 14 & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ \sqrt{x^2 + 16} & \text{si } x > 3 \end{cases}$

**OBJETIVO.** Se estudia la continuidad de las distintas funciones en el intervalo en el que están definidas.

Si  $x < 0 \rightarrow f(x) = \frac{1}{x+3}$  es una función racional que no está definida cuando  $x+3=0 \rightarrow x=-3$ .

$f(x)$  tiene una asíntota vertical en  $x=-3$ ; por tanto, tiene una discontinuidad de salto infinito en  $x=-3$ .

Si  $0 < x < 3 \rightarrow f(x) = -x^2 + 14$  es una función polinómica. Siempre es continua.

Si  $x > 3 \rightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 16}$  es una función radical de índice par. No está definida cuando el radicando es negativo. Como  $x^2 + 16$  es siempre positivo, la función es siempre continua.

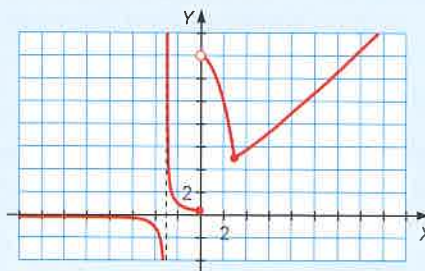
**CONSEJO.** Se estudia la continuidad en los puntos en los que la función cambia de expresión algebraica. Para ello se calculan los límites laterales en esos puntos.

En  $x=0$ :  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{3}$        $\lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2 + 14) = 14$

$f(x)$  tiene una discontinuidad de salto finito en  $x=0$ , porque

existe  $f(0) = \frac{1}{3}$ , pero no existe  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

En  $x=3$ :  $\lim_{x \rightarrow 3^-} (-x^2 + 14) = 5$        $\lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{x^2 + 16} = 5$        $f(3) = -3^2 + 14 = 5 \rightarrow f(x)$  es continua en  $x=3$ .



### ACTIVA

Estudia la continuidad de estas funciones y determina los tipos de discontinuidad que presentan.

$$a) f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{1}{x-2} & \text{si } 2 < x < 3 \\ 2x - 5 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \leq 0 \\ 3x & \text{si } 0 < x < 2 \\ \frac{1}{x-4} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

## Continuidad de una función

### Calcular el valor de un parámetro para que una función sea continua

Halla el valor de  $k$  para que la función  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & \text{si } x < 2 \\ kx + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$  sea continua.

**OBJETIVO.** Se estudia la continuidad de las distintas funciones en el intervalo en el que están definidas.

La función presenta problemas en el punto  $x=2$  porque en este punto pasa de una expresión algebraica a otra.

**CONSEJO.** En los puntos en los que puede presentar discontinuidad se calculan  $f(a)$  y  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

$$f(2) = k \cdot 2 + 1 = 2k + 1 \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 9) = 4 - 9 = -5 \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (kx + 1) = 2k + 1$$

**OBJETIVO.** Se calcula  $k$  para que la función en  $x=a$  y el límite coincidan, esto es,  $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \rightarrow 2k + 1 = -5 \rightarrow k = -3 \rightarrow \text{Para } k = -3 \text{ la función es continua en todos sus puntos.}$$

### ACTIVA

Halla el valor de  $k$  para que estas funciones sean continuas.

$$a) f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < 1 \\ -kx^2 + 2x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} 3 - k & \text{si } x < 0 \\ \frac{x-2}{x^2 - 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$