Tema 8. Ejercicios para realizar en Semana Santa.

(4) a) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-5x+3}{3x-5} = -\infty$. (grado numerador > grado menador)
Es negativo pq nº es + y el denominador es −

b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2-5x+1}{2x^2-5} = \frac{3}{2}$ (igual grado)

b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+3}{x^3} = 0$ (grado denominador > grado menador)

d) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+3}{-x^3} = 0$

(5) a) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2+1}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2+1-2x^2}{x(x^2+1)}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^2+1}{x^3+x} = 0$

(6) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^3-x+1}{2x^3+3x}\right)^{x^2-1} = 1^{+\infty}$ indeterminación $\longrightarrow e^{\lambda}$

$g(x) = x^2-1$

$f(x) = \frac{2x^3-x+1}{2x^3+3x}$

$\lambda = \lim_{x \to +\infty} g(x) \cdot [f(x)-1]$

$\lim_{x \to +\infty} (x^2-1)\left[\frac{2x^3-x+1}{2x^3+3x} - 1\right] = \lim_{x \to +\infty} (x^2-1) \cdot \left[\frac{\cancel{2x^3}-x+1-\cancel{2x^3}-3x}{2x^3+3x}\right] =$

$= \lim_{x \to +\infty} (x^2-1) \left[\frac{-4x+1}{2x^3+3x}\right] = -\frac{4}{2} = -2 \Longrightarrow \boxed{\lambda = -2}$

9 (a) $\lim_{x \to 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49} = \frac{0}{0}$ Indet.

↳ conjugado

$\lim_{x \to 7} \frac{(2-\sqrt{x-3})(2+\sqrt{x-3})}{x^2-49} = \lim_{x \to 7} \frac{4-(x-3)}{(x^2-49).(2+\sqrt{x-3})} = \frac{0}{0}$ ind.

Operamos $\lim_{x \to 7} \frac{-x+7}{(x-7)(x+7)\cdot(2+\sqrt{x-3})} = \lim_{x \to 7} \frac{-1}{(x+7).(2+\sqrt{x-3})} = \frac{-1}{14 \cdot 4} = \frac{-1}{56}$

9

b) $\lim\limits_{x \to \cancel{top}} \dfrac{2x^3-14x^2+12x}{x^3-10x^2+27x-18} = \dfrac{0}{0}$ indet

Operamos.

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x\,\cancel{(x-1)}(x-6)}{\cancel{(x-1)}(x^2-9x+18)} = \frac{2\cdot(-5)}{10} = -1$$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2+2x+1}}{2x+7} = \dfrac{\infty}{\infty}$

Dividimos mayor potencia denominador $\to x$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{\dfrac{3x^2+2x+1}{x^2}}}{\dfrac{2x+7}{x}} = \frac{\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{\dfrac{3x^2+2x+1}{x^2}}}{\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x+7}{x}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \;//$$

h) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3+2x^2-4x+8}{x^3+x^2-4x-4} = \dfrac{0}{0}$ ind

Operamos

$$\lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x^2+4x+4)}{\cancel{(x-2)}(x^2+3x+2)} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

i) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{x^3-x^2-x+1} = \dfrac{0}{0}$ indet

Operamos

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x^2-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x^2-1} = \pm\infty\ ?$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x^2-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x^2-1} = -\infty$$

j) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x+1}{x-2} = \pm\infty\ ? \longrightarrow \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x+1}{x-2} = +\infty$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x+1}{x-2} = -\infty$$

k) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x+4}{(x+1)^2} = +\infty$ (por la dcha y la izqda)

10 c) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+a}{x+b}\right)^{x+c} = 1^{+\infty} \longrightarrow$ indet.

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} (x+c)\cdot\left[\frac{x+a}{x+b}-1\right] = \lim_{x\to+\infty} x+c\cdot\left(\frac{\cancel{x}+a-\cancel{x}-b}{x+b}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(a-b)\cdot[x+c]}{x+b} =$$

$$= \frac{a-b}{1} = \underline{\underline{a-b}}$$

Límite es e^{a-b}

e) $\lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} = \frac{0}{0}$ indet

conjugado

$$\lim_{x\to 2} \frac{(4-x^2)\,(3+\sqrt{x^2+5})}{(3-\sqrt{x^2+5})\,(3+\sqrt{x^2+5})} = \lim_{x\to 2} \frac{(4-x^2)\,(3+\sqrt{x^2+5})}{9-x^2-5} = \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(4-x^2)}(3+\sqrt{x^2+5})}{\cancel{4-x^2}} = 6$$

f) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-4x}{x^2-3x+2} = \frac{0}{0}$ indet

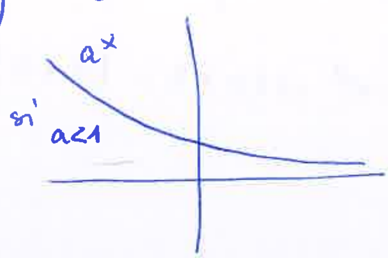
$$\lim_{x\to 2} \frac{x\,(x^2-4)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x\to 2} \frac{x\,\cancel{(x-2)}\,(x+2)}{\cancel{(x-2)}\,(x-1)} = 8$$

j) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-5}{\sqrt{x+4}-3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-5)\,(\sqrt{x+4}+3)}{x+4-9} = +\infty \longrightarrow$ arriba grado $3/2$, abajo grado 1

o dividiendo entre mayor grado denominador

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x-5}{x^{1/2}}}{\underbrace{\sqrt{\frac{x+4}{x}}}_{\downarrow\, 1} - \underbrace{\frac{3}{x^{1/2}}}_{\downarrow\, 0}} = \frac{+\infty}{1} = +\infty$$

k) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+2}{2x+3}\right)^{2x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$



13) Continuidad de la funciń

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x\leq 0 \\ 2x-3 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

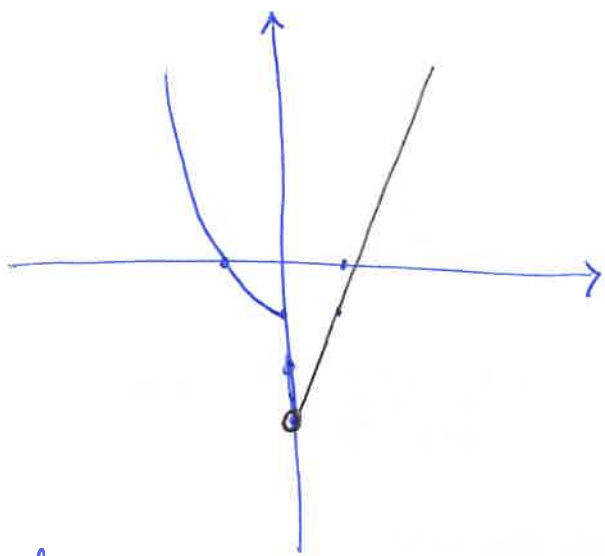
si $x<0$ es una parábola $\rightarrow$ continua

si $x>0$ es una recta $\rightarrow$ continua.

Vemos que pasa en $x=0$

$\exists \; f(0) = 0^2-1=-1$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} 2x-3=-3 \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} x^2-1=-1 \end{aligned}\right\}$$ no coinciden $\Rightarrow$ No es continua en $x=0$



(14.) Continuidad

$$f(x)=\frac{x-7}{x^3-x^2-11x+3}$$

Vemos dónde se anula el denominador $\Rightarrow$ ahí va a haber una asíntota vertical $\Rightarrow$ no es continua.

$Dom(f) = \mathbb{R} - \{-3, 2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}\}$ y es continua en lo mismo.

$$x^3-x^2-11x+3 = (x+3)(x^2-4x+1) = (x+3)\cdot(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})$$

15

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & si\ \ 0<x<1 \\ 0 & si\ \ 1\le x<2 \\ x-1 & si\ \ 2\le x<3 \end{cases}$$

Estudiamos los puntos críticos.

$Dom(f) = (0,3)$

En el 1.

si $x=1$ $\quad \exists f(1)=0$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} 0 = 0 \\ \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1 \end{aligned}\right\}$$

No coinciden ⇒ No es continua en $x=1$

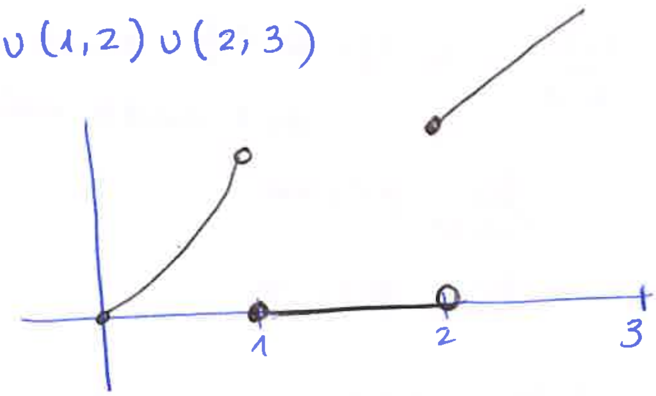
En el 2.

si $x=2$ $\quad \exists f(2)=1$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^+} x-1 = 1 \\ \lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^-} 0 = 0 \end{aligned}\right\}$$

No coinciden ⇒ no es continua en $x=2$

Continua $(0,1)\cup(1,2)\cup(2,3)$



16

$$f(x)=\frac{x+1}{|x|}=\begin{cases} \dfrac{x+1}{x} & si\ \ x\ge 0 \\ \dfrac{x+1}{-x} & si\ \ x<0 \end{cases}$$

Único problema el $x=0$ que no está en el dominio. ⇒ va a haber una asíntota vertical ⇒ No es continua

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$$

(17)

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\leq 1 \\ 3-ax^2 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

si $x<1 \longrightarrow f(x)=x+1$, es una recta es continua

si $x>1 \longrightarrow f(x)=3-ax^2$, es una parábola $\Rightarrow$ es continua.

El problema lo podemos tener en $x=1$

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=1+1=2 \Rightarrow \exists f(1) \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 3-ax^2=3-a \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x+1=2 \end{array}\right\}$$

Para que sea continua en $x=1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Entonces $3-a=2=2 \Rightarrow 3-a=2 \Rightarrow$ $\boxed{a=1}$

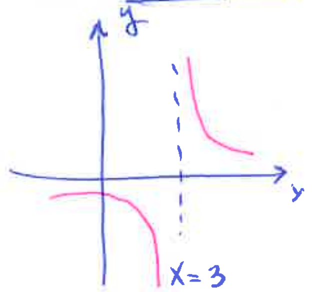
(18)

a) $f(x)=\dfrac{x+2}{x-3}$. $Dom(f)=\mathbb{R}-\{3\}$. Discontinuidad inevitable, salto infinito.

$x=3$ asíntota vertical.

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=+\infty$

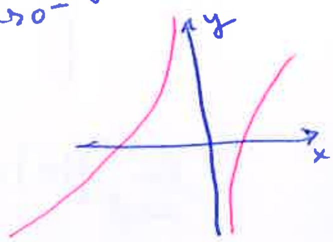
$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-\infty$



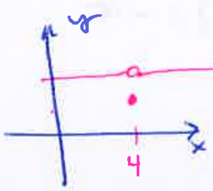
b) $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x}=\dfrac{x(x-3)}{x}=x-3 \rightarrow$ continua

c) $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x}$; $Dom(f)=\mathbb{R}-\{0\}$, en $x=0$ asíntota vertical. Salto infinito

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$



d) $f(x)=\begin{cases} 3 & \text{si } x\neq 4 \\ 2 & \text{si } x=4. \end{cases}$. Discontinua, evitable.



19

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x+k & \text{si } x\neq 3 \\ 7 & \text{si } x=3 \end{cases}$$

$Dom(f)=\mathbb{R}$

Estudiamos que pasa en $x=3$, en el resto de los puntos es continua.

$$\left.\begin{array}{l} f(3)=7 \\ \lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3} x^2-2x+k = 9-6+k=3+k \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Para que sea continua en $x=3$ $\Rightarrow$ $3+k=7 \Rightarrow \underline{k=4}$

Ejemplo:

1. Estudia la continuidad de

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & \text{si } x\leq -1 \\ \dfrac{x-2}{x^2-4} & \text{si } x>-1 \end{cases}$$

si $x<-1 \to$ es una recta

si $x>-1 \to$ No está definida en $\underline{x=2}$ $\to$ hay que estudiar qué ocurre y

si $x=-1 \to$ Hay que estudiar

si $x=2$, $\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}=\dfrac{0}{0}$ indet $\quad \nexists f(2)$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}.$$

Sería evitable pq podemos definir $\underline{f(2)=\frac{1}{4}}$.

si $x=-1$

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=2 \\ \lim_{x\to -1^-} f(x)=2 \\ \lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\dfrac{x-2}{x^2-4}=\dfrac{-3}{-3}=1 \end{array}\right\}$$ discontinuidad de salto finito.

2. Estudia la continuidad y representa.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{12}{x-1} & \text{si } x<3 \\ 6 & \text{si } x=3 \\ x-2 & \text{si } x>3 \end{cases}$$

$Dom(f)=\mathbb{R}-\{1\}$

Estudiamos que pasa en $x=1$ y en $x=3$.

En $x=1 \to$ asíntota vertical.

En $x=3 \to f(3)=6$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 3^+} f(x)=1 \\ \lim_{x\to 3^-} f(x)=\dfrac{12}{2}=6 \end{array}\right\}$$ $\nexists$ límite pq los laterales no coinciden $\to$ salto evitable.

(127) (libro)

Hallar $\underline{m \text{ y } n}$ para que $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} 2 & \text{si } x\le 1 \\ mx+n & \text{si } 1<x\le 3 \\ 4 & \text{si } x>3 \end{cases}$$

$Dom(f)=\mathbb{R}$

Hay que estudiar qué pasa en $x=1$ y en $x=3$

si $\underline{x=1}$

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=2 \\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=2 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x)= m+n \end{array}\right\} \Rightarrow 2=m+n$$

si $\underline{x=3}$

$$\left.\begin{array}{l} f(3)= 3m+n \\ \lim_{x\to 3^+} f(x)=4 \\ \lim_{x\to 3^-} f(x)=3m+n \end{array}\right\} \Rightarrow 3m+n=4$$

Es un sistema

$m=1$

$n=1$

(128)

$$f(x)=\begin{cases} x^2+4 & \text{si } x\le 1 \\ ax+b & \text{si } x>1 \end{cases}$$

$\underline{\underline{f(2)=7}}$

$\longrightarrow$ x^2+4 – parábola

$ax+b$ – recta $\longrightarrow$ Sólo hay que estudiar en $x=1$

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=5 \\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=5 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x)= a+b \end{array}\right\} \Rightarrow a+b=5$$

Además $f(2)= 2a+b = 7$

Sistema

$$\left\{\begin{array}{l} a+b=5 \\ 2a+b=7 \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{a=2 \quad b=3}$$

(121) c)

$$f(x)=\begin{cases} 3x+1 & \text{si } x\le 0 \\ \sqrt{1-x} & \text{si } x>0 \end{cases}$$

$3x+1 \longrightarrow$ recta es continua

$\sqrt{1-x}$ para $x>0$ entonces sólo existe si $x\in(0,1]$ $\longrightarrow$ $Dom(f)=(-\infty,1]$

$$\left.\begin{array}{l} \text{En } x=0 \rightarrow f(0)=1 \\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=1 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=1 \end{array}\right\}$$ es continua en $x=0$ $\Rightarrow$ Continua en $(-\infty,1]$.