

Tema 6

ECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES

Índice

1. Ecuacións de primeiro grao.
2. Ecuacións de segundo grao.
 - 2.1 Ecuacións de segundo grao incompletas.
 - 2.2 Ecuacións de segundo grao completas.
3. Outros tipos de ecuacións.
 - 3.1 Ecuacións bicadradas.
 - 3.2 Ecuacións factorizadas.
4. Resolución de problemas mediante ecuacións.
5. Ecuacións lineais.
6. Sistemas de ecuacións lineais.
7. Métodos de resolucións de sistemas.
 - 7.1 Método de substitución.
 - 7.2 Método de igualación.
 - 7.1 Método de redución.
8. Resolución de problemas mediante sistemas.

1. Ecuaciones de primeiro grao.

Una ecuación de primer grado es una igualdad algebraica que se puede expresar de la forma $ax + b = 0$, siendo a y b números reales y $a \neq 0$.

Esta ecuación tiene solución única: $x = -\frac{b}{a}$.

Transposición de términos

- **Regla de la suma.** Si a los dos miembros de una ecuación les sumamos o restamos un mismo número, o la misma expresión algebraica, se obtiene otra ecuación equivalente a la dada.
- **Regla del producto.** Si multiplicamos o dividimos los dos miembros de una ecuación por un mismo número distinto de cero, se obtiene otra ecuación equivalente.

1. Ecuaciones de primeiro grao.

En la práctica podemos resumir la transposición de términos en estas dos reglas:

- Si un término está sumando en un miembro, pasa restando al otro; y si está restando, pasa sumando.
- Si está multiplicando en un miembro, pasa al otro dividiendo; y si está dividiendo, pasa multiplicando.

1 Utiliza la transposición de términos y resuelve.

a) $6x + 5 = 5x - 4$

d) $6x + 5 = 2x - 7$

b) $3x - 3 = x + 7$

e) $8x + 3 = -x + 4$

c) $6 - x = 2 + 3x$

f) $x - 5 = 3 - 2x$

a) $x = -9$

b) $2x = 10 \rightarrow x = 5$

c) $-4x = -4 \rightarrow x = 1$

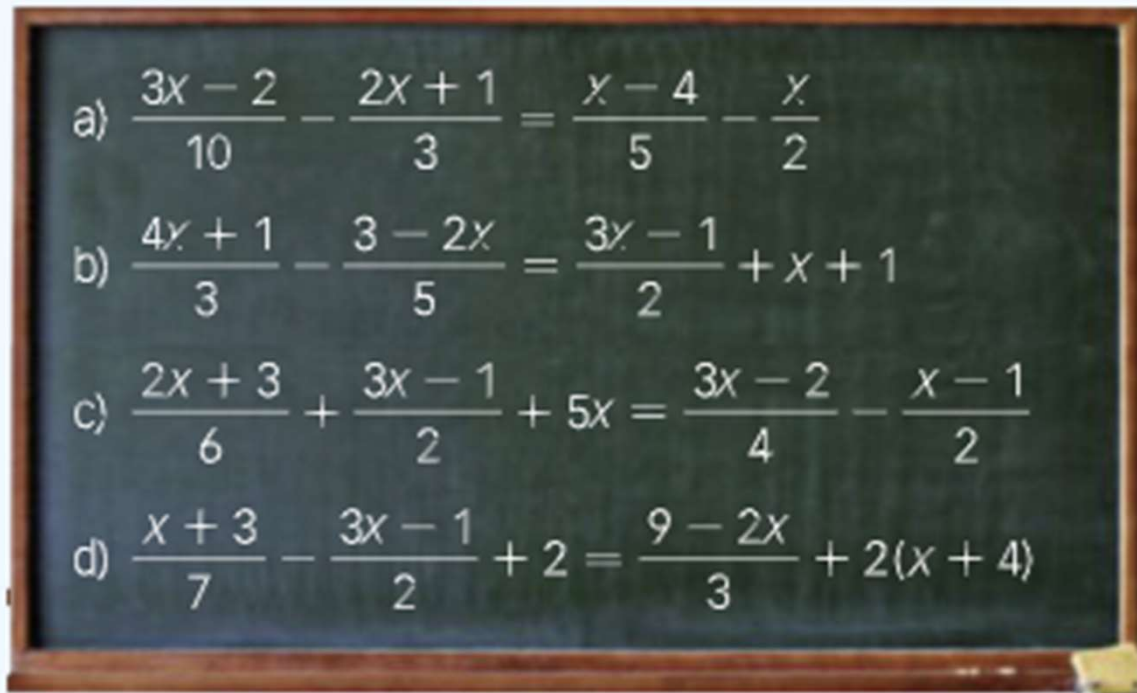
d) $4x = -12 \rightarrow x = -3$

e) $9x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{9}$

f) $3x = 8 \rightarrow x = \frac{8}{3}$

1. Ecuaciones de primeiro grao.

7 Halla la solución de estas ecuaciones.



a) $\frac{3x-2}{10} - \frac{2x+1}{3} = \frac{x-4}{5} - \frac{x}{2}$

b) $\frac{4x+1}{3} - \frac{3-2x}{5} = \frac{3x-1}{2} + x + 1$

c) $\frac{2x+3}{6} + \frac{3x-1}{2} + 5x = \frac{3x-2}{4} - \frac{x-1}{2}$

d) $\frac{x+3}{7} - \frac{3x-1}{2} + 2 = \frac{9-2x}{3} + 2(x+4)$

a) $3(3x-2) - 10(2x+1) =$
 $= 6(x-4) - 15x \rightarrow -11x + 9x =$
 $= -24 + 16 \rightarrow x = 4$

b) $10(4x+1) - 6(3-2x) =$
 $= 15(3x-1) + 30x + 30 \rightarrow$
 $\rightarrow 52x - 75x = 15 + 8 \rightarrow x = -1$

c) $2(2x+3) + 6(3x-1) + 60x =$
 $= 3(3x-2) - 6(x-1) \rightarrow$
 $\rightarrow 4x + 18x + 60x - 9x + 6x = 0 \rightarrow$
 $\rightarrow x = \frac{0}{79} = 0$

d) $6(x+3) - 21(3x-1) + 84 =$
 $= 14(9-2x) + 84x + 336 \rightarrow$
 $\rightarrow -57x - 56x = 462 - 123 \rightarrow$
 $\rightarrow x = -\frac{339}{113} = -3$

2. Ecuaciones de segundo grado.

Una **ecuación de segundo grado con una incógnita** es una igualdad algebraica que se puede expresar de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, siendo a , b y c números reales y $a \neq 0$.

Si b y c son números distintos de cero, la ecuación es **completa**.
Y si b o c es igual a cero, decimos que la ecuación es **incompleta**.

2.1. Ecuaciones de segundo grado completas

Para obtener las soluciones de una ecuación de segundo grado completa usamos la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (\text{fórmula general})$$

2. Ecuaciones de segundo grado.

- 8 Identifica los valores de los coeficientes a , b y c y resuelve las ecuaciones de segundo grado.

a) $x^2 - 8x + 15 = 0$

b) $x^2 - 3x - 28 = 0$

c) $x^2 - 10x + 9 = 0$

d) $x^2 + 8x + 15 = 0$

e) $x^2 - x - 42 = 0$

f) $x^2 - x - 12 = 0$

g) $2x^2 - 5x + 2 = 0$

h) $3x^2 + 2x - 1 = 0$

i) $5x^2 + 24x - 5 = 0$

j) $6x^2 + 5x + 1 = 0$

a) $a = 1, b = -8, c = 15 \rightarrow$
 $\rightarrow x_1 = 5, x_2 = 3$

b) $a = 1, b = -3, c = -28 \rightarrow$
 $\rightarrow x_1 = 7, x_2 = -4$

c) $a = 1, b = -10, c = 9 \rightarrow$
 $\rightarrow x_1 = 9, x_2 = 1$

d) $a = 1, b = 8, c = 15 \rightarrow$
 $\rightarrow x_1 = -3, x_2 = -5$

e) $a = 1, b = -1, c = -42 \rightarrow$
 $\rightarrow x_1 = 7, x_2 = -6$

f) $a = 1, b = -1, c = -12 \rightarrow$
 $\rightarrow x_1 = -3, x_2 = 4$

g) $a = 2, b = -5, c = 2 \rightarrow$
 $\rightarrow x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2}$

h) $a = 3, b = 2, c = -1 \rightarrow$
 $\rightarrow x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{3}$

i) $a = 5, b = 24, c = -5 \rightarrow$
 $\rightarrow x_1 = \frac{1}{5}, x_2 = -5$

j) $a = 6, b = 5, c = 1 \rightarrow$
 $\rightarrow x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = -\frac{1}{2}$

2. Ecuaciones de segundo grado.

Cómo se averigua el número de soluciones de una ecuación de segundo grado

① Determinamos los coeficientes a , b y c de la ecuación y calculamos el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$.

② Analizamos el signo del discriminante.

- Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene dos soluciones distintas.

- Si $\Delta = 0$, la ecuación solo tiene una solución (solución doble).

- Si $\Delta < 0$, la ecuación no tiene solución.

12 Calcula.

a) El valor de a para que la ecuación $ax^2 + 2x - 3 = 0$ tenga como solución $x = 1$.

b) El valor de b para que la ecuación $x^2 - bx + 6 = 0$ tenga como solución $x = 2$.

c) El valor de c para que la ecuación $-x^2 + x + c = 0$ tenga como solución $x = -1$.

¿Cuál es la otra solución en cada ecuación?

2. Ecuaciones de segundo grado.

a) $a \cdot 1 + 2 - 3 = 0 \rightarrow a = 1$

$x_2 = -3$

b) $4 - 2b + 6 = 0 \rightarrow b = 5 \quad x_2 = 3$

c) $-1 - 1 + c = 0 \rightarrow c = 2 \quad x_2 = 2$

- 14 Considera estas ecuaciones de segundo grado. ¿Cuántas soluciones tienen? Razona tu respuesta.

a) $ax^2 + ax + a = 0$

b) $ax^2 + 2ax + a = 0$

c) $ax^2 + ax - a = 0$

a) $\Delta = a^2 - 4 \cdot a \cdot a = a^2(-3) < 0 \rightarrow$
 $\rightarrow$ Si $a = 0$ es una igualdad, no una ecuación, y no tiene solución si $a \neq 0$.

b) $\Delta = 4a^2 - 4 \cdot a \cdot a = a^2 \cdot 0 = 0 \rightarrow$
 $\rightarrow$ Si $a = 0$, tiene infinitas soluciones.
Si $a \neq 0$, tiene una única solución.

c) $\Delta = a^2 - 4 \cdot a \cdot (-a) = a^2 \cdot 5 > 0 \rightarrow$
 $\rightarrow$ Si $a = 0$, tiene infinitas soluciones.
Si $a \neq 0$, tiene dos soluciones.

2. Ecuaciones de segundo grado.

2.2. Ecuaciones de segundo grado incompletas

CASO 1. Si $b = 0$. Ecuaciones del tipo $ax^2 + c = 0$.

- Si $-\frac{c}{a}$ es positivo, hay dos soluciones: $x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$.
- Si $-\frac{c}{a}$ es negativo, no tienen solución.

CASO 2. Si $c = 0$. Ecuaciones del tipo $ax^2 + bx = 0$.

- Tienen dos soluciones: $x_1 = 0$ y $x_2 = -\frac{b}{a}$.

CASO 3. Si $b = 0$ y $c = 0$. Ecuaciones del tipo $ax^2 = 0$.

- Tienen una solución única: $x = 0$.

2. Ecuaciones de segundo grado.

17 Halla los valores de x que hacen ciertas las igualdades.

a) $2x(x + 1) = -x$

b) $(x + 1)(x - 1) = 8$

c) $x^2 + 2x = 3x^2 + x$

d) $2x(-x + 2) = x^2$

e) $-2x(x + 3) = -6x$

f) $(x + 2)(x - 2) = 21$

a) $2x^2 + 3x = 0 \rightarrow x(2x + 3) = 0 \rightarrow$
 $\rightarrow x_1 = 0, x_2 = -\frac{3}{2}$

b) $x^2 - 9 = 0 \rightarrow x_1 = 3, x_2 = -3$

c) $2x^2 - x = 0 \rightarrow x(2x - 1) = 0 \rightarrow$
 $\rightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}$

d) $-3x^2 + 4x = 0 \rightarrow x(-3x + 4) = 0 \rightarrow$
 $\rightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{4}{3}$

e) $-2x^2 = 0 \rightarrow x_1 = 0$

f) $x^2 - 25 = 0 \rightarrow x_1 = 5, x_2 = -5$

3. Otros tipos de ecuaciones.

3.1. Ecuaciones bicuadradas

Una ecuación bicuadrada es una igualdad algebraica que se puede expresar de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$, siendo a, b y c números reales y $a \neq 0$.

Para resolver ecuaciones de este tipo, sustituimos x^2 por otra variable, z , y resolvemos la ecuación $az^2 + bz + c = 0$ de segundo grado.

El número de soluciones de una ecuación bicuadrada puede ser 4, 3, 2, 1 o no tener solución, dependiendo del valor de su discriminante.

Una ecuación bicuadrada es una ecuación de grado 4 sin términos de grado 3 ni de grado 1.

3. Otros tipos de ecuaciones.

EJEMPLO

5. Resuelve la ecuación bicuadrada $x^4 - 7x^2 + 10 = 0$.

Realizamos el cambio $z = x^2$, por lo que $z^2 = x^4$.

$$x^4 - 7x^2 + 10 = 0 \xrightarrow{x^2 = z} z^2 - 7z + 10 = 0$$

$$z = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 5 \\ z_2 = 2 \end{cases}$$

Como $z = x^2$, tenemos que $x^2 = 5$ y $x^2 = 2$:

$$x^2 = 5 \rightarrow x = \pm \sqrt{5} \rightarrow x_1 = \sqrt{5}, x_2 = -\sqrt{5}$$

$$x^2 = 2 \rightarrow x = \pm \sqrt{2} \rightarrow x_3 = \sqrt{2}, x_4 = -\sqrt{2}$$

3. Otros tipos de ecuaciones.

22 Resuelve estas ecuaciones bicuadradas.

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

d) $x^4 + x^2 + 2 = 0$

b) $x^4 + 2x^2 - 8 = 0$

e) $9x^4 - 40x^2 + 16 = 0$

c) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

f) $x^4 - 18x^2 + 81 = 0$

a) $x^2 = t \rightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow t_1 = 1, t_2 = 4 \rightarrow$

$\rightarrow x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = 2$

b) $x^2 = t \rightarrow t^2 + 2t - 8 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow t_1 = -4, t_2 = 2 \rightarrow$

$\rightarrow x_1 = -\sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2}$

c) $x^2 = t \rightarrow 4t^2 - 5t + 1 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow t_1 = \frac{1}{4}, t_2 = 1 \rightarrow$

$\rightarrow x_1 = -1, x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = 1, x_4 = \frac{1}{2}$

d) Sin solución puesto que el miembro izquierdo es siempre positivo.

e) $x^2 = t \rightarrow 9t^2 - 40t + 16 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow t_1 = \frac{4}{9}, t_2 = 4 \rightarrow$

$\rightarrow x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = -2, x_3 = \frac{2}{3}, x_4 = 2$

f) $(x^2 - 9)^2 = 0 \rightarrow x_1 = 3, x_2 = -3$

3. Otros tipos de ecuaciones.

3.2. Ecuaciones factorizadas

Una **ecuación factorizada** es una ecuación cuyo primer miembro es una expresión algebraica escrita como un producto de factores y cuyo segundo miembro es cero. Se expresa como $P_1(x) \cdot P_2(x) \cdot \dots \cdot P_n(x) = 0$.

Para resolver estas ecuaciones se iguala cada factor a cero y se resuelven las ecuaciones resultantes.

EJEMPLO

6. Resuelve la siguiente ecuación: $x(x - 3)(x + 5) = 0$.

$$x = 0$$

$$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$$

$$x + 5 = 0 \rightarrow x = -5$$

Las soluciones son $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = -5$.

Cómo se resuelve una ecuación mediante factorización

Resuelve la ecuación $2x^4 - x^3 - x^2 - 2x = x^4 - 3x^3$.

3. Otros tipos de ecuaciones.

① Agrupamos todos los términos en uno de los miembros y operamos.

$$\begin{aligned} 2x^4 - x^3 - x^2 - 2x &= x^4 - 3x^3 \\ 2x^4 - x^4 - x^3 + 3x^3 - x^2 - 2x &= 0 \\ x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x &= 0 \end{aligned}$$

② Factorizamos el polinomio resultante.

Sacamos factor común a x .

$$x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x = x(x^3 + 2x^2 - x - 2)$$

Aplicamos la regla de Ruffini.

El término independiente es 2.
Div (2) = {1, -1, 2, -2}

-2	1	2	-1	-2
		-2	0	2
	1	0	-1	0

Divisor = $x + 2$

Cociente = $x^2 - 1$

Resto = 0 → División exacta

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x &= x(x^3 + 2x^2 - x - 2) = \\ &= x(x + 2)(x^2 - 1) = x(x + 2)(x + 1)(x - 1) \end{aligned}$$

Diferencia de cuadrados
 $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$

3. Otros tipos de ecuaciones.

- ③ Igualamos todos los factores a cero y resolvemos cada ecuación resultante.

Tenemos la ecuación factorizada:

$$x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x = x(x+2)(x+1)(x-1)$$

$$x(x+2)(x+1)(x-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x+2 = 0 \rightarrow x = -2 \\ x+1 = 0 \rightarrow x = -1 \\ x-1 = 0 \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

Las soluciones son $x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = -1, x_4 = 1$.

- 26 Resuelve las ecuaciones.

a) $x^3 + 2x^2 - 4x = 4 + x^2$

b) $x^4 - 3x^3 + 4x^2 = x^3$

c) $x^4 - 5x^3 + 3x = 5x^2 - 3x^3 - 3x$

d) $x^4 + 3x^3 = 20x^2 - x^4 - 3x^3$

e) $2x^3 + 6x^2 + 13x - 25 = x^3 - 3x^2 - 2x$

a) $(x-2)(x+2)(x+1) = 0 \rightarrow$
 $\rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = -1$

b) $x^2(x-2)^2 = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$

c) $x(x-1)(x+2)(x-3) = 0 \rightarrow$
 $\rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -2, x_4 = 3$

d) $x^2(x+5)(x-2) = 0 \rightarrow$
 $\rightarrow x_1 = 0, x_2 = -5, x_3 = 2$

e) $(x+5)^2(x-1) = 0 \rightarrow x_1 = -5, x_2 = 1$

3. Otros tipos de ecuaciones.

27 Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones.

a) $x^5 - 3x^3 + 2x = 0$

b) $9x^6 - 37x^4 + 4x^2 = 0$

c) $x^4 + 7x^3 + 15x^2 + 9x = 0$

d) $3x^4 - 16x^2 + x = 2x^4 + x$

e) $4x^5 + 8x^4 - 5x^3 = 10x^2 - x - 2$



a) $x(x^2 - 1)(x^2 - 2) = 0 \rightarrow x_1 = -1,$
 $x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = \sqrt{2}, x_5 = -\sqrt{2}$

b) $x^2(9x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0 \rightarrow x_1 = -2,$
 $x_2 = -\frac{1}{3}, x_3 = 0, x_4 = \frac{1}{3}, x_5 = 2$

c) $x(x + 1)(x + 3)^2 = 0 \rightarrow$
 $\rightarrow x_1 = -3, x_2 = -1, x_3 = 0$

d) $x^2(x^2 - 16) = 0 \rightarrow$
 $x_1 = -4, x_2 = 0, x_3 = 4$

e) $(2x - 1)(x - 1)(x + 1)(x + 2)(2x + 1) = 0 \rightarrow$
 $\rightarrow x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = 1,$
 $x_4 = -\frac{1}{2}, x_5 = \frac{1}{2}$

28 Explica por qué esta no es una ecuación factorizada. Después, factorízala y calcula sus soluciones.

$$(x + 1)(x + 2)(x + 3) - 5(x + 1)(x + 2) = 0$$

Porque no se ha sacado factor común.

$$(x + 1)(x + 2)(x + 3 - 5) =$$

$$= (x + 1)(x + 2)(x - 2) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x_1 = -1, x_2 = -2, x_3 = 2$$

4. Resolución de problemas mediante ecuaciones.

Para resolver un problema mediante una ecuación es necesario traducir su enunciado a lenguaje algebraico y encontrar la solución de la ecuación resultante comprobando después su validez.

31 REFLEXIONA. Escribe una ecuación que resuelva estos enunciados.

- a) La suma de dos números pares consecutivos es 26. ¿Cuáles son los números?
- b) La suma de tres números impares consecutivos es 39. ¿Cuáles son los números?

a) $2x + (2x + 2) = 26 \rightarrow 4x = 24 \rightarrow$
 $\rightarrow x = 6 \rightarrow$ Los números son 12 y 14.

b) $(2x - 1) + (2x + 1) + (2x + 3) =$
 $= 39 \rightarrow 6x + 3 = 39 \rightarrow x = 6 \rightarrow$
 $\rightarrow$ Los números son 11, 13 y 15.

4. Resolución de problemas mediante ecuaciones.

Cómo se resuelven problemas mediante ecuaciones

Resuelve estos problemas.

- a) Un bocadillo cuesta 1,20 € más que un refresco. Tres bocadillos y tres refrescos nos han costado 11,40 €. ¿Cuánto cuesta un refresco?
- b) Tomás tiene 2 años más que Pablo. El producto de sus edades es 35. ¿Cuántos años tiene Pablo?

① Identificamos la incógnita.

a)

Lo que sabemos	Lo que no sabemos
Un bocadillo cuesta 1,20 € más que un refresco.	Precio de un bocadillo
3 bocadillos y 3 refrescos cuestan 11,40 €.	Precio de un refresco

Precio de un refresco $\rightarrow x$

b)

Lo que sabemos	Lo que no sabemos
Tomás tiene 2 años más que Pablo.	Edad de Tomás
El producto de las edades de los dos es 35.	Edad de Pablo

Edad de Pablo $\rightarrow x$

Para averiguar x , contesta a la pregunta.

4. Resolución de problemas mediante ecuaciones.

- ② Traducimos el problema al lenguaje algebraico y planteamos la ecuación.

Precio de un refresco $\rightarrow x$

Un bocadillo cuesta 1,20 € más que un refresco.

Precio del bocadillo $\rightarrow x + 1,20$

3 bocadillos y 3 refrescos cuestan 11,40 €.

$$3 \cdot (x + 1,20) + 3 \cdot x = 11,40$$

Edad de Pablo $\rightarrow x$

Tomás tiene 2 años más que Pablo.

Edad de Tomás $\rightarrow x + 2$

El producto de las edades es 35.

$$x \cdot (x + 2) = 35$$

- ③ Resolvemos la ecuación.

$$3x + 3,6 + 3x = 11,4$$

$$3x + 3x = 11,4 - 3,6$$

$$6x = 7,8 \rightarrow x = \frac{7,8}{6} = 1,3$$

$$x^2 + 2x = 35$$

$$x^2 + 2x - 35 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 + 140}}{2} = \frac{-2 \pm 12}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -7 \end{cases}$$

- ④ Comprobamos e interpretamos la solución.

$$3(x + 1,2) + 3x = 11,4$$

$$\downarrow x = 1,3$$

$$3 \cdot (1,3 + 1,2) + 3 \cdot 1,3 = 11,4$$

$$11,4 = 11,4$$

La solución es correcta.

Un refresco vale 1,30 € y un bocadillo

$$1,30 + 1,20 = 2,50 \text{ €}.$$

$$x(x + 2) = 35 \xrightarrow{x=5} 5 \cdot (5 + 2) = 35 \rightarrow 35 = 35$$

$$x(x + 2) = 35 \xrightarrow{x=-7} (-7) \cdot (-7 + 2) = 35 \rightarrow 35 = 35$$

Las soluciones son correctas.

Sin embargo, como la edad de una persona no puede ser negativa, la única solución válida es:

Pablo tiene 5 años y Tomás $5 + 2 = 7$ años.

4. Resolución de problemas mediante ecuaciones.

- 32 Gerardo gasta en una entrada de cine las $\frac{2}{5}$ partes de su paga. Después, gasta una tercera parte de lo que le queda en palomitas y con una sexta parte del resto compra una papeleta para la rifa escolar. Al final le quedan 5 €. ¿Cuál es su paga semanal?

Entrada de cine: $\frac{2}{5}x$ €

Palomitas: $\frac{1}{3} \cdot \left(x - \frac{2}{5}x\right) = \frac{3}{15}x$ €

Papeleta para la rifa:

$$\frac{1}{6} \cdot \left(x - \frac{2}{5}x - \frac{3}{15}x\right) = \frac{1}{15}x$$

$$x - \frac{2}{5}x - \frac{3}{15}x - \frac{1}{15}x = 5 \rightarrow x = 15$$

Su paga semanal es de 15 €.

- 33 El producto de un número y su doble es 72. ¿Cuál es ese número?

$$x \cdot 2x = 72 \rightarrow 2x^2 = 72 \rightarrow x = \pm 6$$

El número puede ser 6 o -6.

- 34 El volumen de una caja es de $20,25 \text{ dm}^3$. ¿Cuáles son sus dimensiones si el largo es el triple que el alto y el ancho es el doble que el alto?

Sea x el alto de la caja.

$$x \cdot 2x \cdot 3x = 20,25 \rightarrow 6x^3 = 20,25 \rightarrow x = \sqrt[3]{3,375} = 1,5$$

Alto: 1,5 dm Largo: 4,5 dm Ancho: 3 dm

5. Ecuaciones lineais.

Una ecuación lineal con dos incógnitas es una ecuación de primer grado que se puede expresar de la forma $ax + by = c$, donde x e y son las incógnitas y a , b y c son números reales.

Los coeficientes de x e y son a y b , y el término independiente es c .

EJEMPLO

1. Di qué ecuaciones son lineales y determina sus incógnitas.

a) $2x = 5y - 3 \rightarrow 2x - 5y = -3 \rightarrow$ Ecuación lineal con dos incógnitas: x, y .

b) $2x^3 = -2y + 1 \rightarrow$ No es lineal, porque es de grado 3.

c) $\frac{2}{x} - 3y = 5 \rightarrow$ No es lineal, porque tiene incógnitas en el denominador.

d) $2x - 3 = 4 \rightarrow 2x = 7 \rightarrow$ Ecuación lineal con una incógnita: x .

Solución de una ecuación lineal

Una solución de una ecuación lineal con dos incógnitas es un par de valores, uno para cada incógnita, que hacen cierta la igualdad.

Una ecuación lineal con dos incógnitas tiene infinitas soluciones.

5. Ecuaciones lineais.

Las soluciones de una ecuación lineal con dos incógnitas se pueden expresar como puntos del plano.

$x = 0, y = 1$ es solución de la ecuación $x + y = 1$.
 $0 + 1 = 1 \rightarrow 1 = 1$

La solución $x = 0, y = 1$ se puede expresar como $(0, 1)$.

Cómo se representan gráficamente las soluciones de una ecuación lineal

Representa gráficamente las soluciones de $-2x + y = 1$.

① Despejamos una de las incógnitas.

$$y = 2x + 1$$

② Damos valores a la otra incógnita y obtenemos el valor de la incógnita despejada.

Si $x = -1$	$\rightarrow y = 2 \cdot (-1) + 1 = -1$	$\rightarrow x = -1, y = -1$
Si $x = 0$	$\rightarrow y = 2 \cdot 0 + 1 = 1$	$\rightarrow x = 0, y = 1$
Si $x = 1$	$\rightarrow y = 2 \cdot 1 + 1 = 3$	$\rightarrow x = 1, y = 3$
Si $x = 2$	$\rightarrow y = 2 \cdot 2 + 1 = 5$	$\rightarrow x = 2, y = 5$

Estos pares de valores son soluciones de la ecuación.

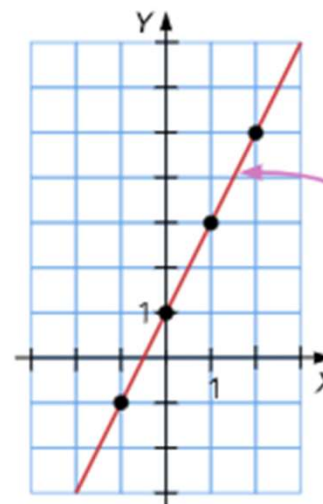
5. Ecuaciones lineais.

- ③ Elaboramos una tabla de valores con las soluciones obtenidas.

x	-1	0	1	2
y	-1	1	3	5

- ④ Consideramos las soluciones como puntos del plano y los representamos.

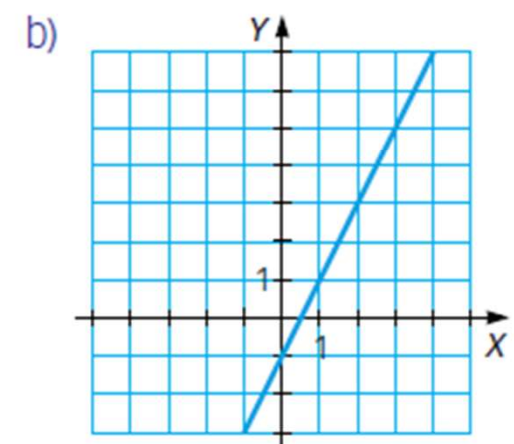
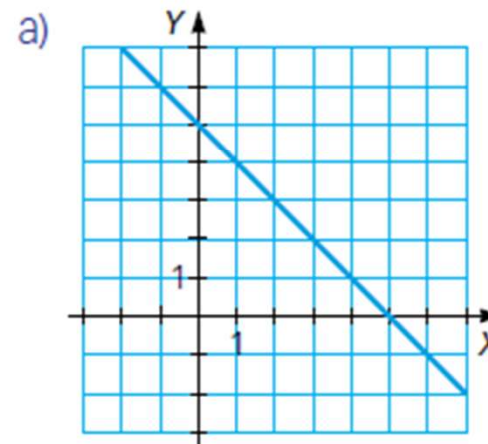
- ⑤ Unimos los puntos formando una recta.



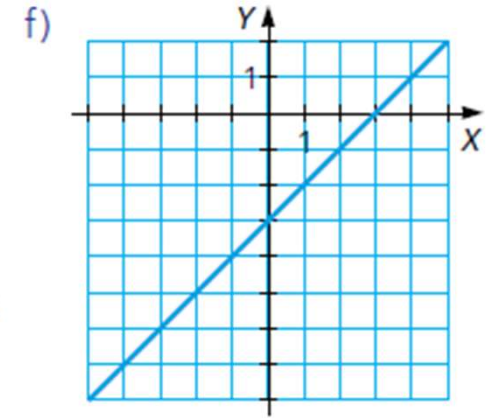
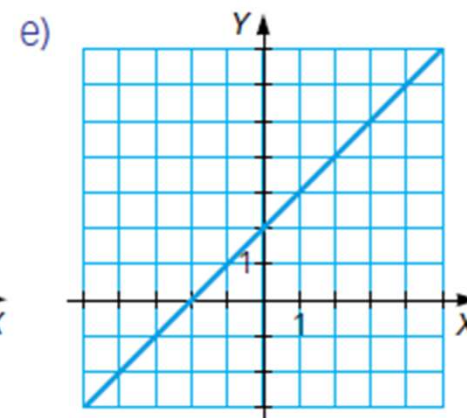
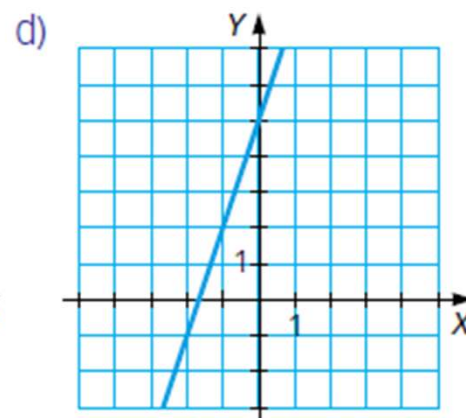
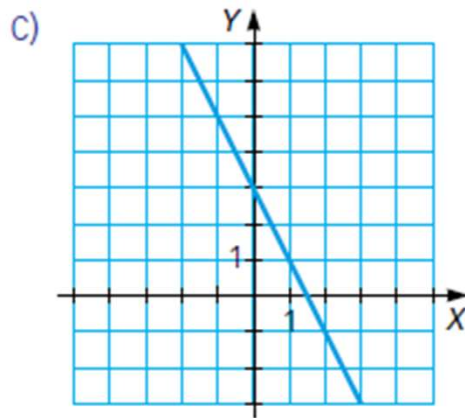
La línea recta está formada por las infinitas soluciones de la ecuación.

- ⑥ Representa las soluciones de estas ecuaciones.

- a) $x + y = 5$
- b) $2x - y = 1$
- c) $2x + y = 3$
- d) $3x = y - 5$
- e) $2(x - y) + 4 = 0$
- f) $-3(x - 2) + 3y = -3$



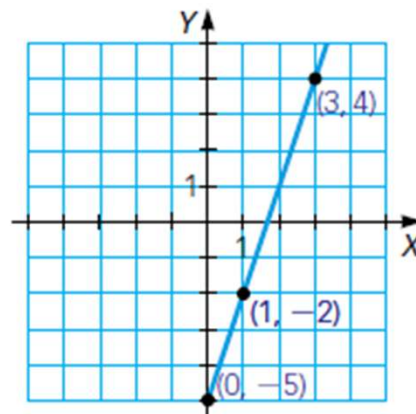
5. Ecuaciones lineales.



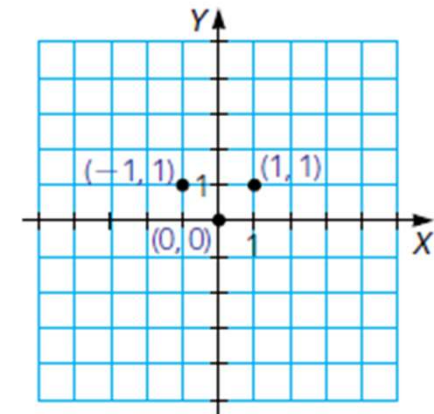
7 Razona si los siguientes puntos pueden ser soluciones de una ecuación lineal.

- a) $(0, -5)$, $(1, -2)$ y $(3, 4)$
- b) $(-1, 1)$, $(0, 0)$ y $(1, 1)$
- c) $(1, 2)$, $(3, 6)$ y $(5, 7)$
- d) $(-4, 1)$, $(0, -1)$ y $(4, -3)$

a) Sí, porque los tres puntos forman una recta.

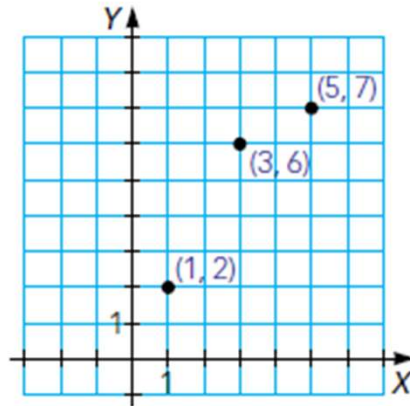


b) No, porque los puntos no están alineados.

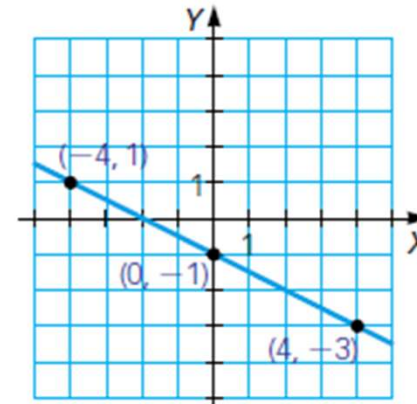


5. Ecuaciones lineais.

c) No, porque los puntos no están alineados.



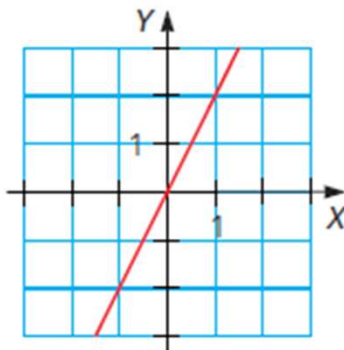
d) Sí, porque los tres puntos forman una recta.



- 8 Considera el punto $(a, a + 1)$. Indica el valor de a para que sea solución de la ecuación $2x - y = 3$.

$$2a = (a + 1) = 3 \rightarrow a = 4$$

- 10 Elabora una tabla de valores con tres puntos de esta recta. Después, indica de qué ecuación son las soluciones representadas y contesta.



- a) ¿Qué valor de y corresponde a $x = 6$?
b) ¿Qué valor de x corresponde a $y = 18$?

x	-1	0	1
y	-2	0	2

La ecuación es $y = 2x$.

a) $y = 12$

b) $x = 9$

6. Sistemas de ecuaciones lineales.

Dos ecuaciones lineales de las que se busca una solución común forman un sistema de ecuaciones lineales.

Una **solución** de ese sistema es cualquier par de números que hace ciertas las dos ecuaciones a la vez. **Resolver un sistema** es encontrar sus soluciones.

$$\left. \begin{array}{l} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array} \right\}$$

Número de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales

Los sistemas de ecuaciones, según su número de soluciones, se pueden clasificar en:

- **Sistemas compatibles determinados.** Tienen una única solución. La representación gráfica del sistema son rectas que se cortan en un solo punto.
- **Sistemas compatibles indeterminados.** Tienen infinitas soluciones. La representación gráfica son rectas que coinciden.
- **Sistemas incompatibles.** No tienen solución. La representación gráfica del sistema son rectas paralelas.

6. Sistemas de ecuaciones lineais.

- 12 Halla el valor de a y b para que el par $(3, -1)$ sea solución del sistema.

$$\begin{cases} ax + y = 5 \\ -3x + by = -5 \end{cases}$$

$$3a - 1 = 5 \rightarrow a = 2$$

$$-9 - b = -5 \rightarrow b = -4$$

- 14 Representa los siguientes sistemas e indica el número de soluciones.

a) $\begin{cases} 3x + 3y = 15 \\ -x + 7y = -5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x - 6y = 12 \\ -2x + 5y = -4 \end{cases}$

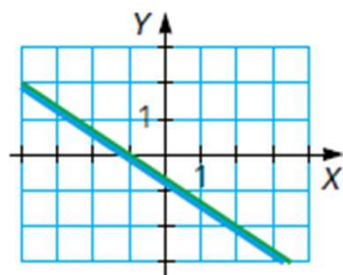
b) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ -6x + 2y = 14 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4x + 6y = -4 \\ -6x - 9y = 6 \end{cases}$

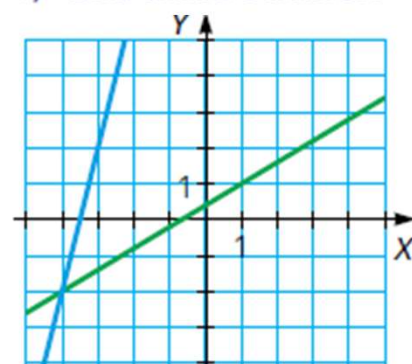
c) $\begin{cases} -2x + y = -2 \\ -2x + y = 8 \end{cases}$

f) $\begin{cases} -3x + 5y = 2 \\ -4x + y = 14 \end{cases}$

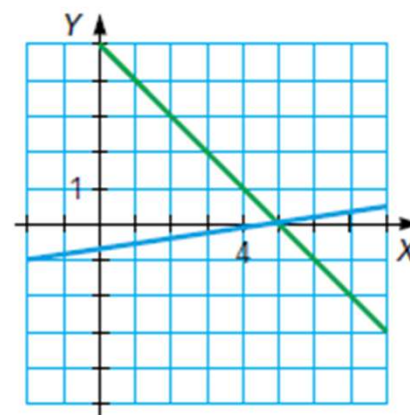
e) Infinitas soluciones



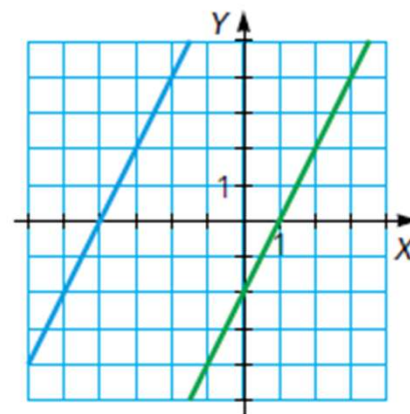
f) Una única solución



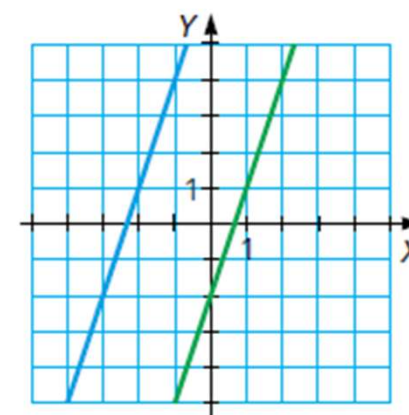
a) Una única solución



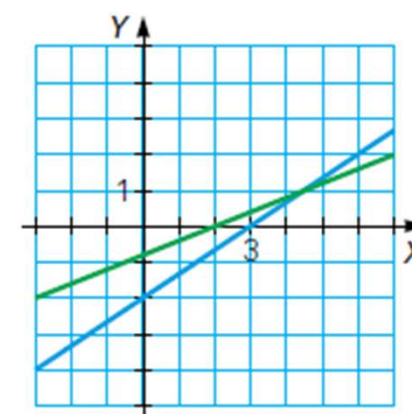
c) Ninguna solución



b) Ninguna solución



d) Una única solución



7. Métodos de resoluciones de sistemas.

3.1. Método de sustitución

Resolver un sistema por el **método de sustitución** consiste en despejar una incógnita en una de las ecuaciones y sustituir su valor en la otra ecuación.

EJEMPLO

4. Resuelve este sistema por sustitución y comprueba la solución.

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ -3x + 4y = 9 \end{cases}$$

- Despejamos una de las incógnitas.

Preferiblemente se despeja aquella que tenga coeficiente 1 o -1 para evitar trabajar con denominadores.

En este caso, despejamos y en la primera ecuación:

$$2x + y = 5 \rightarrow y = 5 - 2x$$

- Sustituimos el valor obtenido en la otra ecuación:

$$-3x + 4y = 9 \xrightarrow{y = 5 - 2x} -3x + 4(5 - 2x) = 9$$

- Resolvemos la ecuación que resulta.

$$-3x + 4(5 - 2x) = 9$$

$$-3x + 20 - 8x = 9$$

$$-11x = -11 \rightarrow x = 1$$

- Calculamos el valor de la otra incógnita, sustituyendo el valor obtenido en la ecuación con la incógnita ya despejada.

$$y = 5 - 2x \xrightarrow{x = 1} y = 5 - 2 \cdot 1 = 3$$

7. Métodos de resoluciones de sistemas.

- Comprobamos que la solución obtenida es correcta, sustituyendo x e y en las ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 5 \\ -3x + 4y = 9 \end{array} \right\} \xrightarrow{x=1, y=3} \left. \begin{array}{l} 2 \cdot 1 + 3 = 5 \\ -3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = 9 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 5 = 5 \\ 9 = 9 \end{array} \right\}$$

Como obtenemos dos igualdades, la solución es $x = 1, y = 3$.

- 17** Opera y resuelve el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} -2(7 - x) - (x + 2y) = 8y - x \\ 2(x - 3) - 2y = -3(2y + 2) \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 10y = 14 \\ 2x + 4y = 0 \end{array} \right\} \rightarrow x = 2, y = -1$$

- 18 REFLEXIONA.** Resuelve por sustitución.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x+10}{3} = -y \\ \frac{y-2}{5} = x \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y = -10 \rightarrow x = -10 - 3y \\ -5x + y = 2 \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow -5(-10 - 3y) + y = 2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 16y = -48 \rightarrow y = -3, x = -1$$

7. Métodos de resoluciones de sistemas.

3.2. Método de igualación

Resolver un sistema por el **método de igualación** consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones e igualar sus valores.

EJEMPLO

5. Resuelve este sistema por igualación.

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ -3x + 4y = 9 \end{cases}$$

- Despejamos una de las incógnitas de ambas ecuaciones. Elegimos la incógnita que vaya a dar una expresión más sencilla.

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ -3x + 4y = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 5 - 2x \\ y = \frac{9 + 3x}{4} \end{cases}$$

7. Métodos de resoluciones de sistemas.

- Como ambas expresiones representan el mismo valor, igualamos las dos expresiones obtenidas.

$$5 - 2x = \frac{9 + 3x}{4}$$

- Resolvemos la ecuación resultante.

$$5 - 2x = \frac{9 + 3x}{4}$$

$$4(5 - 2x) = 9 + 3x$$

$$20 - 8x = 9 + 3x$$

$$-8x - 3x = 9 - 20 \rightarrow -11x = -11 \rightarrow x = 1$$

- Calculamos el valor de la otra incógnita, sustituyendo el valor obtenido en cualquiera de las ecuaciones del sistema.

$$2x + y = 5 \xrightarrow{x=1} 2 \cdot 1 + y = 5 \rightarrow y = 3$$

Por tanto, la solución del sistema es $x = 1, y = 3$.

7. Métodos de resoluciones de sistemas.

- 20 Resuelve el siguiente sistema utilizando el método de igualación.

$$\begin{cases} 3x + 4y = 8 \\ 10 - 2y = 3x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{8 - 4y}{3} \\ x = \frac{10 - 2y}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases}$$

- 21 Escribe un sistema de ecuaciones lineales equivalente a

$$\begin{cases} -(4x - 2) + y = 6x + 3(y + 2x) \\ -2(x + y) = 4(y + 4) + 1 \end{cases}$$

que sea de la forma $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$.

Después, resuélvelo.

$$\begin{cases} -8x - y = -2 \\ -2x - 6y = 17 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{29}{46} \\ y = -\frac{70}{23} \end{cases}$$

- 22 **REFLEXIONA.** Resuelve el siguiente sistema por el método de igualación.

$$\begin{cases} \frac{2x - 4}{5} - \frac{y + 3}{2} = 3 \\ \frac{x + y}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 5y = 53 \\ x + y = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = -5 \end{cases}$$

7. Métodos de resoluciones de sistemas.

3.3. Método de reducción

Resolver un sistema por el **método de reducción** consiste en buscar otro sistema, con las mismas soluciones, en el que los coeficientes de una de las incógnitas tengan el mismo valor absoluto.

EJEMPLO

6. Resuelve este sistema por reducción.

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ -3x + 4y = 9 \end{cases}$$

- Igualamos los coeficientes de una de las incógnitas multiplicando todos los términos de una ecuación, o de las dos, por los números adecuados. Si multiplicamos la primera ecuación por 4, los coeficientes de y serán iguales en ambas ecuaciones.

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ -3x + 4y = 9 \end{cases} \xrightarrow{\cdot 4} \begin{cases} 8x + 4y = 20 \\ -3x + 4y = 9 \end{cases}$$

7. Métodos de resoluciones de sistemas.

- Sumamos o restamos las dos ecuaciones, según los coeficientes tengan distinto o igual signo para eliminar una incógnita.

$$\begin{array}{r} 8x + 4y = 20 \\ -3x + 4y = 9 \\ \hline 11x = 11 \end{array}$$

- Resolvemos la ecuación resultante.

$$11x = 11 \rightarrow x = 1$$

- Calculamos el valor de la otra incógnita sustituyendo en cualquiera de las ecuaciones del sistema.

$$2x + y = 5 \xrightarrow{x=1} 2 \cdot 1 + y = 5 \rightarrow y = 3$$

Por tanto, la solución del sistema es $x = 1, y = 3$.

7. Métodos de resoluciones de sistemas.

- 24 Resuelve este sistema por sustitución, igualación y reducción. ¿Qué método te parece más adecuado para resolverlo?

$$\begin{cases} 3 - 2y = 5x \\ 5x + 3y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5x - 2y = -3 \\ 5x + 3y = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases}$$

Es más adecuado por reducción.

- 25 Opera y resuelve este sistema.

$$\begin{cases} 2(3y - x) + y = 9 + 2y \\ 3(x + 1) - y = 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + 5y = 9 \\ x - y = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$$

- 26 **REFLEXIONA.** Resuelve por reducción.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2 \cdot (x + y) - y = 5 \\ a) \quad -2 \cdot (x + y) + \frac{4y}{3} = -4 \end{cases} \\ & \begin{cases} \frac{x - 2y}{2} + \frac{x}{4} = 0 \\ b) \quad -x + 5 \cdot \left(\frac{2x + y + 1}{6} \right) = 6 \end{cases} \end{aligned}$$

$$a) \quad \begin{cases} 2x + y = 5 \\ -6x - 2y = -12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6x + 3y = 15 \\ -6x - 2y = -12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$b) \quad \begin{cases} 3x - 4y = 0 \\ 4x + 5y = 31 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -12x + 16y = 0 \\ 12x + 15y = 93 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

7. Métodos de resoluciones de sistemas.

- 28 Resuelve los siguientes sistemas por el método que consideres más adecuado.

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} \frac{x+2y}{5} - 5 = 0 \\ \frac{x+2y}{5} - 4 = -\frac{y}{5} \end{array} \right\}$$

$$\text{b) } \left\{ \begin{array}{l} 4(x+2y) = 8+y \\ \frac{x+2y}{3} = 1 \end{array} \right\}$$

$$\text{c) } \left\{ \begin{array}{l} 2x - 2 = -3y \\ \frac{3(2x-2)}{2} - \frac{3(y+1)}{9} = -10 \end{array} \right\}$$

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} x + 2y = 25 \\ x + 3y = 20 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 35 \\ y = -5 \end{array} \right.$$

$$\text{b) } \left\{ \begin{array}{l} 4x + 7y = 8 \\ x + 2y = 3 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -5 \\ y = 4 \end{array} \right.$$

$$\text{c) } \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = 2 \\ 54x - 6y = -120 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -2 \\ y = 2 \end{array} \right.$$

8. Resolución de problemas mediante sistemas.

Resolver un problema mediante un sistema de ecuaciones consiste en traducir al lenguaje algebraico las condiciones de su enunciado y, después, encontrar la solución del problema mediante la resolución del sistema.

EJEMPLO

7. Expresa este enunciado mediante un sistema de ecuaciones.

La edad de un padre y la de su hija suman 77 años. Dentro de dos años, la edad del padre será el doble que la de su hija. ¿Qué edades tienen ahora?

Lo que sabemos	Lo que no sabemos
La suma de las edades es 77. Dentro de 2 años, la edad del padre será el doble que la de la hija.	La edad del padre. La edad de la hija.

8. Resolución de problemas mediante sistemas.

A los datos desconocidos los llamamos x e y .

$x \rightarrow$ Edad del padre

$y \rightarrow$ Edad de la hija

La edad de un padre y la edad de su hija suman 77 años.

$$\underbrace{x}_{\text{edad del padre}} + \underbrace{y}_{\text{edad de la hija}} = 77$$

Dentro de dos años. $\rightarrow$ Edad del padre $= x + 2$

Edad de la hija $= y + 2$

Dentro de dos años, la edad del padre será el doble que la de su hija.

$$\underbrace{x + 2}_{\text{edad del padre}} = \underbrace{2 \cdot (y + 2)}_{\text{doble de la edad de la hija}}$$

La traducción al lenguaje algebraico de este problema es el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 77 \\ x + 2 = 2(y + 2) \end{array} \right\}$$

Resolviendo este sistema obtenemos la edad del padre, x ,
y la edad de la hija, y .

8. Resolución de problemas mediante sistemas.

- 32 Carlota tiene el triple de monedas de 1 € que de 2 €. En total tiene 10 euros. Expresa el problema mediante un sistema de ecuaciones.

$$\begin{array}{l} x \rightarrow \text{monedas de 1 €} \\ y \rightarrow \text{monedas de 2 €} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} x = 3y \\ x + 2y = 10 \end{array} \right\}$$

- 33 **REFLEXIONA.** En una reunión, si cada persona come 5 pasteles, sobran 3; pero si comen 6, falta 1. ¿Cuántas personas y pasteles hay?

$$x \rightarrow \text{n.º de pasteles} \quad y \rightarrow \text{n.º de personas}$$

$$\left. \begin{array}{l} x - 5y = 3 \\ x - 6y = -1 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 23 \\ y = 4 \end{array} \right.$$

Hay 4 personas y 23 pasteles.

- 34 Un club de alpinistas tiene 120 miembros. Los mayores de 25 años pagan una cuota anual de 22 € y el resto paga 8 €. Con las cuotas anuales recaudan 1982 €. ¿Cuántos miembros mayores de 25 años hay?

$$\begin{array}{l} x \rightarrow \text{n.º de miembros mayores de 25 años} \\ y \rightarrow \text{n.º de miembros menores de 25 años} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 120 \\ 22x + 8y = 1982 \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow x \cdot 22 + (120 - x) \cdot 8 = 1982 \rightarrow$$

$$\rightarrow 14x = 1022 \rightarrow x = 73, y = 47$$

Hay 73 miembros mayores de 25 años.

8. Resolución de problemas mediante sistemas.

- 35 Las edades de una madre y su hija suman 56 años. Dentro de dos años, la madre tendrá el triple de la edad de su hija. ¿Cuántos años tenía la madre cuando nació su hija?

$x \rightarrow$ edad de la madre $y \rightarrow$ edad de la hija

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 56 \\ 2 + x = 3(2 + y) \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 56 \\ x - 3y = 4 \end{array} \right\} \rightarrow$$
$$\rightarrow \begin{cases} x = 43 \\ y = 13 \end{cases}$$

$$43 - 13 = 30$$

La madre tenía 30 años cuando nació su hija.

- 36 En una frutería, un cliente paga 6,25 € por 2,5 kg de manzanas y 2 kg de peras. Otra clienta paga 5,75 € por 3 kg de manzanas y 1 kg de peras. ¿Cuánto cuesta un kilo de cada fruta?

$x \rightarrow$ precio del kg de manzanas

$y \rightarrow$ precio del kg de peras

$$\left. \begin{array}{l} 2,5x + 2y = 6,25 \\ 3x + y = 5,75 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = 1,5 \\ y = 1,25 \end{cases}$$

Un kilo de manzanas cuesta 1,50 €
y un kilo de peras cuesta 1,25 €.