

Tema 7

FUNCIONES

Índice

- 1. Concepto de función.**
- 2. Dominio e recorrido dunha función.**
- 3. Continuidade e puntos de corte.**
 - 3.1 Continuidade.**
 - 3.2 Puntos de corte.**
- 4. Crecemento e decrecemento. Máximos e mínimos.**
 - 4.1 Crecemento e decrecemento.**
 - 4.2 Máximos e mínimos.**
- 5. Periodicidade e simetría.**
 - 5.1 Periodicidade.**
 - 5.2 Simetría.**

1. Concepto de función.

Una **función** es una relación entre dos magnitudes o variables numéricas, x e y , de forma que a cada valor de x le corresponde un único valor de y .

La variable x se denomina **variable independiente**, y la variable y , **variable dependiente**.

EJEMPLOS

1. Un kilo de peras cuesta 2 €. La relación entre el número de kilos de peras que se compran y su precio, ¿es una función?

La magnitud *cantidad de kilos* es la variable independiente. La llamamos x . Toma cualquier valor positivo.

La magnitud *precio* es la variable dependiente. La llamamos y . Toma valores en función del número de kilos que compramos.

$$\text{Si compramos 1 kg} \xrightarrow{\text{cuesta}} 1 \cdot 2 = 2 \text{ €}$$

$$\text{Si compramos 1,5 kg} \xrightarrow{\text{cuesta}} 1,5 \cdot 2 = 3 \text{ €}$$

$$\text{Si compramos 5 kg} \xrightarrow{\text{cuesta}} 5 \cdot 2 = 10 \text{ €}$$

A cada valor de x le corresponde un único valor de y . Por tanto, la relación es una función.

1. Concepto de función.

2. ¿Es una función la relación entre el peso y la edad de una persona?

- Si tomamos como variable x el peso y como variable y la edad, puede haber un peso que coincida en dos edades diferentes, por ejemplo, puedo pesar 70 kg a los 22 años y a los 26 años. Es decir, a un valor de x (peso) le corresponden dos valores de y (edad).
- Sin embargo, si tomamos como variable x la edad y como variable y el peso, en cada momento el peso de una persona es único. Es decir, a un valor de x (edad) le corresponde un único valor de y (peso).

Por tanto, en el primer caso no sería una función, pero en el segundo sí.

3. La relación en la que a cada número le hacemos corresponder su raíz cuadrada, ¿es una función?

- $\sqrt{4} = \pm 2$ A cualquier número positivo le corresponden dos valores distintos. No es una función.
Para que sea una función se suele considerar la raíz de un número como su raíz positiva.

1. Concepto de función.

1 ¿Son estas relaciones funciones?

a) Número de cuadernos comprados y el precio que tenemos que pagar por ellos.

b) Área de un rectángulo y su ancho.

c) Número de billetes de 5 € y cantidad de dinero que representan.

d) Duración de una ducha y cantidad de agua gastada.

e) Número de teléfono y suma de sus cifras.

f) Número de palabras escritas con un bolígrafo y duración de la tinta.

a) Sí

b) No

c) Sí

d) No

e) Sí

f) No

2 Calcula para 1, 4, 6 y 11 el número o los números que les corresponden según estas relaciones e indica cuáles son funciones.

a) A cada número, su posterior.

b) A cada número, sus divisores.

c) A cada número, su triple menos 4.

d) A cada número, su cuadrado.

e) A cada número, su raíz cuadrada.

a) Es función.

 $1 \rightarrow 2$ $6 \rightarrow 7$ $4 \rightarrow 5$ $11 \rightarrow 12$

b) No es función.

 $1 \rightarrow 1$ $6 \rightarrow 1, 2, 3, 6$ $4 \rightarrow 1, 2, 4$ $11 \rightarrow 1, 11$

c) Es función.

 $1 \rightarrow -1$ $6 \rightarrow 14$ $4 \rightarrow 8$ $11 \rightarrow 29$

d) Es función.

 $1 \rightarrow 1$ $6 \rightarrow 36$ $4 \rightarrow 16$ $11 \rightarrow 121$

e) No es función.

 $1 \rightarrow -1, 1$ $4 \rightarrow -2, +2$ $6 \rightarrow -\sqrt{6}, \sqrt{6}$ $11 \rightarrow -\sqrt{11}, \sqrt{11}$

1. Concepto de función.

- ③ **REFLEXIONA.** Encuentra una relación que sea función y otra que no lo sea.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Es función: Un polígono regular y su número de lados.

No es función: La cantidad de lluvia que cae y lo que crecen las plantas.

Cómo se representa gráficamente una función

Un ciclista viaja con su bicicleta a 20 km/h. Representa gráficamente la función que relaciona el tiempo que lleva pedaleando y la distancia que ha recorrido.

- ① Identificamos las dos variables que vamos a representar.

La distancia que recorre depende del tiempo que lleva viajando.

Las magnitudes que son variables son el tiempo que lleva viajando y la distancia que ha recorrido:

Variable independiente (x) → Tiempo

Variable dependiente (y) → Distancia recorrida

1. Concepto de función.

- ② Calculamos, si es posible, la ecuación de la función.

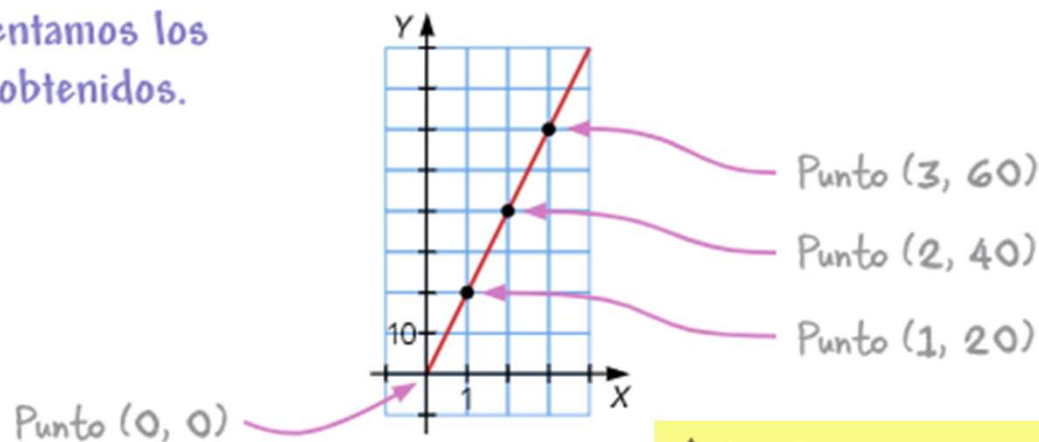
$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } x = 1 \text{ h} \rightarrow y = 20 \cdot 1 = 20 \text{ km recorridos} \\ \text{Si } x = 2 \text{ h} \rightarrow y = 20 \cdot 2 = 40 \text{ km recorridos} \\ \text{Si } x = 3 \text{ h} \rightarrow y = 20 \cdot 3 = 60 \text{ km recorridos...} \end{array} \right\}$$

→ Por tanto, podemos expresar la función con la ecuación $y = 20x$.

- ③ Construimos una tabla de valores con los datos.

Tiempo en horas	0	1	2	3
Distancia en kilómetros	$20 \cdot 0 = 0$	$20 \cdot 1 = 20$	$20 \cdot 2 = 40$	$20 \cdot 3 = 60$

- ④ Representamos los puntos obtenidos.



- ⑤ Analizamos si tiene sentido unir los puntos.

En este caso tiene sentido hablar de 0,5 h o de 30,75 km. Es decir, x e y pueden tomar cualquier valor. Por tanto, unimos los puntos mediante una línea.

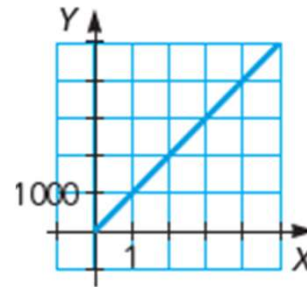
Antes de unir los puntos debemos reflexionar sobre si tiene sentido hacerlo o no. Esto dependerá de los valores que puedan tomar las variables.

1. Concepto de función.

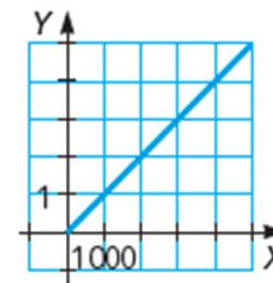
- 4 Representa la función que relaciona una medida en gramos con su equivalente en:

- a) Miligramos.
- b) Kilogramos.
- c) Toneladas.

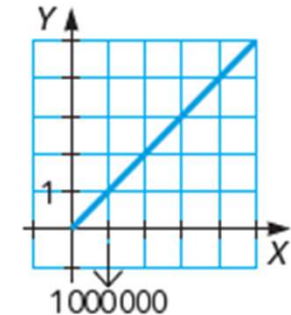
a) $f(x) = 1000x$



b) $f(x) = \frac{x}{1000}$



c) $f(x) = \frac{x}{1000000}$



- 5 Una macedonia de frutas para una persona lleva 30 g de fresa, 40 g de kiwi, 20 g de pera y 25 g de mandarina.

Considera la relación entre la cantidad de cada fruta que se necesita y el número de comensales.

Representa en el mismo eje de coordenadas, utilizando distintos colores, estas funciones desde 1 a 6 comensales.

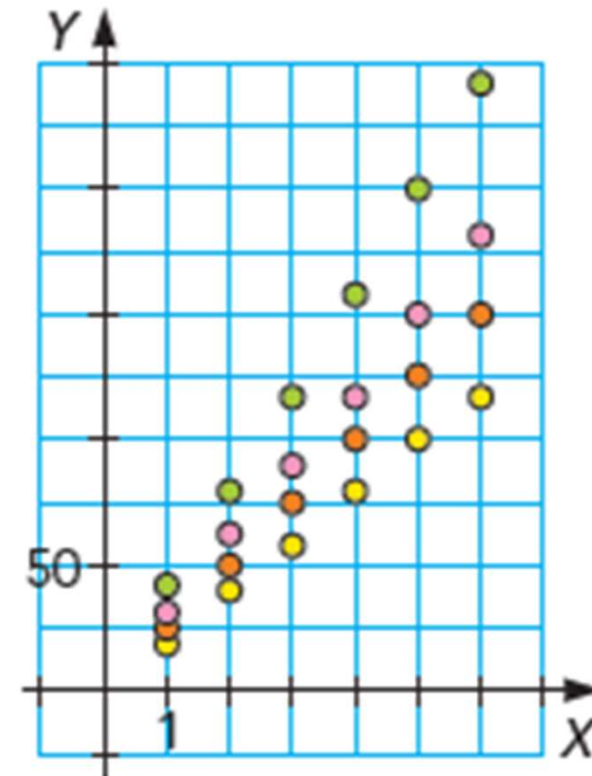
Si $x = \text{n.º de personas}$

Fresa (rosa) $\rightarrow 30x$

Kiwi (verde) $\rightarrow 40x$

Pera (amarilla) $\rightarrow 20x$

Mandarina (naranja) $\rightarrow 25x$

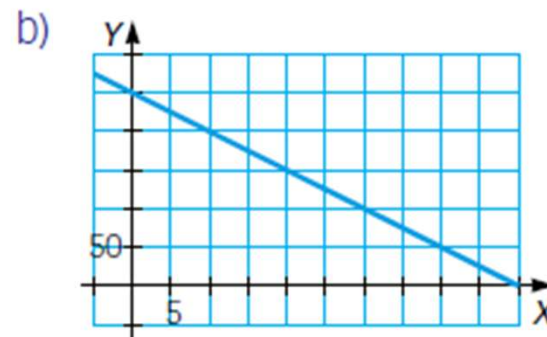
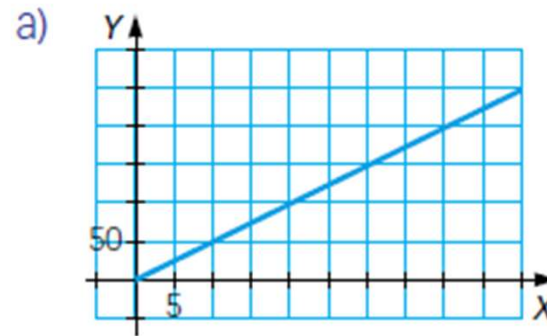


1. Concepto de función.

- 6 En una sala de teatro caben 250 espectadores. El teatro abre sus puertas a las 19:00 h y se va llenando a un ritmo de 5 personas por minuto. Representa la gráfica de la función que relaciona la hora con:

- La cantidad de espectadores que han entrado.
- El número de espectadores que faltan por entrar.

¿Cuántos espectadores habrá a las 19:30 h? ¿Cuántos faltan para llenar la sala?

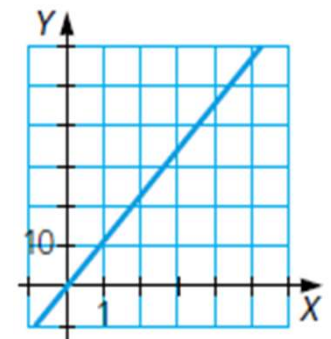


A las 19:30 habrá 150 espectadores.
Faltan 100 espectadores para llenar la sala.

- 7 Lidia tiene que construir la valla de su huerta rectangular. El largo de la huerta mide 5 veces más que el doble del ancho. Representa gráficamente la función que relaciona el ancho de la huerta con el perímetro.

Si x es lo que mide el ancho de la huerta:

$$P = 2x + 2(5 \cdot 2x) = 22x$$



2. Dominio y recorrido de una función.

- El **dominio** de una función $f(x)$ es el conjunto de todos los valores que toma la variable independiente. Se representa por $\text{Dom } f$.
- El **recorrido** de una función $f(x)$ es el conjunto de todos los valores que toma la variable dependiente. Se representa por $\text{Im } f$.

EJEMPLO

4. Determina el dominio y el recorrido de la función que relaciona el número de monedas de 2 € que tengo y el dinero que representan.

La variable independiente, *número de monedas*, puede tomar valores 0, 1, 2, 3...

Esto lo escribimos así: $\text{Dom } f = \{0, 1, 2, 3...\}$.

La variable dependiente, *dinero que representan*, puede tomar valores 0, 2, 4, 6...

Esto lo escribimos así: $\text{Im } f = \{0, 2, 4, 6...\}$.

RETO 1. Un caracol sube por un palo de 10 m de altura. Ascende 3 m durante el día y resbala 2 m por la noche.
¿Cuánto tiempo tardará en subir?

Cada día (contando día y noche sube un total de 1 metro).

Al comenzar el octavo día se encuentra en el metro 7 y al subir los 3 metros correspondientes llega al metro 10.

2. Dominio y recorrido de una función.

El dominio de una función se puede expresar de distintas formas. Por ejemplo:

- Con intervalos:
 $[0, +\infty)$ significa que tomamos todos los valores entre 0 e infinito incluido el 0.
- Eliminando puntos:
 $\mathbb{R} - \{0\}$ significa que tomamos todos los números reales exceptuando el 0.

8 Dada la función que asocia a cada número real su doble más 4, halla:

- Su expresión algebraica.
- Su dominio.
- Su recorrido.
- Su gráfica.

EJEMPLO

5. Determina el dominio de estas funciones.

a) $f(x) = 3x - 2$

La variable independiente, x , puede tomar cualquier valor (se puede calcular el triple de cualquier número real y también se le puede restar dos a cualquier número). Esto lo escribimos así: $\text{Dom } f = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \sqrt{x}$

La variable independiente, x , puede tomar cualquier valor que sea positivo (no existe la raíz de un número negativo). Esto lo escribimos así: $\text{Dom } f = [0, +\infty)$.

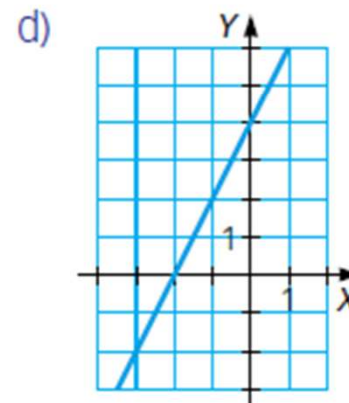
c) $f(x) = \frac{1}{x}$

La variable independiente, x , puede tomar cualquier valor excepto 0 (un número no se puede dividir entre 0). Esto lo escribimos así: $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$.

a) $f(x) = 2x + 4$

b) Todos los reales.

c) Todos los reales.



2. Dominio y recorrido de una función.

9 Indica el dominio de estas funciones.

a) $f(x) = x + 2$

c) $f(x) = 2x - 5$

a) $\mathbb{R}$

c) $\mathbb{R}$

b) $f(x) = \frac{2}{x}$

d) $f(x) = \frac{x}{2}$

b) $\mathbb{R} - \{0\}$

d) $\mathbb{R}$

10 Indica el dominio de estas funciones.

a) $f(x) = \frac{3}{x - 2}$

b) $f(x) = \sqrt{x + 4}$

a) $x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow$
 $\rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{2\}$

b) $x + 4 \geq 0 \rightarrow x \geq -4 \rightarrow$
 $\rightarrow \text{Dom } f = [-4, +\infty)$

11 REFLEXIONA. Escribe la ecuación de una función que tenga este dominio.

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

c) $\text{Dom } f = [1, +\infty)$

a) $f(x) = 9 + x$

c) $f(x) = \sqrt{x - 1}$

b) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1\}$

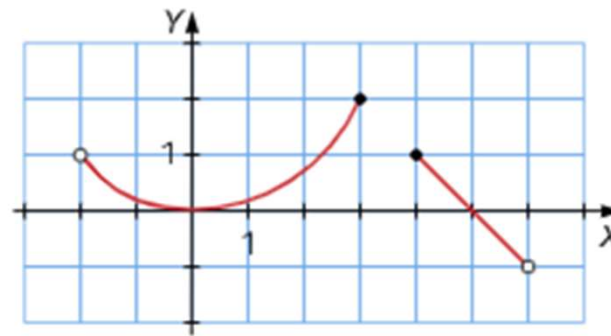
b) $f(x) = \frac{10}{x + 1}$

2. Dominio y recorrido de una función.

Cómo se calcula el dominio y el recorrido de una función

Observa la gráfica de esta función y calcula:

- Su dominio.
- Su recorrido.



El dominio se define en el eje X y el recorrido en el eje Y .

Si el punto (a, b) pertenece a la gráfica de la función, entonces:

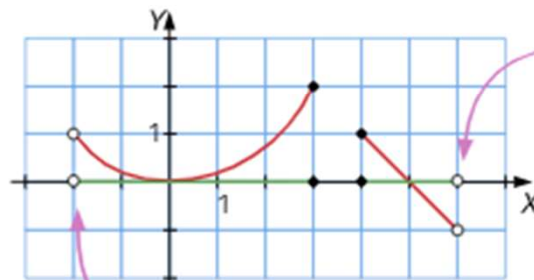
a pertenece a $\text{Dom } f$.

b pertenece a $\text{Im } f$.

- Nos fijamos en los ejes para determinar los valores que toman las variables.

Los puntos $(-2, 1)$ y $(6, -1)$ están marcados con un punto hueco, esto significa que no pertenecen a la función.

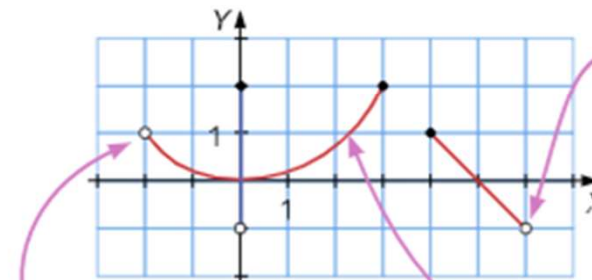
- Nos fijamos en el eje X para determinar los valores que puede tomar la variable x .



La función no está definida para $x = -2$.

La función no está definida para $x = 6$.

- Nos fijamos en el eje Y para determinar los valores que puede tomar la variable y .



La función no toma el valor $y = 1$ por este lado.

Pero sí por este lado.

La función no toma el valor $y = -1$.

2. Dominio y recorrido de una función.

② Escribimos el dominio y el recorrido utilizando intervalos.

Nos fijamos en la parte que hemos marcado sobre los ejes y en los puntos que no pertenecen a la función.

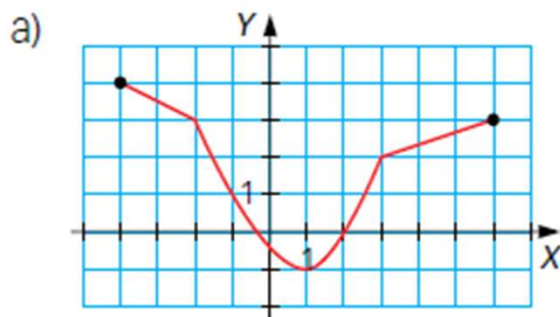
a) $\text{Dom } f = (-2, 3] \cup [4, 6)$

No están incluidos -2 y 6 .

b) $\text{Im } f = (-1, 2]$

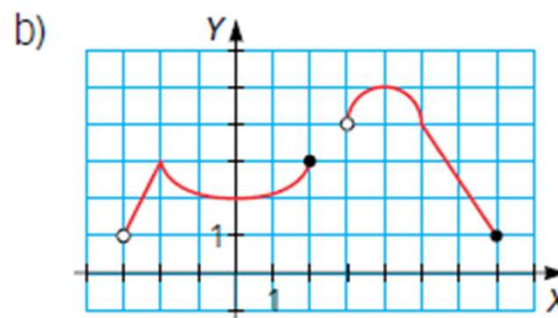
No está incluido -1 .

12 Indica el dominio y el recorrido de estas funciones.



a) $\text{Dom } f = [-4, 6]$

$\text{Im } f = [-1, 4]$



b) $\text{Dom } f = (-3, 2] \cup (3, 7]$

$\text{Im } f = [1, 5]$

La primera incluye al número 3 en su dominio, pero la segunda no.

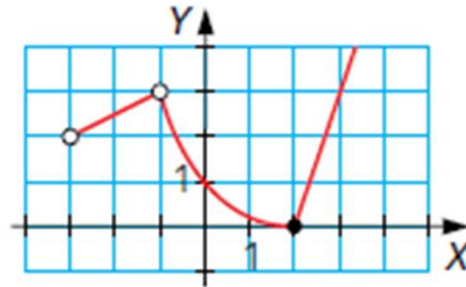
La primera y la segunda incluyen al número 3 en su recorrido.

¿Cuál de las dos funciones incluye al número 3 en su dominio? ¿Y en su recorrido? ¿Y al número $-2,9$?

Ninguna de las dos gráficas incluye al número $-2,9$ en su recorrido, pero las dos lo incluyen en su dominio.

2. Dominio y recorrido de una función.

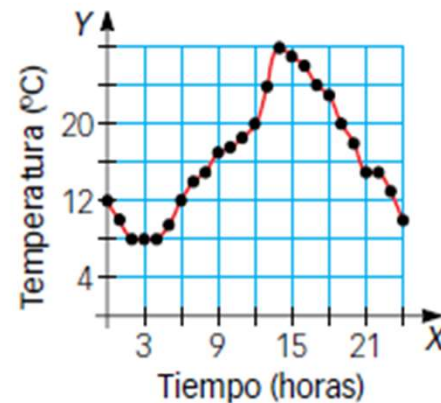
- 13 Indica el dominio y el recorrido de esta función.



$$\text{Dom } f = (-3, -1) \cup (-1, +\infty)$$

$$\text{Im } f = [0, +\infty)$$

- 14 Esta es la gráfica de la temperatura de una ciudad durante todo el día. Indica el dominio y el recorrido.



$$\text{Dom } f = [0, 24]$$

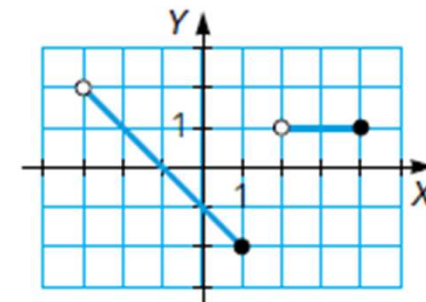
$$\text{Im } f = [8, 28]$$

- 15 Dibuja una función cuyo dominio y recorrido sean:

$$\text{Dom } f = (-3, 1] \cup (2, 4] \quad \text{Im } f = [-2, 2]$$

Respuesta abierta.

Por ejemplo:



3. Continuidad y puntos de corte.

3.1. Continuidad

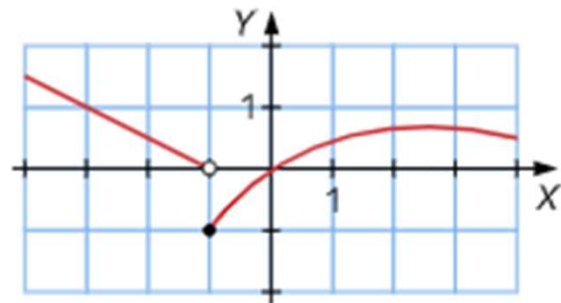
Una función definida en un intervalo es **continua** en sus puntos si su gráfica puede dibujarse de un solo trazo.

Si al dibujar la gráfica de la función existe algún punto en el que se interrumpe, este es un **punto de discontinuidad** de la función.

Una función es continua cuando no tiene ningún punto de discontinuidad.

EJEMPLO

6. Decide si esta función es continua. Si no lo es, indica los puntos de discontinuidad.



La gráfica tiene un salto en $x = -1$; por tanto, la función no es continua.

En $x = -1$ presenta un punto de discontinuidad.

3. Continuidad y puntos de corte.

3.2. Puntos de corte

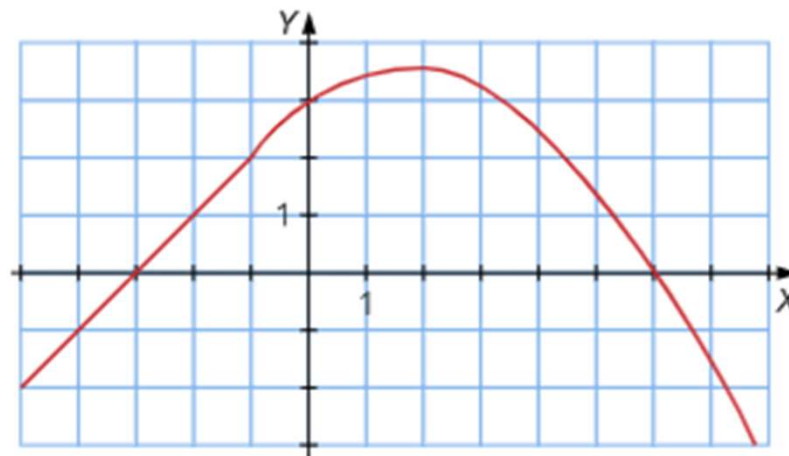
Los **puntos de corte** con los ejes de una función son los puntos de intersección de la gráfica con cada eje de coordenadas.

- Los puntos de corte con el eje X son de la forma $(a, 0)$ y el valor de a se calcula resolviendo la ecuación $f(x) = 0$.
- El punto de corte con el eje Y es de la forma $(0, b)$ y el valor de b se calcula hallando $f(0)$. Esto es, $f(0) = b$.

EJEMPLO

7. Indica cuáles son los puntos de corte de esta función.

- Puntos de corte con el eje X : $(-3, 0)$ y $(6, 0)$.
- Punto de corte con el eje Y : $(0, 3)$.



La función que asocia a cada número su triple menos 7 se puede escribir como:

$$y = 3x - 7 \text{ o } f(x) = 3x - 7$$

Y el valor de esta función en $x = 4$ se representa como:

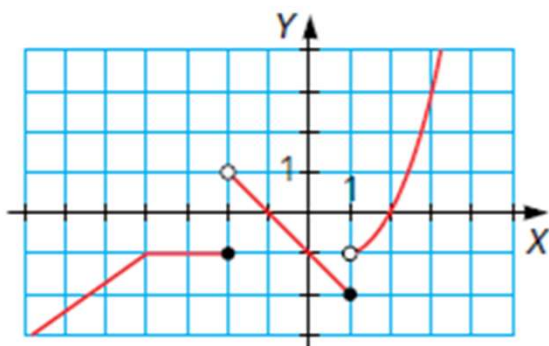
$$f(4) = 3 \cdot 4 - 7$$

O como:

$$y = 3 \cdot 4 - 7$$

3. Continuidad y puntos de corte.

- 16 Estudia la continuidad y determina los puntos de corte con los ejes de la siguiente función.



Continuidad:

$$(-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, +\infty)$$

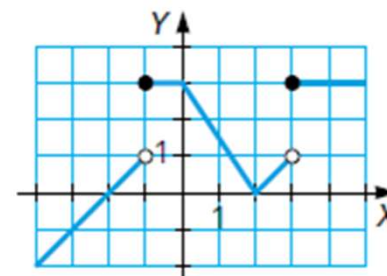
Puntos de corte con eje X: $(-1, 0)$ y $(2, 0)$

Puntos de corte con eje Y: $(0, -1)$

- 17 Dibuja una función con dos puntos de discontinuidad en $x = -1$ y $x = 3$ y que corte a los ejes en $(0, 3)$, $(-2, 0)$ y $(2, 0)$.

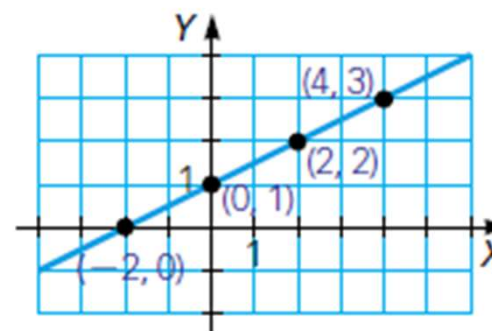
Respuesta abierta.

Por ejemplo:



- 18 **REFLEXIONA.** Halla los puntos de corte con los ejes de la recta que pasa por los puntos $(2, 2)$ y $(4, 3)$.

$(0, 1)$ y $(-2, 0)$



3. Continuidad y puntos de corte.

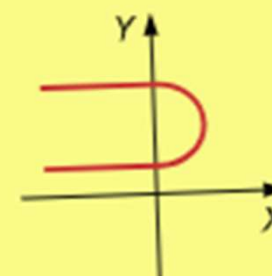
Cómo se hallan los puntos de corte con los ejes

Halla los puntos de corte con los ejes de estas funciones:

a) $f(x) = 2x - 1$

b) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Una función puede tener más de un punto de corte con el eje X y solo uno con el eje Y.



Si hay más de un punto de corte con el eje Y, no es una función.

- ① Resolvemos la ecuación $f(x) = 0$ para hallar los puntos de corte con el eje X.

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= 0 \\ 2x - 1 &= 0 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f(x) &= 0 \\ x^2 - 4x + 3 &= 0 \\ x &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

- ② Los puntos de corte con el eje X tienen como primera coordenada la x que hemos calculado y como segunda coordenada 0.

Punto de corte con el eje X: $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

Puntos de corte con el eje X: $(3, 0)$ y $(1, 0)$

- ③ Calculamos $f(0)$ para hallar el punto de corte con el eje Y.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x - 1 \\ f(0) &= 2 \cdot 0 - 1 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4x + 3 \\ f(0) &= 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3 \end{aligned}$$

3. Continuidad y puntos de corte.

- ④ Los puntos de corte con el eje Y tienen como primera coordenada 0 y como segunda coordenada el valor que hemos calculado.

Punto de corte con el eje Y : $(0, -1)$

Punto de corte con el eje Y : $(0, 3)$

- 19 Halla los puntos de corte con los ejes de estas funciones.

a) $y = 3x + 1$

e) $y = x^2 - 9$

b) $y = -2x + 3$

f) $y = x^2 + x - 6$

c) $y = 3(x + 1)$

g) $y = 4x^2 + 8x - 5$

d) $y = \frac{3x + 2}{4}$

h) $y = \frac{x^2 - 16}{3}$

a) $(0, 1)$ y $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$

e) $(0, -9)$, $(3, 0)$ y $(-3, 0)$

b) $(0, 3)$ y $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

f) $(0, -6)$, $(-3, 0)$ y $(2, 0)$

c) $(0, 3)$ y $(-1, 0)$

g) $(0, -5)$, $\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$ y $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

d) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ y $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$

h) $\left(0, -\frac{16}{3}\right)$, $(4, 0)$ y $(-4, 0)$

- 20 Determina los puntos de corte con los ejes de cada una de las siguientes funciones.

a) $y = 2(x - 1)$

e) $y = (x - 4)(x - 7)$

b) $y = 3(x + 3)$

f) $y = (x - 2)^2$

c) $y = -5(1 - x)$

g) $y = (2x - 1)(x + 4)$

d) $y = \frac{3(2x + 3)}{4}$

h) $y = \frac{(5x - 4)(2x + 5)}{2}$

a) $(0, -2)$ y $(1, 0)$

e) $(0, 28)$, $(4, 0)$ y $(7, 0)$

b) $(0, 9)$ y $(-3, 0)$

f) $(0, 4)$, $(2, 0)$

c) $(0, -5)$ y $(1, 0)$

g) $(0, -4)$, $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ y $(-4, 0)$

d) $\left(0, \frac{9}{4}\right)$ y $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$

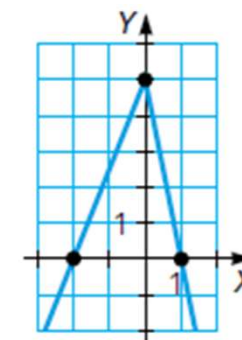
h) $(0, -10)$, $\left(\frac{4}{5}, 0\right)$ y $\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$

3. Continuidad y puntos de corte.

- 21 Dibuja una función que cumpla lo siguiente:

- Corta al eje X en $x = -2$ y $x = 1$.
- Corta al eje Y en $y = 5$.

Respuesta abierta. Por ejemplo:



- 22 Indica cuál de las siguientes funciones corta al eje X en el punto $(-2, 0)$.

- a) $f(x) = x^2 + 2$
- b) $g(x) = 2x + 4$
- c) $h(x) = 4x^2 + 6x - 4$
- d) $i(x) = (3x + 6)(7x - 3)$

$g(x)$, $h(x)$ e $i(x)$ porque $g(-2) = h(-2) = i(-2) = 0$

- 23 Algunas de estas funciones tienen el mismo punto de corte con el eje Y . ¿Cuáles son?

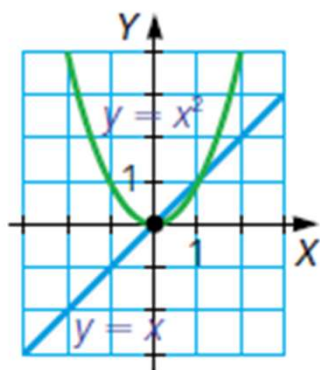
- a) $f(x) = 2x + 3$
- b) $g(x) = -x + 4$
- c) $h(x) = 3(x + 1)$
- d) $i(x) = \frac{x}{2} + 3$
- e) $j(x) = 3$

$f(0) = 3, g(0) = 4, h(0) = 3, i(0) = 3$
 $y j(0) = 3 \rightarrow f(x), h(x), i(x)$ y $j(x)$ tienen el mismo punto de corte con el eje Y , el punto $(0, 3)$.

3. Continuidad y puntos de corte.

- 24 ¿Pueden tener los mismos puntos de corte con los ejes dos funciones diferentes? Dibuja la gráfica de dos funciones que cumplan esta condición.

Sí. Por ejemplo, la función $y = x$ y la función $y = x^2$ cuyo único punto de corte con los ejes es el punto $(0, 0)$.



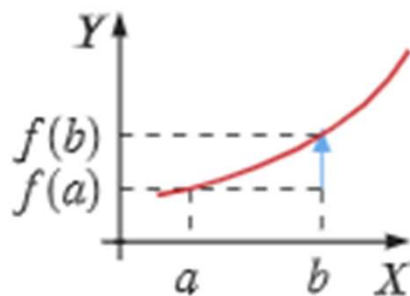
4. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

4.1. Crecimiento y decrecimiento

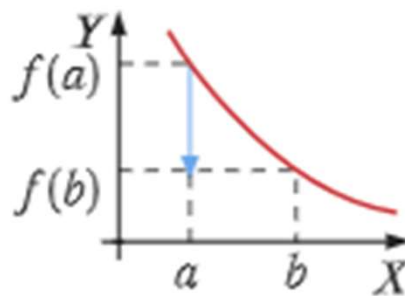
Dada una función continua $f(x)$ en un intervalo, si para cada par de valores del intervalo, $x = a$ y $x = b$, con $a < b$, se cumple que:

- $f(b) > f(a)$, la función es **creciente** en el intervalo.
- $f(b) < f(a)$, la función es **decreciente** en el intervalo.
- $f(b) = f(a)$, la función es **constante** en el intervalo.

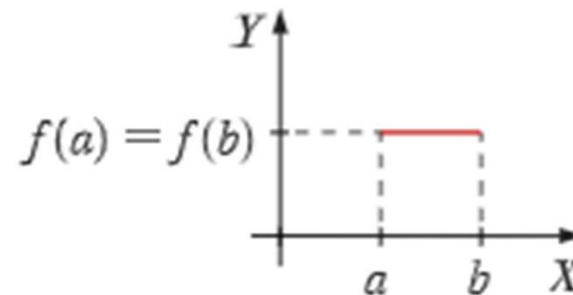
Los valores a y b estudiados deben estar lo suficientemente próximos.



Creciente



Decreciente

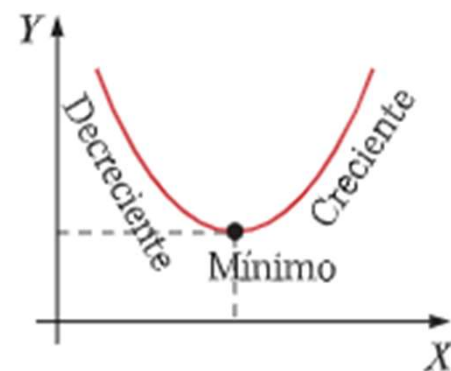
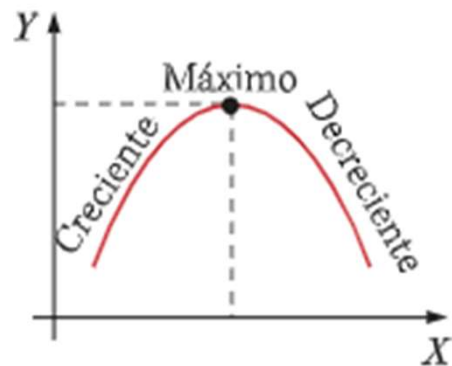


Constante

4. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

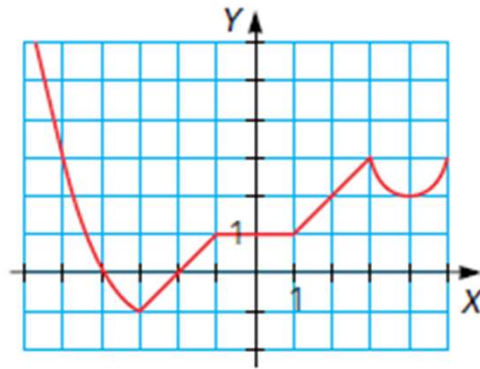
4.2. Máximos y mínimos

- Una función continua tiene un **máximo** en $x = a$ cuando pasa de ser creciente a decreciente en ese punto.
- Una función continua tiene un **mínimo** en $x = a$ cuando pasa de ser decreciente a creciente en ese punto.



4. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

- 25 Determina los máximos y los mínimos y contesta.



Máximo $\rightarrow (3, 3)$

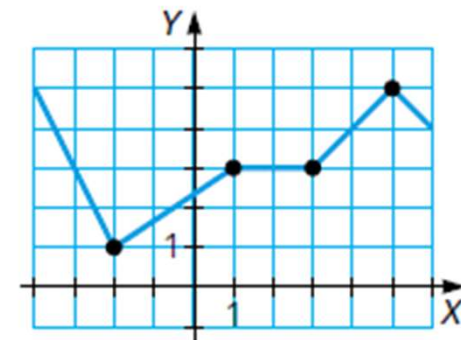
Mínimos $\rightarrow (-3, -1)$ y $(4, 2)$

- a) En el intervalo $(-3, -1)$ es creciente.
b) En el intervalo $(-1, 1)$ es constante.

- a) ¿Es creciente en el intervalo $(-3, -1)$?
b) ¿Y en $(-1, 1)$?

- 26 Dibuja una función creciente en los intervalos $(-2, 1)$ y $(3, 5)$, constante en $(1, 3)$ y decreciente en el resto. ¿Dónde hay máximos y mínimos?

Respuesta abierta.
Por ejemplo:



Máximo en $x = 5$.

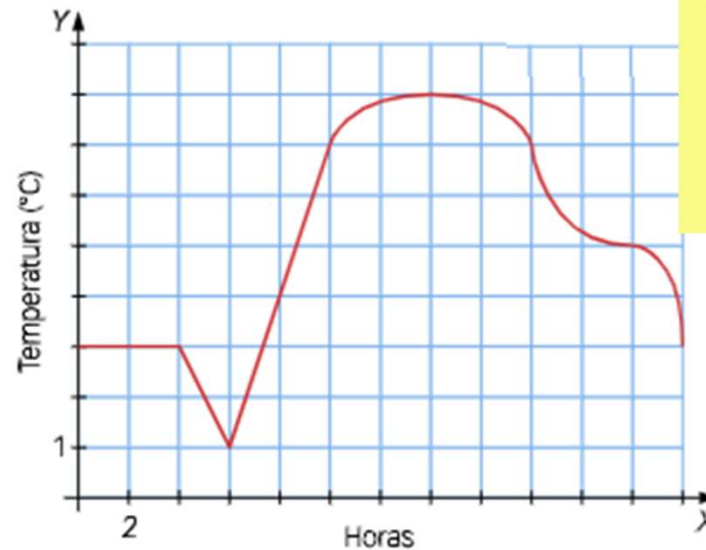
Mínimo en $x = -2$.

4. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

Cómo se interpreta el crecimiento y decrecimiento de una función

Esta gráfica representa la evolución de la temperatura en una ciudad durante un día.

Estudia cómo crece y decrece la temperatura a lo largo del día.
¿A qué hora hace más calor?
¿Y más frío?



Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento siempre son abiertos.

① Determinamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y si hay algún tramo constante.

- La función crece en el intervalo $(6, 14)$.
- La función decrece en los intervalos $(4, 6)$ y $(14, 24)$.
- La función es constante en el intervalo $(0, 4)$.

Para obtener los intervalos nos fijamos en el eje X.

4. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

- ② Interpretamos los resultados obtenidos.

Crecimiento: la temperatura sube entre las 6:00 h y las 14:00 h.

Decrecimiento: la temperatura baja de madrugada, entre las 4:00 h y las 6:00 h, y durante la tarde y la noche, desde las 14:00 h hasta las 24:00 h.

Constante: la temperatura no varía entre las 0:00 h y las 4:00 h de la madrugada.

- ③ Estudiamos si hay algún máximo o mínimo.

Máximo: en $x = 14$

Mínimo: en $x = 6$

- ④ Interpretamos los resultados obtenidos.

La temperatura máxima del día se alcanzó a las 14:00 h, y fueron 8 °C.

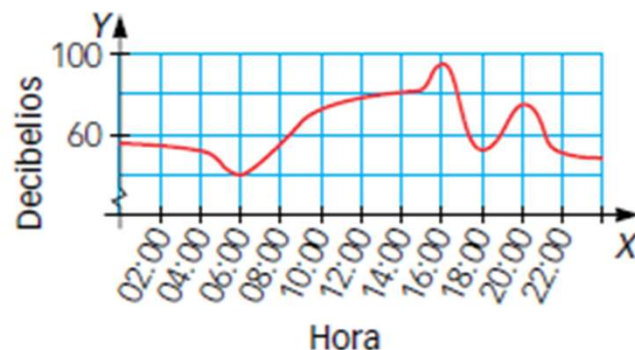
La temperatura mínima, 1 °C, se alcanzó a las 6:00 h de la madrugada.

Valor de y para $x = 6$

Valor de y para $x = 14$

4. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

- 28 Esta gráfica muestra la evolución del ruido, medido en decibelios, en una calle a lo largo de un día.



- a) ¿En qué intervalos de tiempo crece el ruido? ¿En cuáles disminuye?
- b) ¿Cuál es el momento más ruidoso del día? ¿Y el más silencioso?
- c) ¿Por qué crees que hay más ruido a unas horas que a otras? Da una posible explicación a la gráfica.

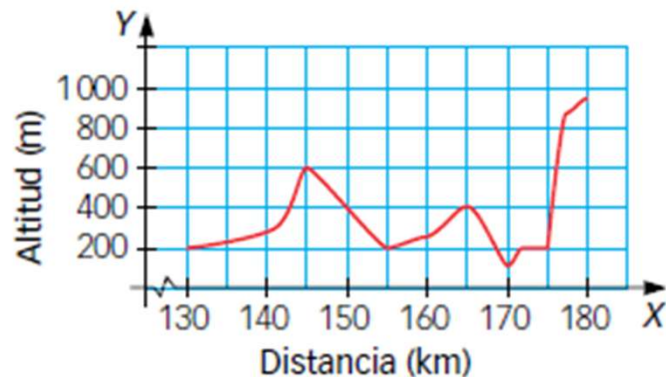
- a) Crece el ruido de 06:00 a 16:00 y de 18:00 a 20:00.

Disminuye el ruido de 00:00 a 06:00, de 16:00 a 18:00 y a partir de las 20:00.

- b) El más ruidoso tiene lugar a las 16:00 y el más silencioso a las 06:00.
- c) Respuesta abierta. Por ejemplo: Porque en dichos intervalos se da más movimiento de personas en la calle, mientras que, por la noche, en general la gente genera menos ruido.

4. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

- 29 En esta gráfica se muestra el perfil de los últimos 50 km de una etapa de la Vuelta Ciclista.



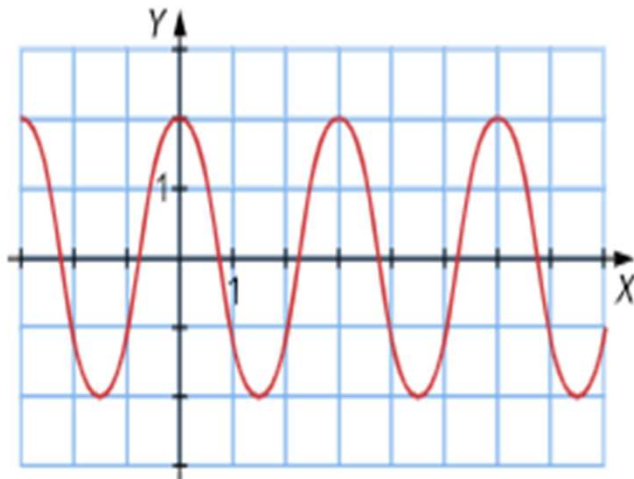
- a) Indica en qué intervalos la etapa es cuesta arriba, cuesta abajo y llana.
- b) ¿A cuántos picos ascenderán?
¿A qué altitud está el pico más alto?
- c) ¿A cuántos kilómetros está el punto más bajo por el que pasan? ¿Cuál es su altitud?
- a) Cuesta arriba entre los kilómetros 130 y 145; 155 y 165; 170 y 172; 175 y 185.
Cuesta abajo entre los kilómetros 145 y 155; 165 y 170.
Llano entre los kilómetros 172 y 175.
- b) Ascenderán a 3 picos. El pico más alto está a 1000 m.
- c) En el kilómetro 175 está el punto más bajo por el que pasan con una altitud de 100 metros aproximadamente.

5. Periodicidad y simetría.

5.1. Periodicidad

Una función es **periódica** si su gráfica se repite cada cierto intervalo, llamado **periodo**. Es decir, se cumple que:

$$f(x) = f(x + T) = f(x + 2T) = \dots, \text{ siendo } T \text{ el valor del periodo.}$$



La gráfica se repite en intervalos de longitud 3.

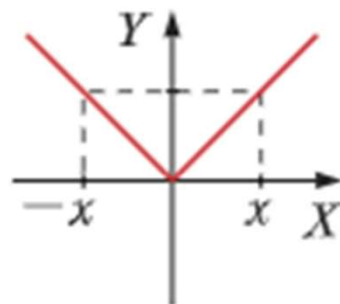
$$\text{Es decir: } f(x) = f(x + 3) = f(x + 2 \cdot 3) = \dots$$

Por tanto, la función es periódica y su periodo es $T = 3$.

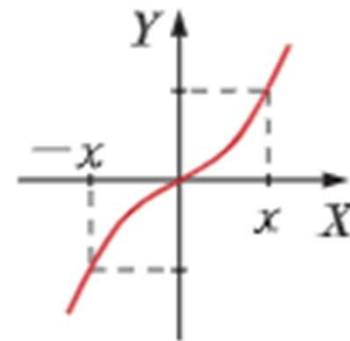
5. Periodicidad y simetría.**5.2. Simetría**

Una función es simétrica respecto del eje Y , o **función par**, cuando $f(-x) = f(x)$.

Una función es simétrica respecto del origen de coordenadas, o **función impar**, cuando $f(-x) = -f(x)$.



Función par



Función impar

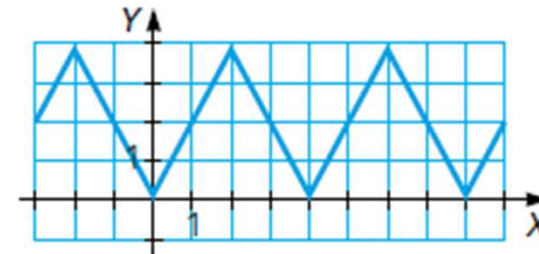
5. Periodicidad y simetría.

- 30 Dada la función $f(x) = \frac{1}{x}$, estudia las simetrías.

Se trata de una función impar:
$$f(-x) = -\frac{1}{x} = -f(x)$$

- 31 Dibuja la gráfica de una función de periodo 4.

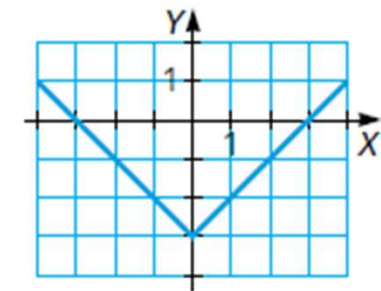
Por ejemplo:



- 32 Dibuja la gráfica de una función par de la que se sabe que $f(-2) = -1$ y $f(3) = 0$.

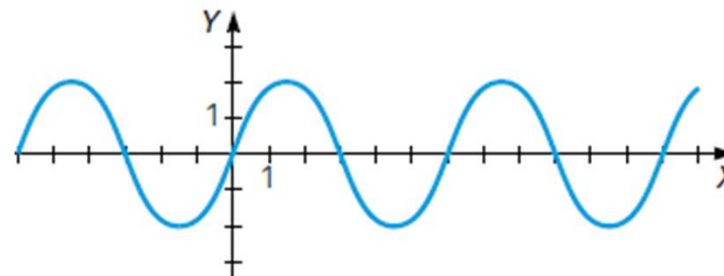
Respuesta abierta.

Por ejemplo:



- 33 **REFLEXIONA.** ¿Existe una función impar periódica?

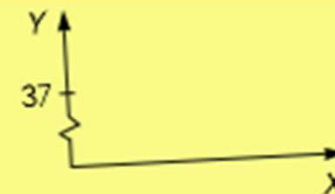
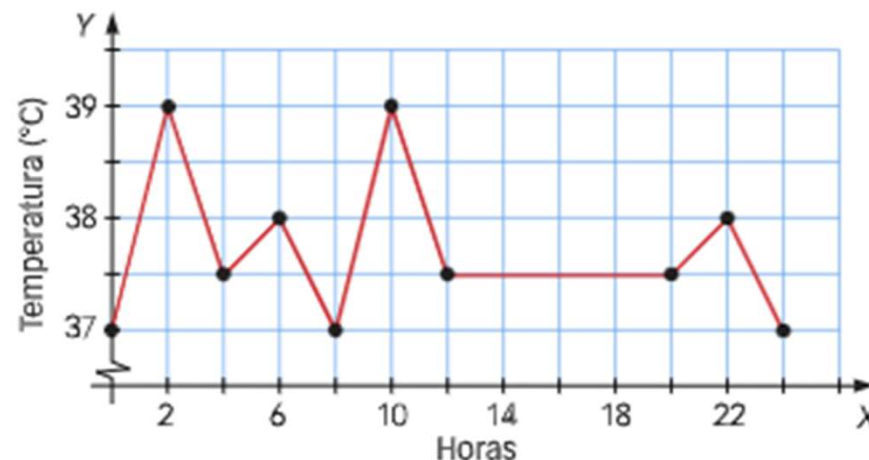
Sí. Por ejemplo:



5. Periodicidad y simetría.

Cómo se estudia una función

En un hospital se toma la temperatura de los enfermos cada 2 horas. Esta es la gráfica de la evolución de la temperatura de uno de los pacientes durante un día. Analiza su evolución.



Este quebrado significa que en el eje Y, debajo del 37, hay una parte del eje de la que hemos prescindido porque no tiene gráfica.

① Determinamos el dominio y el recorrido.

Dominio: en el eje X, las horas toman valores entre 0 y 24. $\rightarrow \text{Dom } f = [0, 24]$

Recorrido: en el eje Y, la temperatura toma valores entre 37 y 39. $\rightarrow \text{Im } f = [37, 39]$

② Calculamos los puntos de corte con los ejes.

Cortes con el eje X: la gráfica no corta al eje X.

Cortes con el eje Y: la gráfica corta al eje Y en 37 °C. $\rightarrow$ Punto de corte: (0, 37)

③ Analizamos el crecimiento y decrecimiento.

Crecimiento: es creciente en los intervalos (0, 2), (4, 6), (8, 10) y (20, 22).

Decrecimiento: es decreciente en los intervalos (2, 4), (6, 8), (10, 12) y (22, 24).

Constante: es constante en el intervalo (12, 20).

5. Periodicidad y simetría.

- ④ Identificamos los máximos y los mínimos.

La temperatura que tenía a las 2 horas. 

Máximos: En $x = 2 \rightarrow$ Punto $(2, 39)$
En $x = 6 \rightarrow$ Punto $(6, 38)$
En $x = 10 \rightarrow$ Punto $(10, 39)$
En $x = 22 \rightarrow$ Punto $(22, 38)$

La temperatura que tenía a las 6 horas. 

Mínimos: En $x = 4 \rightarrow$ Punto $(4, 37,5)$
En $x = 8 \rightarrow$ Punto $(8, 37)$
En $x = 24 \rightarrow$ Punto $(24, 37)$

La temperatura que tenía a las 24 horas. 

- ⑤ Vemos si es periódica.

La función no es periódica, no se repite por tramos.

- ⑥ Decidimos si la función presenta simetrías.

La función solo existe en el primer cuadrante; por lo tanto, no puede tener ninguna simetría.

- ⑦ Interpretamos los resultados obtenidos.

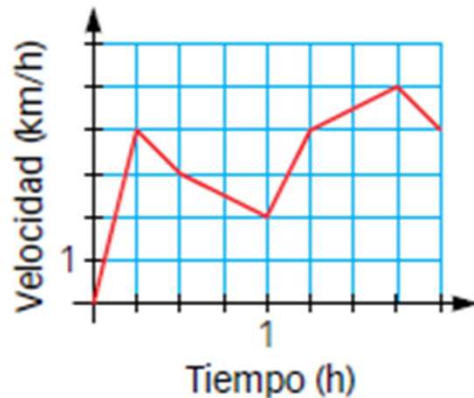
Se ha medido la temperatura del paciente desde las 0 h hasta las 24 h, y durante ese tiempo se ha mantenido entre los 37 °C y los 39 °C.

Su temperatura ha tenido altibajos durante gran parte del día y solo se ha mantenido constante entre las 12 h y las 20 h.

Ha alcanzado sus picos máximos, los 39 °C, a las 2 de la madrugada y a las 10 de la mañana, y los mínimos, 37 °C, a las 8 de la mañana y a las 24 h.

5. Periodicidad y simetría.

- 34 La siguiente gráfica muestra la velocidad que ha llevado Julia durante una media maratón. Analiza su evolución durante la carrera.



Hay dos máximos durante su carrera: en el minuto 15 y en el minuto 105. Alcanzó su máxima velocidad en el minuto 105.

Julia corrió durante dos horas (dominio) y su velocidad varió de 0 a 5 km/h (recorrido).

Su velocidad fue en aumento desde que comenzó hasta el minuto 15 y del minuto 60 al minuto 105.

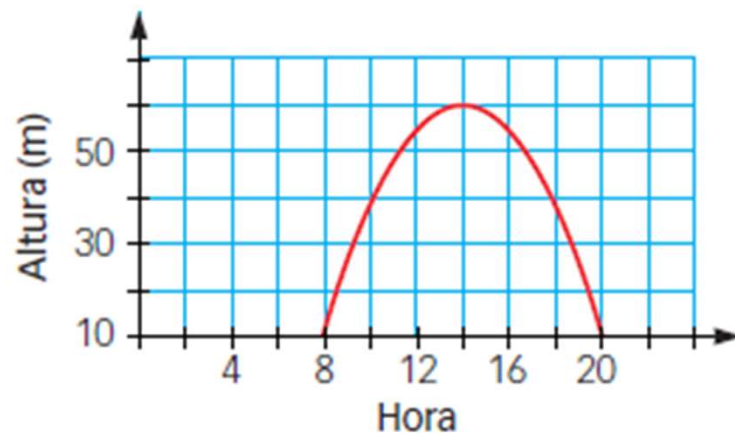
Su velocidad disminuyó del minuto 15 al minuto 60 y del minuto 105 al minuto 120.

El mínimo de velocidad lo obtuvo en el minuto 60.

No se trata ni de una función periódica ni simétrica.

5. Periodicidad y simetría.

- 35 La gráfica muestra la altura del sol sobre el horizonte el día 1 de octubre. Estudia la función.



El Sol salió a las 08:00 y se puso a las 20:00, y la altura que asciende sobre el horizonte varía de los 10 a los 60 metros.

El sol asciende desde las 08:00 hasta las 14:00 y es aquí donde alcanza su máxima altura con 60 metros, para luego comenzar a descender hasta las 20:00.

La función es simétrica respecto de la recta $x = 14$.