Tema 8

FUNCIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

Índice

1. Funcións lineais.
   1.1 Funcións de proporcionalidade directa.
   1.2 Funcións constantes.
2. Ecuación punto-pendente.
3. Ecuación xeral da recta.
4. Funcións cuadráticas.
5. Aplicacións.

1. Funciones lineales.

Una **función lineal** es una función con una ecuación de la forma $y = mx + n$, siendo m y n números. Estas funciones cumplen:

- Su gráfica es una línea recta.
- Corta al eje X en el punto $\left(-\frac{n}{m}, 0\right)$ si $m \neq 0$.
- Corta al eje Y en el punto $(0, n)$.

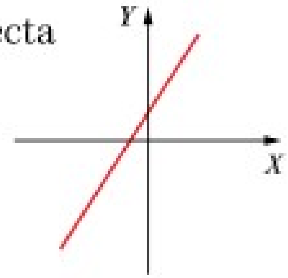
El número m se llama **pendiente**, y n, **ordenada en el origen**.

La expresión $y = mx + n$ o $f(x) = mx + n$ se denomina ecuación explícita de la recta.

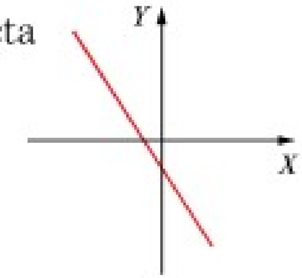
La recta está más inclinada cuanto mayor es el valor absoluto de la pendiente.

Estas funciones están definidas para cualquier valor y son continuas en todo $\mathbb{R}$. Además, se cumple que:

- Si $m > 0$, la recta es siempre creciente.



- Si $m < 0$, la recta es siempre decreciente.



1. Funciones lineales.

EJEMPLO

1. Construye una tabla de valores y representa la función $y = -2x + 4$. Indica si es creciente o decreciente. ¿En qué punto corta con cada eje?

x	-1	0	1	2
y	6	4	2	0

Para construir la tabla de valores, asignamos los valores que queramos a la variable x.

Pendiente $m = -2$

Como $m < 0$, la función es decreciente.

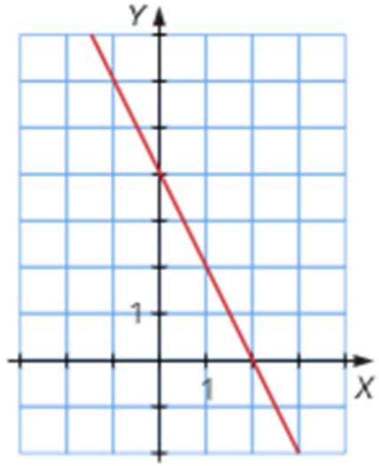
Ordenada en el origen $n = 4$

Para obtener el punto de corte con el eje X, hacemos $y = 0$ y resolvemos la ecuación resultante:

$0 = -2x + 4 \rightarrow 2x = 4 \rightarrow x = 2 \rightarrow$ Corta al eje X en $(2, 0)$.

Para obtener el punto de corte con el eje Y, hacemos $x = 0$ y sustituimos:

$y = -2 \cdot 0 + 4 \rightarrow y = 4 \rightarrow$ Corta al eje Y en $(0, 4)$.



1 Indica cuáles de estas funciones son lineales. Para ellas, calcula su pendiente y su ordenada en el origen.

a) $y = -5x + 4$ c) $y = x^2 + 1$

b) $y = \dfrac{x + 3}{2}$ d) $y = \dfrac{1}{x} + 2$

a) Lineal. $m = -5, n = 4$

b) Lineal. $m = \dfrac{1}{2}, n = \dfrac{3}{2}$

c) No lineal.

d) No lineal.

1. Funciones lineales.

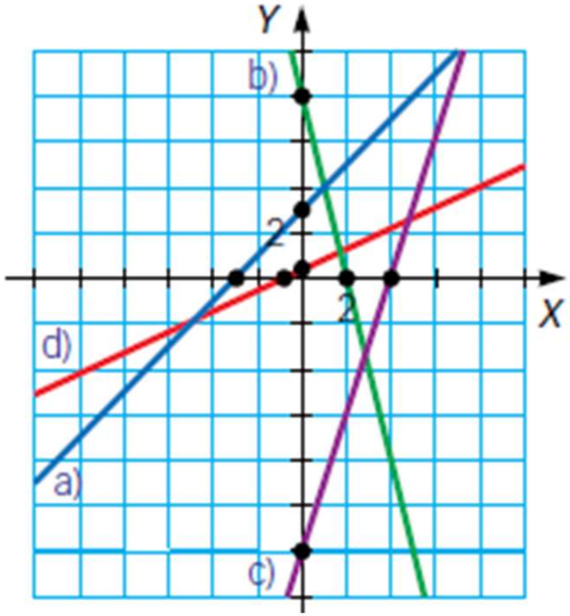
2 Una función lineal pasa por los puntos (1, 5) y (3, 2). ¿Es creciente o decreciente?

La función es decreciente porque mientras que del primer al segundo punto la coordenada x aumenta, la coordenada y disminuye.

3 Representa estas funciones lineales e indica sus puntos de corte con los ejes.

a) $y = x + 3$ c) $y = 3x - 12$

b) $y = -4x + 8$ d) $y = \dfrac{x+1}{2}$



a) $(-3, 0), (0, 3)$

b) $(2, 0), (0, 8)$

c) $(4, 0), (0, -12)$

d) $(-1, 0), \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$

4 **REFLEXIONA.** ¿Cuántas funciones lineales distintas pueden pasar por el punto $(-1, 2)$?

Hay infinitas funciones lineales, ya que existen infinitas rectas que pueden pasar por un determinado punto del plano.

1. Funciones lineales.

1.1. Funciones de proporcionalidad directa

Una **función de proporcionalidad directa** es una función cuya ecuación es de la forma $y = mx$, siendo m un número. Cumple que:

- Su gráfica es una recta.
- Pasa por el origen (0, 0).

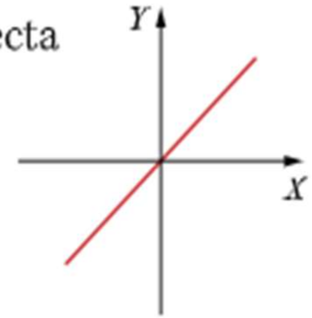
El número m es la **pendiente**.

Una función de proporcionalidad directa es una función lineal con $n = 0$.

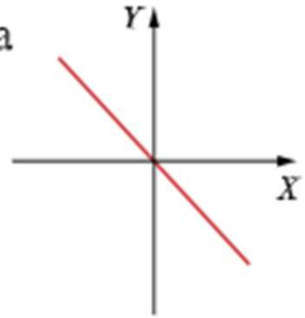
Estas funciones están definidas y son continuas en todo $\mathbb{R}$. Además, se cumple que:

La recta está más inclinada cuanto mayor es el valor absoluto de la pendiente.

- Si $m > 0$, la recta es siempre creciente.



- Si $m < 0$, la recta es siempre decreciente.



1. Funciones lineales.

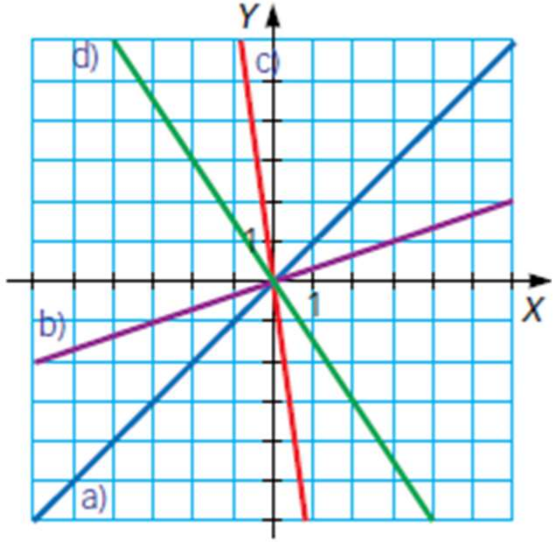
5 Representa las funciones e indica su pendiente.

a) $y = x$

b) $y = \frac{1}{3}x$

c) $y = -8x$

d) $y = -\frac{3}{2}x$



a) $m = 1$

b) $m = \frac{1}{3}$

c) $m = -8$

d) $m = -\frac{3}{2}$

6 Señala cuáles de estos puntos pertenecen a la función de proporcionalidad directa de pendiente 0,5.

a) $(6, 3)$

b) $(0, 2)$

c) $(-8, 4)$

d) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

a) Sí: $3 = 0{,}5 \cdot 6$

b) No: $2 \neq 0{,}5 \cdot 0$

c) No: $4 \neq 0{,}5 \cdot (-8)$

d) Sí: $\frac{1}{4} = 0{,}5 \cdot \frac{1}{2}$

7 Escribe la ecuación de la función de proporcionalidad directa que pasa por estos puntos.

a) $(3, -3)$ b) $(3, -4)$ c) $(-3, -1)$

a) $y = -x$ b) $y = -\frac{4}{3}x$ c) $y = \frac{1}{3}x$

1. Funciones lineales.

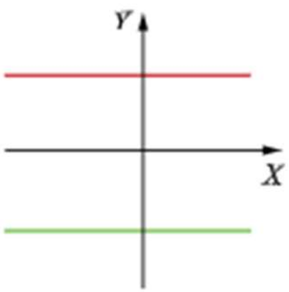
1.2. Funciones constantes

Una **función constante** es una función que tiene una ecuación de la forma $y = n$, siendo n un número. Cumple que:

- El valor de la variable y es el mismo para cualquier valor de la variable x. Este valor de y es n.
- Su gráfica es una recta paralela al eje X.
- Su pendiente es $m = 0$ y n es la ordenada en el origen.
- La recta corta al eje Y en el punto $(0, n)$.

Una función constante es una función lineal con $m = 0$.

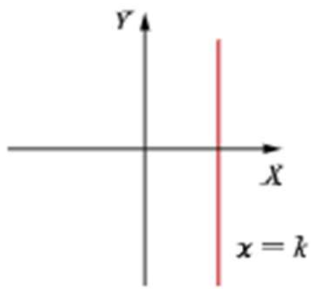
Estas funciones son continuas en $\mathbb{R}$ y no son crecientes ni decrecientes.



Existen rectas que no son funciones.

Las rectas paralelas al eje Y tienen como ecuación $x = k$, siendo k un número.

No son funciones, ya que un único valor de x se relaciona con múltiples valores de y.



1. Funciones lineales.

9 Construye una tabla de valores y representa.

a) $y = 0$

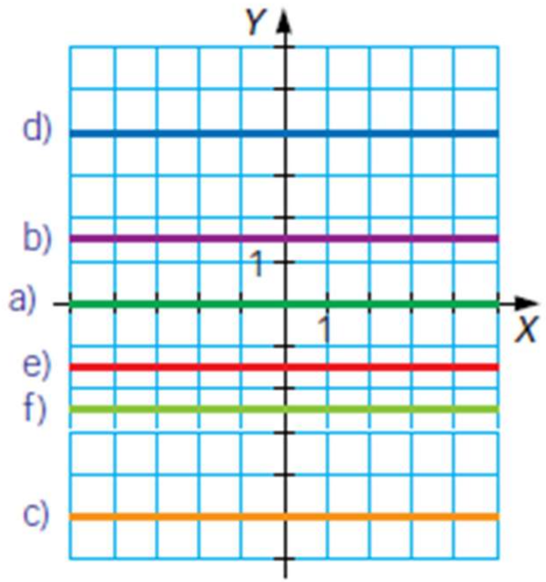
b) $y = \frac{3}{2}$

c) $y = -5$

d) $y = 4$

e) $y = -\frac{3}{2}$

f) $y = -\frac{5}{2}$



10 Encuentra la expresión algebraica de las funciones constantes que pasan por estos puntos.

a) $(-3, 4)$

b) $(2, -5)$

c) $(-3, -1)$

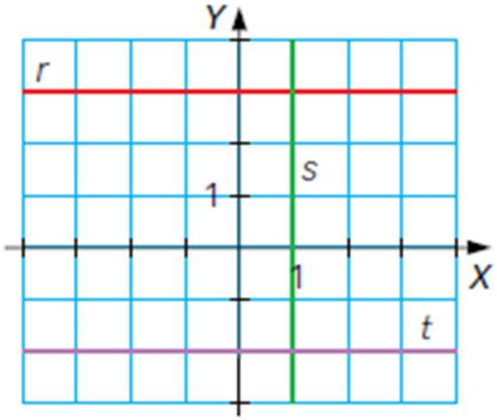
a) $y = 4$

b) $y = -5$

c) $y = -1$

1. Funciones lineales.

11 Determina la ecuación de las rectas de la gráfica y calcula las coordenadas de los puntos de corte entre ellas.



$r: y = 3$ $s: x = 1$ $t: y = -2$

Punto de corte de r y s: $(1, 3)$.

Punto de corte de r y t: Son rectas paralelas, por tanto, no se cortan.

Punto de corte de s y t: $(1, -2)$.

12 **REFLEXIONA.** Escribe una función constante que corte al eje X. ¿En qué punto lo corta?

La única función constante que corta al eje X es $y = 0$. Lo corta en todos los puntos del eje X.

1. Funciones lineales.

Cómo se representa gráficamente una función lineal

Representa gráficamente estas funciones.

a) $y = 2x + 4$ b) $y = -x$ c) $y = -1$

① Determinamos el tipo de función que es y sus características.

a) $y = 2x + 4$

$m = 2$ $n = 4$

Es una función lineal.

- Pendiente: $m = 2$
  $m > 0 \rightarrow$ Función creciente
- $2x + 4 = 0 \rightarrow x = -2$
  Corta al eje X en $(-2, 0)$.
- Ordenada en el origen $n = 4$.
  Corta al eje Y en $(0, 4)$.

b) $y = -x$

$m = -1, n = 0$

Es una función de proporcionalidad directa.

- Pendiente: $m = -1$
  $m < 0 \rightarrow$ Función decreciente
- $-x = 0 \rightarrow x = 0$
  Corta al eje X en $(0, 0)$.
- Ordenada en el origen $n = 0$.
  Corta al eje Y en $(0, 0)$.

c) $y = -1$

$n = -1, m = 0$

Es una función constante.

- Pendiente: $m = 0$
  $m = 0 \rightarrow$ Función constante
- No corta al eje X.
- Ordenada en el origen $n = -1$.
  Corta al eje Y en $(0, -1)$.

1. Funciones lineales.

② Determinamos dos puntos por los que pasa la función.

a) $y = 2x + 4$

x	y
-2	0
0	4

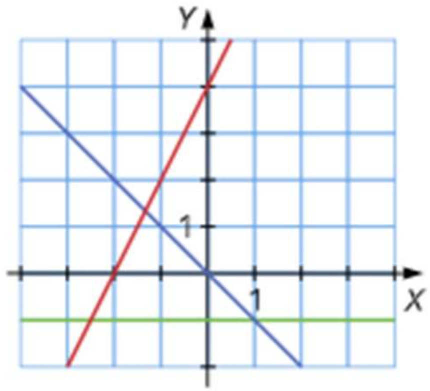
b) $y = -x$

x	y
0	0
1	-1

c) $y = -1$

x	y
0	-1
1	-1

③ Dibujamos los puntos y trazamos la recta que pasa por ellos.



13 Copia y completa las tablas. Después, representa gráficamente las funciones.

a)

x	-2	-1	0	1
$y = -3x + 5$				

b)

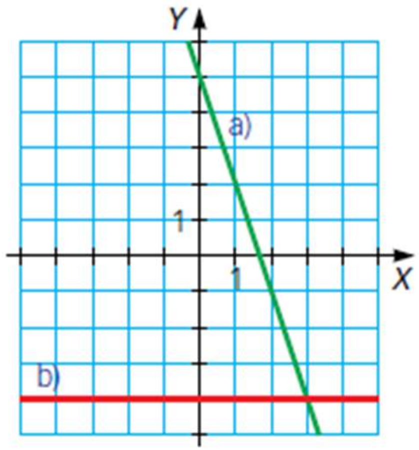
x	-1		2	5
$y = -4$		-4		

a)

x	-2	-1	0	1
$y = -3x + 5$	11	8	5	2

b)

x	-1	0	2	5
$y = -4$	-4	-4	-4	-4



1. Funciones lineales.

14 Construye una tabla de valores para cada función y represéntalas.

a) $y = 2x - 1$ c) $y = -5x$

b) $y = 7$ d) $y = 3x + 5$

a)

x	-2	-1	0	1
$y = 2x - 1$	-5	-3	-1	1

b)

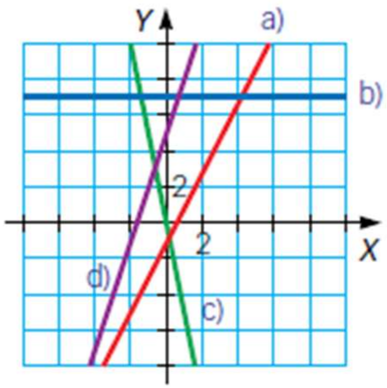
x	-2	-1	0	1
$y = 7$	7	7	7	7

c)

x	-2	-1	0	1
$y = -5x$	10	5	0	-5

d)

x	-2	-1	0	1
$y = 3x + 5$	-1	2	5	8



15 Halla los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones.

a) $y = 3x + 2$ c) $y = \frac{5}{2}$

b) $y = \frac{6}{5}x$

a) Punto de corte con el eje X: $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$

Punto de corte con el eje Y: $(0, 2)$

b) Punto de corte con el eje X: $(0, 0)$

Punto de corte con el eje Y: $(0, 0)$

c) Punto de corte con el eje X: No tiene.

Punto de corte con el eje Y: $\left(0, \frac{5}{2}\right)$

1. Funciones lineales.

16 Calcula la abscisa de la función $y = 5x + 2$ en los puntos cuya ordenada sea:

a) $y = -3$ c) $y = 5$

b) $y = 0$ d) $y = 7$

a) $x = -1$ c) $x = \frac{3}{5}$

b) $x = -\frac{2}{5}$ d) $x = 1$

17 A partir de la función $y = \frac{x+4}{2} - 2$:

a) Comprueba si el punto (4, 2) pertenece a la función.

b) Construye una tabla de valores.

c) Represéntala gráficamente.

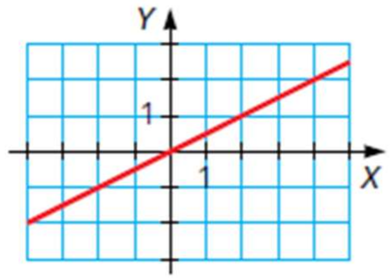
d) ¿De qué tipo de función se trata?

a) El punto (4, 2) pertenece a la función ya que $\frac{4+4}{2} - 2 = 2$.

b)

x	-2	0	2	4
$y = \frac{x+4}{2} - 2$	-1	0	1	2

c)

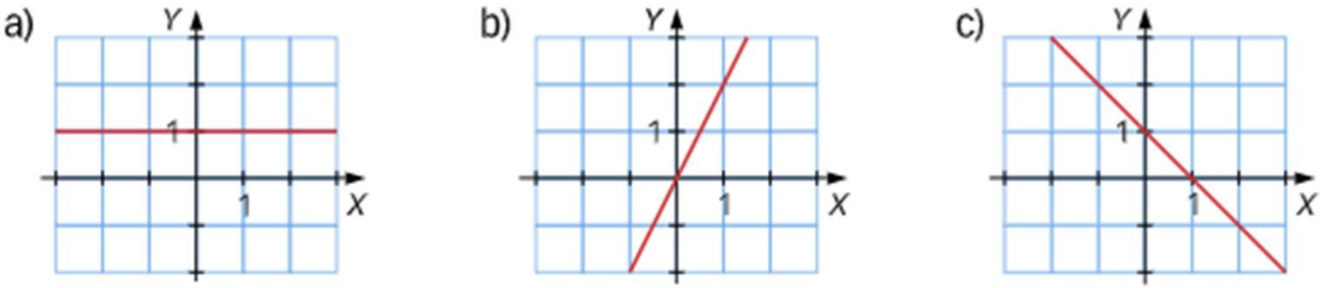


d) Se trata de una función de proporcionalidad directa: $y = \frac{x}{2}$

1. Funciones lineales.

Cómo se halla la ecuación de una recta representada gráficamente

Obtén la ecuación de las rectas representadas en estas gráficas.



① Si la gráfica es una recta horizontal, la función es de la forma $y = n$, siendo n la ordenada en el origen.

a) La recta es horizontal.

Punto de corte con el eje Y: $(0, 1) \rightarrow n = 1$

La ecuación de la recta es: $y = n \xrightarrow{n=1} y = 1$

1. Funciones lineales.

② Si no es una recta horizontal, comprobamos si pasa por el origen.

- Si pasa por el origen, es de la forma $y = mx$.

b) Pasa por el origen de coordenadas.

Es de la forma $y = mx$.

Pasa por el origen: (0, 0)

La recta pasa por (1, 2).

Se cumple que:

$2 = m \cdot 1 \rightarrow m = 2$

La ecuación es $y = 2x$.

Vemos cuál es la ordenada para $x = 0$.

Buscamos otro punto por el que pasa la recta.

- Si no pasa por el origen, es de la forma $y = mx + n$.

c) No pasa por el origen de coordenadas.

Es de la forma $y = mx + n$.

La recta pasa por (0, 1).

Se cumple que:

$1 = m \cdot 0 + n \rightarrow n = 1$

La recta pasa por (1, 0).

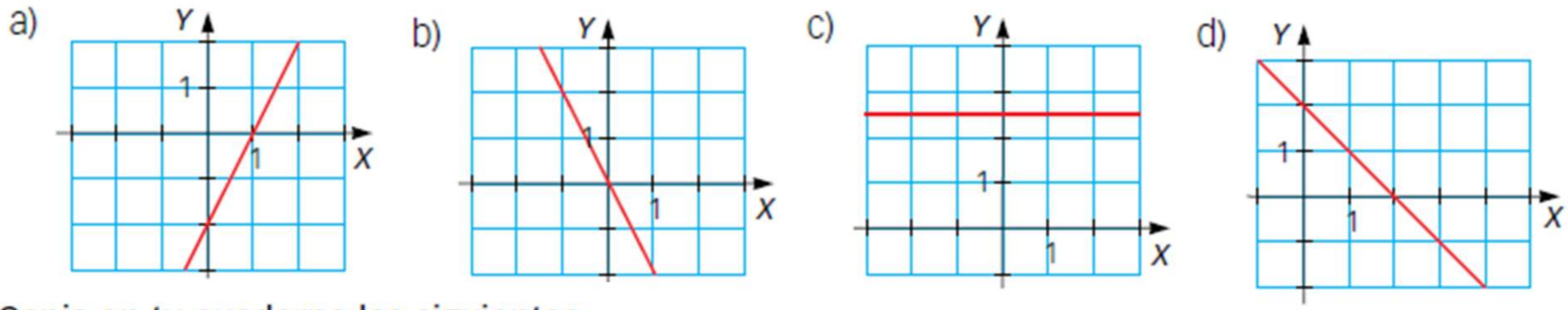
Se cumple que:

$0 = m \cdot 1 + 1 \rightarrow m = -1$

La ecuación es $y = -x + 1$.

1. Funciones lineales.

18 Determina la ecuación de estas funciones lineales.



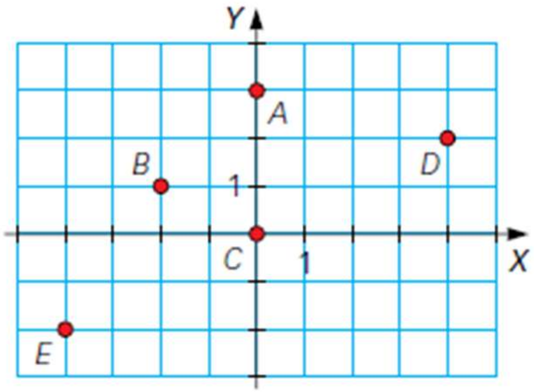
a) $y = 2x - 2$

b) $y = -2x$

c) $y = 2{,}5x$

d) $y = -x + 2$

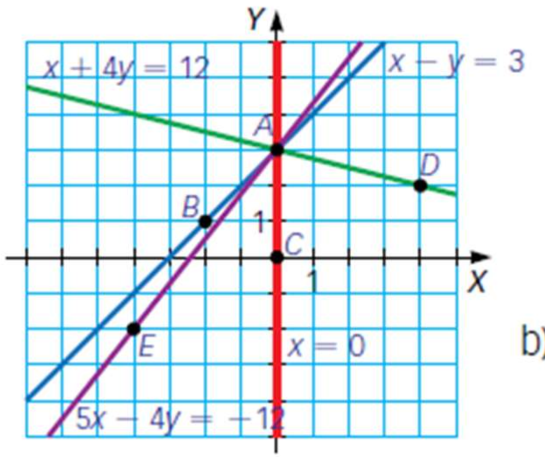
19 Copia en tu cuaderno los siguientes puntos.



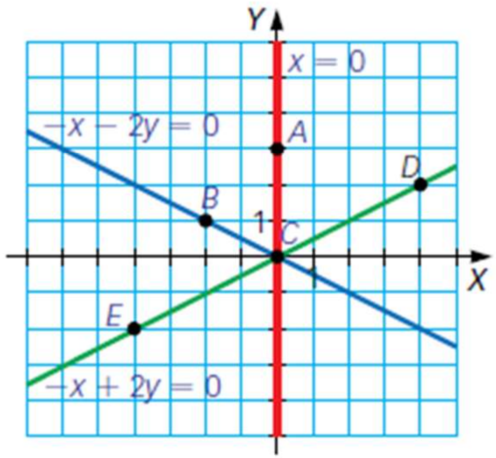
a) Traza todas las rectas desde el punto *A* hasta el resto de los puntos y halla sus ecuaciones.

b) Traza todas las rectas desde *C* y halla sus ecuaciones.

a)



b)



2. Ecuación punto-pendiente.

La ecuación de una recta de pendiente m que pasa por el punto (a, b) es $y = b + m(x - a)$.

Se denomina **ecuación punto-pendiente** de la recta.

20 Halla la ecuación punto-pendiente de estas rectas.

a) Su pendiente es 7 y pasa por $(-1, -2)$.

b) Su pendiente es -2 y pasa por $(0, -5)$.

a) $y = -2 + 7 \cdot (x - (-1)) \rightarrow$
$\rightarrow y = -2 + 7 \cdot (x + 1)$

b) $y = -5 + (-2) \cdot (x - 0) \rightarrow$
$\rightarrow y = -5 - 2x$

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

La pendiente, m, de la recta que pasa por los puntos (a_1, b_1) y (a_2, b_2) es $m = \dfrac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}$.

Así, la ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por los puntos (a_1, b_1) y (a_2, b_2) es:

$$y = b_1 + \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1} \cdot (x - a_1)$$

2. Ecuación punto-pendiente.

21 Determina las ecuaciones punto-pendiente y explícita de la recta que pasa por estos puntos.

a) (2, 3) y (−1, 5)

b) (4, 0) y (2, −3)

c) (−2, −3) y (4, 6)

d) (−5, 3) y (2, 3)

a) $m = \frac{2}{-3} \to$

$\to y = 3 - \frac{2}{3} \cdot (x - 2) \to$

$\to y = -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}$

b) $m = \frac{-3}{-2} \to y = 0 + \frac{3}{2} \cdot (x - 4) \to$

$\to y = \frac{3}{2}x - 6$

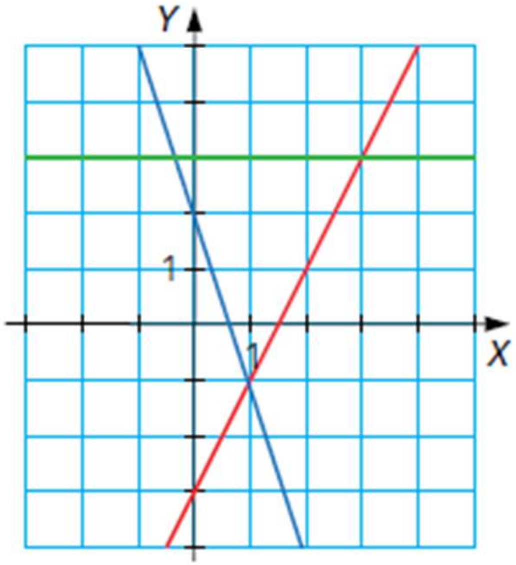
c) $m = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \to$

$\to y = -3 + \frac{3}{2} \cdot (x + 2) \to y = \frac{3}{2}x$

d) $m = 0 \to y = 3 + 0 \to$

$\to (x + 5) \to y = 3$

22 **REFLEXIONA.** Calcula las ecuaciones explícita y punto-pendiente de las rectas representadas.



Verde: $y = 3$

Roja: $y = 2x - 3$ $\quad y = 1 + 2(x - 2)$

Azul: $y = -3x + 2$ $\quad y = -1 - 3(x - 1)$

3. Ecuación general de una recta.

Se llama **ecuación general de una recta** a una ecuación del tipo:

$$ax + by + c = 0$$

donde a, b y c son números reales.

Se obtiene a partir de las ecuaciones que hemos visto, agrupando todos los términos en un miembro.

23 Determina la ecuación general de estas rectas.

a) $y = -5x + 1$

b) $y = 2 - 3(x + 1)$

c) Recta de pendiente 4 y que pasa por el punto $(0, -3)$.

a) $-5x + y - 1 = 0$

b) $3x + y + 1 = 0$

c) $-4x + y + 3 = 0$

3. Ecuación general de una recta.

24 Calcula dos puntos y la pendiente de estas rectas.

a) $x + y - 4 = 0$

b) $2x - 3y = 0$

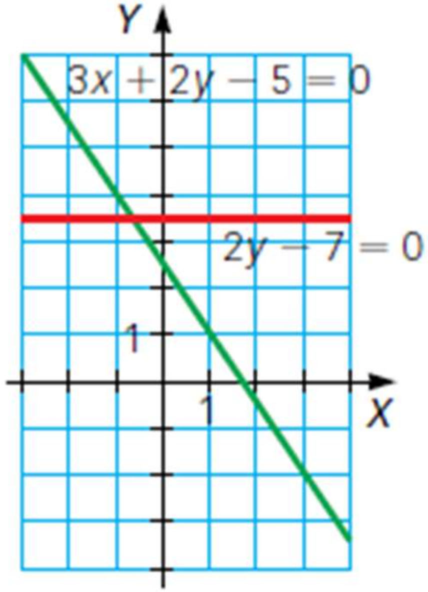
a) $y = -x + 4 \rightarrow m = -1 \rightarrow$
$\rightarrow (0, 4)$ y $(1, 3)$

b) $y = \frac{2}{3}x \rightarrow m = \frac{2}{3} \rightarrow (0, 0)$ y $\left(1, \frac{2}{3}\right)$

25 Representa gráficamente estas rectas.

a) $3x + 2y - 5 = 0$

b) $2y - 7 = 0$



26 **REFLEXIONA.** ¿Cómo expresarías la recta paralela al eje Y, $x = 2$, en su forma general? ¿Qué ocurre cuando en la ecuación general de una recta $b = 0$?

Se podría expresar de infinitas formas. Por ejemplo: $3x - 6 = 0$.

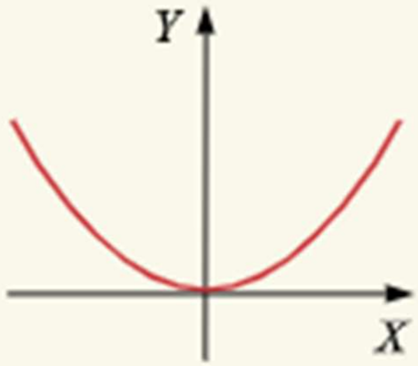
Siempre de forma que si n es un número $\rightarrow nx - 2n = 0$.

En una ecuación general, si $b = 0$, resulta $ax + c = 0$, luego se trata de una recta paralela al eje Y.

4. Funciones cuadráticas.

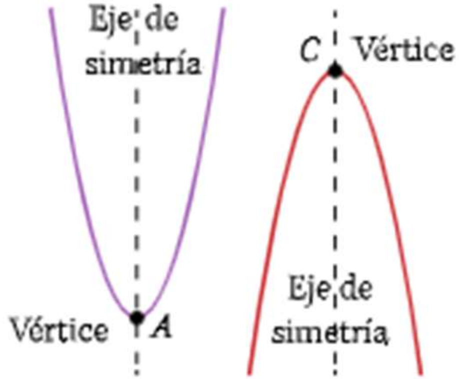
Una **función cuadrática** es una función que tiene una ecuación de la forma $y = ax^2 + bx + c$, siendo a, b y c números y $a \neq 0$.

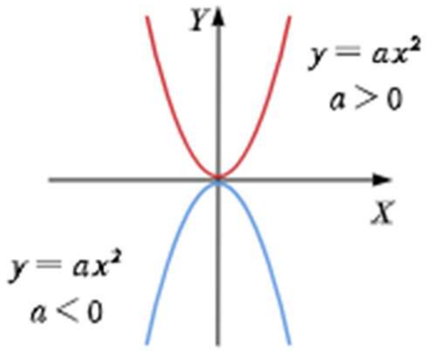
Su gráfica es una curva que se llama **parábola**.



La parábola tiene estos elementos:

- **Vértice:** es el punto en el que la función pasa de ser creciente a decreciente, o viceversa, es decir, es un máximo o un mínimo de la función.
- **Eje de simetría:** es una recta que pasa por el vértice y es paralela al eje Y, que divide la curva en dos partes simétricas.



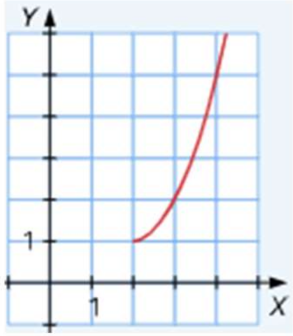


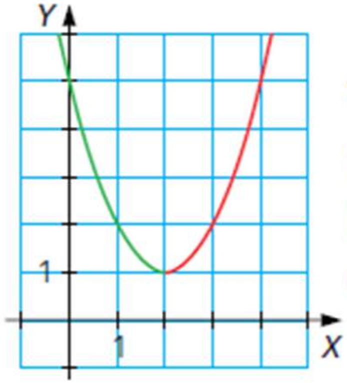
Estas funciones son continuas en todo $\mathbb{R}$, y además:

- Si $a > 0$, las ramas de la parábola van hacia arriba. El vértice es un mínimo.
- Si $a < 0$, las ramas van hacia abajo. El vértice es un máximo.
- Cuanto mayor sea $|a|$, más cerradas estarán sus ramas.

4. Funciones cuadráticas.

27 Copia y completa en tu cuaderno esta parábola y señala sus elementos (vértice y eje de simetría) y sus propiedades (orientación de las ramas y tipo de punto que es el vértice).





Vértice: (2, 1)

Eje de simetría: $x = 2$

Las ramas van hacia arriba, por tanto el vértice es un mínimo.

28 Indica en cuáles de estas parábolas el vértice es un máximo y en cuáles es un mínimo.

a) $y = x^2 - 1$

b) $y = 3 + 5x - 2x^2$

c) $y = 4 + 3x^2$

d) $y = -x^2 + 2x - 5$

a) $a > 0 \rightarrow$ El vértice es un mínimo.

b) $a < 0 \rightarrow$ El vértice es un máximo.

c) $a > 0 \rightarrow$ El vértice es un mínimo.

d) $a < 0 \rightarrow$ El vértice es un máximo.

29 **REFLEXIONA.** Si el vértice de una parábola está en (1, 4) y $a > 0$, ¿cuántos puntos de corte tiene con los ejes? ¿Y si $a < 0$?

Si $a > 0$, hay un único corte con el eje Y.

Si $a < 0$, hay un corte con el eje Y y dos cortes con el eje X.

4. Funciones cuadráticas.

Estudio de funciones cuadráticas

En cualquier parábola de ecuación $y = ax^2 + bx + c$ se cumple que:

- Su vértice es el punto de la función cuya abscisa es $x = -\dfrac{b}{2a}$.
- Su eje de simetría es la recta $x = -\dfrac{b}{2a}$.
- Los puntos de corte con el eje X son las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.
- El punto de corte con el eje Y es $(0, c)$.
- Si a y b tienen el mismo signo, el vértice está situado a la izquierda del eje Y. Si tienen distinto signo, el vértice está a la derecha.

4. Funciones cuadráticas.

30 Determina el vértice, el eje de simetría y los puntos de corte con los ejes de estas funciones.

a) $y = -x^2 + 2x + 3$

b) $y = 2x^2 + 4x$

c) $y = x^2 - 6x + 5$

d) $y = -3 + 4x - x^2$

a) Vértice:

$x = -\dfrac{2}{2(-1)} = 1 \rightarrow y = 4 \rightarrow V(1, 4)$

Eje de simetría: $x = 1$

Puntos de corte con el eje X:

$-x^2 + 2x + 3 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x_1 = -1, x_2 = 3 \rightarrow$

$\rightarrow (-1, 0)$ y $(3, 0)$

Punto de corte con el eje Y: $(0, 3)$

b) Vértice:

$x = -\dfrac{4}{2 \cdot 2} = -1 \rightarrow y = -2 \rightarrow$

$\rightarrow V(-1, -2)$

Eje de simetría: $x = -1$

Puntos de corte con el eje X:

$2x^2 + 4x = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x_1 = -2, x_2 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow (-2, 0)$ y $(0, 0)$

Punto de corte con el eje Y: $(0, 0)$

c) Vértice:

$x = -\dfrac{-6}{2 \cdot 1} = 3 \rightarrow y = -4 \rightarrow$

$\rightarrow V(3, -4)$

Eje de simetría: $x = 3$

Puntos de corte con el eje X:

$x^2 - 6x + 5 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x_1 = 1, x_2 = 5 \rightarrow (1, 0)$ y $(5, 0)$

Punto de corte con el eje Y: $(0, 5)$

d) Vértice:

$x = -\dfrac{4}{2 \cdot (-1)} = 2 \rightarrow$

$\rightarrow y = 1 \rightarrow V(2, 1)$

Eje de simetría: $x = 2$

Puntos de corte con el eje X:

$-3 + 4x - x^2 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3 \rightarrow (1, 0)$ y $(3, 0)$

Punto de corte con el eje Y: $(0, -3)$

4. Funciones cuadráticas.

31 Halla el eje de simetría de las parábolas que pasan por estos puntos.

a) $(-3, 2)$ y $(1, 2)$

b) $(-4, 1)$ y $(-3, 1)$

c) $(0, -1)$ y $(4, -1)$

a) $x = \dfrac{-3+1}{2} = -1$

b) $x = \dfrac{-4-3}{2} = -\dfrac{7}{2}$

c) $x = \dfrac{0+4}{2} = 2$

32 **REFLEXIONA.** Contesta razonadamente a estas preguntas.

a) Una parábola tiene su vértice sobre el eje X. ¿Alguno de sus coeficientes es 0? ¿Qué pasa si cambiamos el signo de sus coeficientes?

b) Una parábola tiene su vértice sobre el eje Y. ¿Alguno de sus coeficientes es 0? ¿Qué pasa si cambiamos el signo de sus coeficientes?

a) Como la primera coordenada del vértice es $x = -\dfrac{b}{2a}$, si el vértice de la parábola está sobre el eje X:

$$a \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) + c = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(-\frac{b}{2a}\right) \cdot \left(-\frac{ab}{2a} + b\right) + c = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(-\frac{b}{2a}\right) \cdot \left(-\frac{ab + 2ab}{2a}\right) + c = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(-\frac{b}{2a}\right) \rightarrow \left(\frac{b}{2}\right) + c = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{b^2}{4a} = c$$

Por tanto, ningún coeficiente tiene por qué ser 0. Si cambiamos el signo de sus coeficientes, se obtiene una parábola simétrica respecto al eje X.

b) Sí, $b = 0$. Si cambiamos el signo de sus coeficientes, se obtiene una parábola simétrica respecto al eje X.

4. Funciones cuadráticas.

Cómo se representa gráficamente una función cuadrática

Representa gráficamente estas funciones.

a) $y = x^2 + 2x - 3$ b) $y = -x^2 + 4$

① Calculamos el vértice de la parábola.

a) $a = 1$ $b = 2$ $c = -3$

Como $a > 0$, el vértice es un mínimo.

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot 1} = -1$$

$$y = x^2 + 2x - 3 \xrightarrow{x=-1} (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 3 = -4$$

Vértice: $(-1, -4)$ es un mínimo.

b) $a = -1$ $b = 0$ $c = 4$

Como $a < 0$, el vértice es un máximo.

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2 \cdot (-1)} = 0$$

$$y = -x^2 + 4 \xrightarrow{x=0} -0^2 + 4 = 4$$

Vértice: $(0, 4)$ es un máximo.

② Hallamos los puntos de corte con el eje X.

a) $x^2 + 2x - 3 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

Puntos de corte en $(1, 0)$ y $(-3, 0)$

b) $-x^2 + 4 = 0$

$x^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

Puntos de corte en $(-2, 0)$ y $(2, 0)$

4. Funciones cuadráticas.

③ Hallamos los puntos de corte con el eje Y.

a) $y = x^2 + 2x - 3 \xrightarrow{x=0} y = -3$

Punto de corte en $(0, -3)$

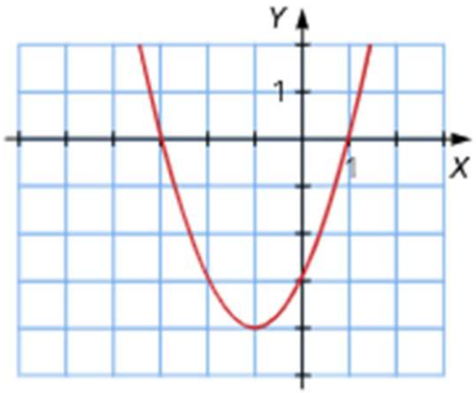
b) $y = -x^2 + 4 \xrightarrow{x=0} y = 4$

Punto de corte en $(0, 4)$

④ Construimos una tabla de valores cercanos al vértice y representamos la función.

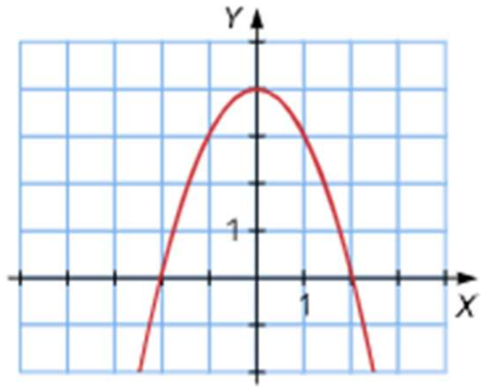
a)

x	-4	-3	-2	$\mathbf{-1}$	0	1	2
y	5	0	-3	$\mathbf{-4}$	-3	0	5



b)

x	-3	-2	-1	$\mathbf{0}$	1	2	3
y	-5	0	3	$\mathbf{4}$	3	0	-5



4. Funciones cuadráticas.

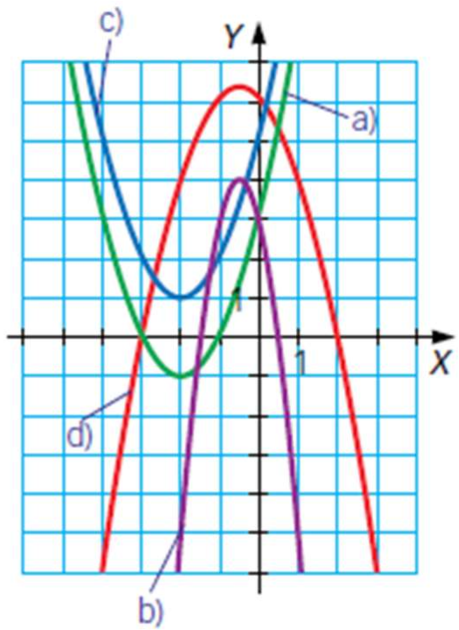
33 Representa gráficamente estas funciones.

a) $y = x^2 + 4x + 3$

b) $y = -4x^2 - 4x + 3$

c) $y = x^2 + 4x + 5$

d) $y = -x^2 - x + 6$



34 Calcula el vértice y los puntos de corte con los ejes de estas funciones. Después, representa su gráfica.

a) $y = x^2 - 2x$ c) $y = x^2 + 6x$

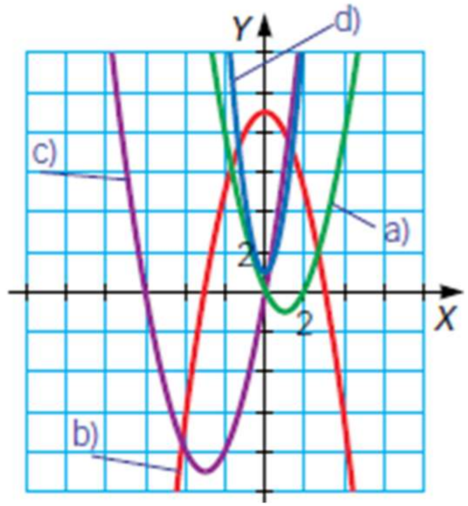
b) $y = -x^2 + 9$ d) $y = 3x^2 + 1$

a) Vértice: $(1, -1)$
Cortes con los ejes: $(0, 0)$, $(2, 0)$

b) Vértice: $(0, 9)$
Cortes con los ejes: $(0, 9)$, $(3, 0)$, $(-3, 0)$

c) Vértice: $(-3, -9)$
Cortes con los ejes: $(0, 0)$, $(-6, 0)$

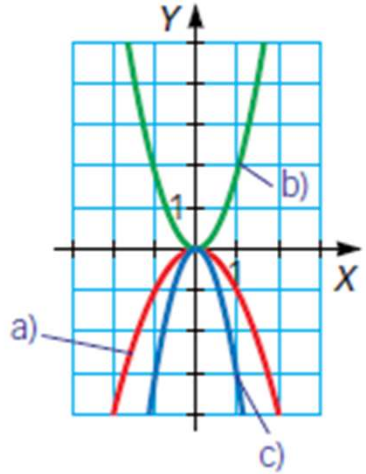
d) Vértice: $(0, 1)$
Corte con los ejes: $(0, 1)$



4. Funciones cuadráticas.

35 Haz la representación gráfica de estas funciones.

a) $y = -x^2$ b) $y = 2x^2$ c) $y = -3x^2$



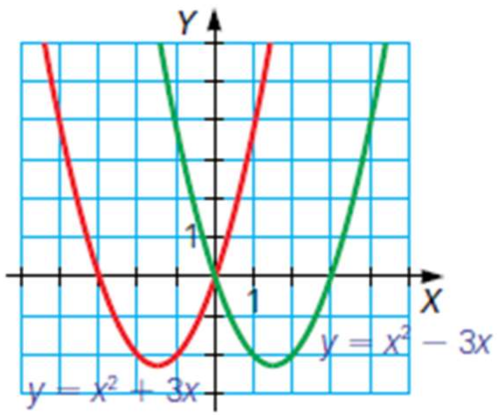
36 Determina la relación que existe entre cada par de parábolas. Ayúdate de su representación.

a) $y = x^2 + 3x$ $y = x^2 - 3x$

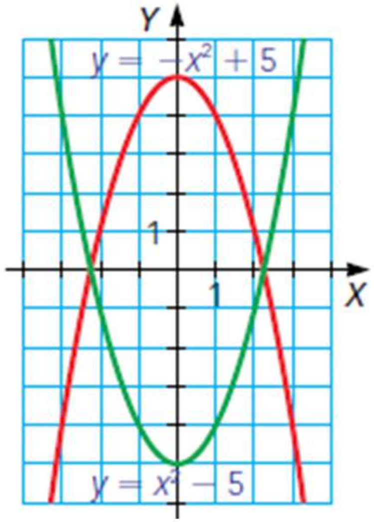
b) $y = -x^2 + 5$ $y = x^2 - 5$

c) $y = x^2$ $y = (x + 1)^2$

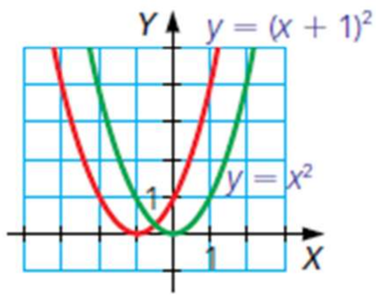
a) Simétricas respecto al eje Y.



b) Simétricas respeto al eje X.



c) La segunda parábola está trasladada una unidad a la izquierda.

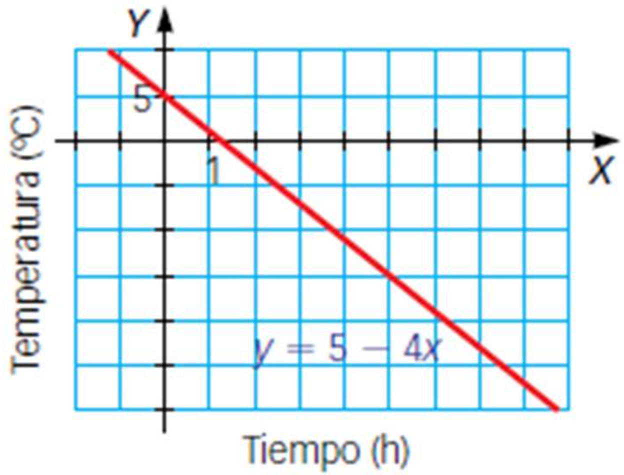


5. Aplicaciones.

Existen muchas situaciones reales donde encontramos magnitudes relacionadas entre sí mediante funciones lineales.

El estudio de su pendiente, sus puntos de corte con los ejes, etc., nos permite tener una visión global de la relación entre las magnitudes.

37 La temperatura en un lugar de la Antártida a las 12 h es de 5 °C y cada hora baja 4 °C. Expresa esta relación mediante una ecuación y represéntala gráficamente.



38 El agua hierve a 100 °C al nivel del mar. Por cada incremento de 100 m en la altitud se necesita una décima de grado menos para hervir.

a) Calcula el punto de ebullición en las cimas del Aneto (3 404 m) y del Everest (8 848 m).

b) Indica la ecuación de la función *Temperatura de ebullición-Altitud* y represéntala gráficamente. ¿De qué tipo de función se trata?

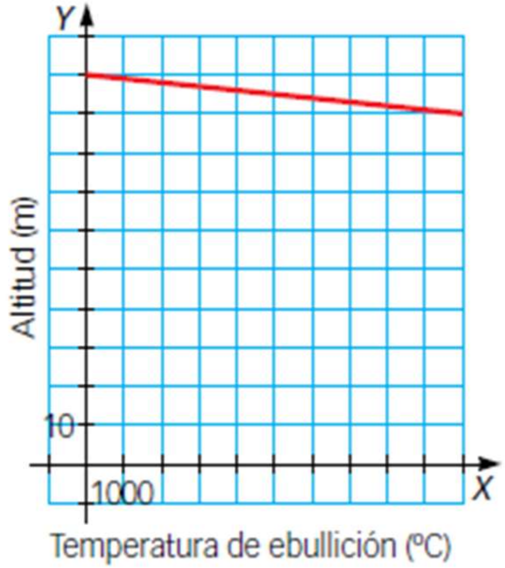
5. Aplicaciones.

$$y = 100 - \frac{x}{1000}$$

a) El punto de ebullición en la cima del Aneto es $100 - \frac{3\,404}{1000} = 96{,}596\ °C$.

El punto de ebullición en la cima del Everest es $100 - \frac{8\,848}{1000} = 91{,}152\ °C$.

b)



Se trata de una función lineal.

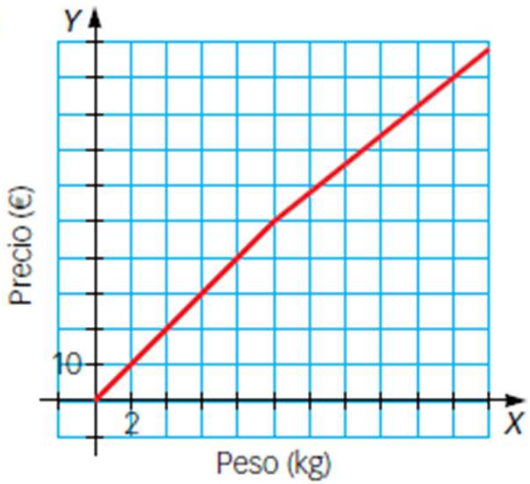
39 **REFLEXIONA.** En un establecimiento, el precio de un producto es de 1 €/kg si se compran hasta 10 kg. Si se compran más de 10 kg, cada kilo de más tiene un descuento del 20% respecto del precio inicial.

a) Calcula la ecuación de la función que relaciona el peso y el precio según el número de kilos que se compren.

b) Represéntala gráficamente.

a)
$$y = \begin{cases} x & \text{si } 0 \le x \le 10 \\ 10 + 0{,}8 \cdot (x - 10) & \text{si } x > 10 \end{cases}$$

b)



5. Aplicaciones.

40 Un técnico de calefacción cobra 22 € por el desplazamiento y 12 € por cada hora de trabajo. ¿Cuánto tiempo le ha llevado hacer un trabajo si la factura es de 40 €?

$y = 22 + 12x \rightarrow 40 = 22 + 12x \rightarrow$
$\rightarrow x = 1{,}5$ horas $\rightarrow$ 1 h y 30 min.

Aplicaciones de las funciones cuadráticas

Al igual que con las funciones lineales, existen muchas situaciones reales en las que podemos encontrar magnitudes relacionadas entre sí mediante una función cuadrática.

De la misma manera, el estudio de su vértice (analizar si se trata de un máximo o un mínimo, y dónde es creciente y decreciente la función), sus puntos de corte con los ejes, etc., nos permite tener una visión global de la relación entre las magnitudes.

5. Aplicaciones.

41 Andrea y Cristian lanzan una pelota cada uno siguiendo las trayectorias que se indican.

Andrea: $y = -\frac{1}{5}x^2 + 2x$

Cristian: $y = -x^2 + 6x$

¿Cuál llega más lejos? ¿Cuál llega más alto?

La primera alcanza 10 m y la segunda 6 m

La pelota de Andrea llega más lejos.

Como en ambos casos $a < 0$, se trata de parábolas con las ramas hacia abajo.

Vértice de la parábola de Andrea:

$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot (-1/5)} = 5 \rightarrow$

$\rightarrow y = -\frac{1}{5} \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 = 5$

Alcanza 5 m de altura.

Vértice de la parábola de Cristian:

$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{-2 \cdot 1} = 3 \rightarrow$

$\rightarrow y = -3^2 + 6 \cdot 3 = 9$

Alcanza 9 m de altura.

La pelota de Cristian llega más alto.

5. Aplicaciones.

42 **REFLEXIONA.** En un partido de fútbol sala, la portera lanza el balón con una trayectoria parabólica.

El balón alcanza los 8 m de altura máxima cuando se encuentra a una distancia de 12 m de la portería. ¿Cuál es la trayectoria del balón?

Vértice: (6, 8)

Puntos de corte con el eje X: (0, 0) y (12, 0)

$0 = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \rightarrow c = 0$

$8 = a \cdot 6^2 + b \cdot 6 \rightarrow 36a + 6b = 8 \rightarrow$
$\rightarrow 18a + 3b = 4$

$0 = a \cdot 12^2 + b \cdot 12 \rightarrow 144a + 12b = 0 \rightarrow$
$\rightarrow 12a + b = 0$

$$\left.\begin{array}{r} 18a + 3b = 4 \\ 12a + b = 0 \end{array}\right\} \rightarrow a = -\frac{2}{9},\ b = \frac{8}{3}$$

La trayectoria del balón sigue una parábola

$$y = -\frac{2}{9}x^2 + \frac{8}{3}x$$