Tema 5

POLINOMIOS

Índice

1. Monomios.

1. Monomios

Un **monomio** es la expresión algebraica más sencilla, está formada por el producto de un número, llamado **coeficiente**, y una o varias letras elevadas a un número natural, que forman la **parte literal**.

Las letras de la parte literal se llaman **variables** y, si se sustituyen por números, obtenemos el **valor numérico** del monomio.

El **grado** de un monomio es el exponente de la letra que forma la parte literal si solo hay una o la suma de los exponentes si hay más de una.

- El signo del producto de números y letras no se suele escribir.
  $2 \cdot x^4 \cdot y^2 = 2x^4y^2$
- El exponente 1 no se escribe.
  $x^1y^1 = xy$
- Cuando un monomio está formado solo por letras, su coeficiente es 1.
  $x^3 = 1 \cdot x^3 \rightarrow$ Coeficiente 1

EJEMPLO

1. Señala los elementos de cada monomio y calcula su valor numérico para $x = 3$, $y = -2$ y $z = 2$.

Monomio	Coeficiente	Parte literal	Variables	Grado	Valor numérico
$-3x^4$	-3	x^4	x	4	$-3x^4 \xrightarrow{x=3} -3 \cdot 3^4 = -3 \cdot 81 = -243$
$5x^2y$	5	x^2y	x, y	$2+1=3$	$5x^2y \xrightarrow{x=3,\, y=-2} 5 \cdot 3^2 \cdot (-2) = -90$
$2x^2y^3z$	2	x^2y^3z	x, y, z	$2+3+1=6$	$2x^2y^3z \xrightarrow{x=3,\, y=-2,\, z=2} 2 \cdot 3^2 \cdot (-2)^3 \cdot 2 = -288$

1. Monomios.

Dos **monomios** son **semejantes** si tienen la misma parte literal.

Decimos que dos **monomios** son **opuestos** cuando son semejantes y tienen sus coeficientes opuestos.

Los monomios semejantes se diferencian solo en su coeficiente.

EJEMPLO

2. Escribe 4 monomios distintos de grado 3; tres de ellos deben ser semejantes y dos opuestos.

$3x^3$ $5x^3$ $-3x^3$ $2xy^2$

Semejantes: $3x^3$, $5x^3$ y $-3x^3$ Opuestos: $3x^3$ y $-3x^3$ No semejante: $2xy^2$

1. Indica las expresiones algebraicas que son monomios y escribe su opuesto.

$3xy^2$ $\frac{2}{3}x^3$ $-\frac{3}{2}x^3$ $2x^2+y$ $2x^2y$

$3xy^2 \rightarrow -3xy^2$

$\frac{2}{3}x^3 \rightarrow -\frac{2}{3}x^3$

$-\frac{3}{2}x^3 \rightarrow \frac{3}{2}x^3$

$2x^2+y \rightarrow$ No es monomio.

$2x^2y \rightarrow -2x^2y$

2. Con las variables x e y, escribe:

a) Tres monomios no semejantes de grado 1.

b) Tres monomios no semejantes de grado 2.

a) No se puede. b) x^2, xy, y^2

1. Monomios.

3 Escribe en forma algebraica. Después, indica el coeficiente, las variables y el grado.

a) El opuesto del producto de tres números.

b) El triple del área de un rectángulo.

a) xyz
Grado: 3
Coeficiente: -1
Variables: x, y, z

b) Si x es la base e y la altura. → $3xy$
Grado: 2
Coeficiente: 3
Variables: x e y

4 **REFLEXIONA.** Escribe un monomio de grado 2. ¿Puedes escribir un monomio semejante al que has escrito con grado 3 y coeficiente -3?

Respuesta abierta. Por ejemplo:
$2xy$.

No puede haber un monomio semejante con grado 3 porque entonces la parte literal sería distinta.

2. Operaciones con monomios.

2. Operaciones con monomios

2.1. Suma y resta de monomios

La **suma** (o **resta**) de dos o más monomios solo se puede realizar si son semejantes; en caso contrario, se deja indicada.

El resultado de la suma (o resta) de dos o más monomios semejantes es otro monomio que tiene por coeficiente la suma (o resta) de los coeficientes y la misma parte literal.

EJEMPLO

3. Calcula el resultado de estas operaciones con monomios.

a) $4x + 2x = (4 + 2)x = 6x$

b) $3x - 5x = (3 - 5)x = -2x$

c) $-6x + 2x + x = (-6 + 2 + 1)x = -3x$

d) $\frac{2}{3}x^2 - x^2 + \frac{1}{2}x^2 = \left(\frac{2}{3} - 1 + \frac{1}{2}\right)x^2 = \frac{1}{6}x^2$

e) $2xy^2 + \frac{3}{5}xy^2 - \frac{5}{3}xy^2 = \left(2 + \frac{3}{5} - \frac{5}{3}\right)xy^2 = \frac{14}{15}xy^2$

2. Operaciones con monomios.

2.2. Producto y cociente de monomios

El **producto** de dos monomios es otro monomio que tiene por coeficiente el producto de los coeficientes y por parte literal el producto de las partes literales de ambos monomios.

El **cociente** de dos monomios tiene por coeficiente el cociente de los coeficientes y por parte literal el cociente de las partes literales de ambos monomios.

El grado del producto de monomios es la suma de los grados de sus factores, y el del cociente, la diferencia de los grados del dividendo y el divisor.

EJEMPLO

4. Realiza los siguientes productos y divisiones de monomios.

a) $2x^2 \cdot 5x = (2 \cdot 5) \cdot (x^2 \cdot x) = 10x^{2+1} = 10x^3$

b) $-3y \cdot 2x^3 \cdot 4y^2 = (-3 \cdot 2 \cdot 4) \cdot (y \cdot x^3 \cdot y^2) = -24x^3y^3$

c) $(6x^5) : (3x) = (6 : 3) \cdot (x^5 : x) = 2 \cdot x^{5-1} = 2x^4$

d) $(5x^2y) : (xy) = (5 : 1) \cdot (x^2y) : (xy) = 5x^{2-1}y^{1-1} = 5x$

2. Operaciones con monomios.

5 Realiza las siguientes operaciones con monomios.

a) $2x^2yz + 3x^2yz$

b) $-4yz^3 + 2yz^3$

c) $\frac{2}{5}x^2 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{10}x^2$

d) $3xy^2 - 4xy^2$

e) $-3x^4 - 2x^4$

f) $\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{3}x^3$

a) $5x^2yz$

b) $-2yz^3$

c) $\frac{30}{10}x^2 = 3x^2$

d) $-xy^2$

e) $-5x^4$

f) 0

6 Opera con los monomios que sean semejantes.

a) $2x^2 - 5x^3 - 5x^2 + x^3 + 3x^2$

b) $7x^2y + 3xy^2 - (4xy^2 + 3x^2y)$

a) $0x^2 - 4x^3 = -4x^3$

b) $4x^2y - xy^2$

7 **REFLEXIONA.** Calcula $3x^3 + \frac{1}{3}x^2 - 2x$.

No se puede calcular. La operación se deja indicada.

3. Polinomios.

3. Polinomios

Un **polinomio** es una expresión algebraica formada por la suma o la resta de dos o más monomios no semejantes.

EJEMPLO

5. Opera con los monomios y reduce el polinomio.

$$-7x^2 + 3x - 9 + 8x^3 + 3x^2 - 4x$$

Este polinomio tiene varios monomios semejantes que se pueden sumar o restar.

$$-7x^2 + 3x - 9 + 8x^3 + 3x^2 - 4x = 8x^3 - 7x^2 + 3y^2 + 3x - 4x - 9 =$$

$$= 8y^3 + (-7 + 3)x^2 + (3 - 4)x - 9 = 8x^3 - 4x^2 - y - 9$$

Cada uno de los monomios (y su signo) que forman un polinomio se denomina **término**, y el que no tiene parte literal, **término independiente**.

Se llama **grado** del polinornio al mayor de los grados de los térrninos de un polinomio reducido.

3. Polinomios.

EJEMPLO

6. Calcula el polinomio reducido, escribe su grado y sus términos.

$$P(x) = -x^2 + 2x + 3x^2 - 5x + 2 = -x^2 + 3x^2 + 2x - 5x + 2 =$$

$$= 2x^2 - 3y + 2 \rightarrow \begin{cases} \text{Grado} = 2 \\ \text{Términos: } 2x^2, -3x \text{ y } 2 \\ \text{Término independiente: } 2 \end{cases}$$

El polinomio opuesto de $P(x)$, que designamos como $-P(x)$, se obtiene cambiando de signo los coeficientes todos los términos de $P(x)$.

EJEMPLO

7. Halla el polinomio opuesto.

$$P(x) = -x^3 + 3x^2 - x - 2 \xrightarrow{\text{Opuesto}} -P(y) = x^3 - 3x^2 + x + 2$$

8 Escribe el grado y los términos del polinomio reducido de cada uno de estos polinomios.

a) $P(x) = 2x^4 - 3x^2 + 2x - 4x^4 + x^3 - 1$

b) $Q(y) = y^3 - 2y^2 + y^3 + y^2 - 2y^3 + y + 3$

c) $R(x, y) = y^2 + 3xy - 2x^2 + 5 + x - y + 2x^2y$

¿Cuál es el polinomio opuesto de cada uno de los anteriores?

a) Grado: 4

Términos: $-2x^4, -3x^2, 2x, x^3, -1$

$-P(x) = 2x^4 + 3x^2 - 2x - x^3 + 1$

b) Grado: 2

Términos: $-y^2, y, 3$

$-Q(y) = y^2 - y - 3$

c) Grado: 3

Términos: $y^2, 3xy, -2x^2, 5, x, -y, 2x^2y$

$-R(x, y) = -y^2 - 3xy + 2x^2 - 5 -$
$-x + y - 2x^2y$

3. Polinomios.

9 ¿Puedes escribir un polinomio que tenga todas estas características?

- Sea de grado 2.
- Tenga tres términos.
- El término independiente sea un número par.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$P(X) = 2X^2 + 5X + 10.$

10 **REFLEXIONA.** Si el polinomio $P(X)$ tiene grado 3 y uno de sus dos términos es $-2x$, ¿qué grado tiene su polinomio opuesto y cuál es su término independiente?

Grado 3. Su término independiente es 0.

3.1. Valor numérico de un polinomio

El **valor numérico** de un polinomio es el resultado que se obtiene al sustituir las variables por números determinados y operar después.

EJEMPLO

8. Calcula el valor numérico de los polinomios para los valores de la variable que se indican.

a) $P(x) = x^2 + 4x - 1$ para $x = -2$

$$P(X) = X^2 + 4X - 1 \xrightarrow{X = -2} P(-2) = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) - 1 =$$
$$= 4 - 8 - 1 = -5$$

3. Polinomios.

b) $P(x, y) = x^2y - 3y^2 + \frac{3}{5}x$ para $x = 5, y = -1$

$$P(x, y) = x^2y - 3y^2 + \frac{3}{5}x \xrightarrow{x=5,\, y=-1} P(5, -1) = 5^2 \cdot (-1) - 3 \cdot (-1)^2 + \frac{3}{5} \cdot 5 =$$
$$= -25 - 3 + 3 = -25$$

3.2. Raíces de un polinomio

Un número es **raíz de un polinomio** (o, también, cero de un polinomio) cuando el valor numérico del polinomio para dicho número es cero.

EJEMPLO

9. Comprueba si $x = -2$ y $x = 1$ son raíces de estos polinomios.

a) $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

$P(-2) = (-2)^3 - 6 \cdot (-2)^2 + 11 \cdot (-2) - 6 = -60$

$P(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6 = 0$

$x = -2$ no es raíz de $P(x)$ porque $P(-2) \neq 0$.

$x = 1$ es raíz de $P(x)$ porque $P(1) = 0$.

b) $Q(x) = x^3 - 7x - 6$

$Q(-2) = (-2)^3 - 7 \cdot (-2) - 6 = 0$

$Q(1) = 1^3 - 7 \cdot 1 - 6 = -12$

$x = -2$ es raíz de $Q(x)$ porque $Q(-2) = 0$.

$x = 1$ no es raíz de $Q(x)$ porque $Q(1) \neq 0$.

3. Polinomios.

11 Calcula el valor numérico de los siguientes polinomios.

a) $A(x) = x^3 - 2x + 1$ para $x = -2$

b) $B(x) = -2x^3 + x^2 + 6$ para $x = 1$

c) $C(x) = \frac{2}{3}x^2 + 1$ para $x = 0$ y para $x = 3$

d) $D(x, y) = x^3y - 6y + x$ para $x = 2$ e $y = 2$

e) $E(x, y, z) = -\frac{3}{4}xz^2 + 5y^3$ para $x = y = -2$ y $z = -1$

a) $A(-2) = -3$

b) $B(1) = 5$

c) $C(0) = 1$ y $C(3) = 7$

d) $D(2, 2) = 6$

e) $E(-2, -2, -1) = \frac{83}{2}$

12 ¿Son $x = 1$ y $x = -1$ raíces de estos polinomios?

a) $P(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$

b) $Q(x) = 2x^3 - 2y^2 - x + 1$

c) $R(x) = x^3 - x^2 + 3x + 5$

a) $x = 1$ y $x = -1$ son raíces del polinomio.

b) $x = 1$ es raíz del polinomio.

c) $x = -1$ es raíz del polinomio.

13 **REFLEXIONA.** Si $x = 0$ es raíz de un polinomio $P(x)$, ¿qué podemos decir de su término independiente?

Su término independiente debe ser 0.

4. Operaciones con polinomios

4.1. Suma y resta de polinomios

Para **sumar** (o **restar**) polinomios se agrupan los monomios semejantes y se suman (o restan) sus coeficientes.

EJEMPLO

10. Calcula la suma y la resta de estos dos polinomios.

$$P(x) = x^2 - 3x + 5 \qquad Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 1$$

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= (y^2 - 3x + 5) + (2x^3 - 3x^2 + 2x - 1) = \\ &= x^2 - 3x + 5 + 2x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = \\ &= 2x^3 - 2x^2 - y + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(y) - Q(y) &= (x^2 - 3x + 5) - (2x^3 - 3x^2 + 2x - 1) = \\ &= x^2 - 3x + 5 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = \\ &= -2x^3 + 4x^2 - 5x + 6 \end{aligned}$$

4. Operaciones con polinomios.

4.2. Multiplicación y división de polinomios

Para **multiplicar** dos polinomios se multiplica cada monomio de uno de ellos por todos los monomios del otro y, después, se suman los polinomios obtenidos.

EJEMPLO

11. Halla el resultado del producto de estos dos polinomios: $(-3x^2 + x + 2) \cdot (x^2 + 2)$.

$$(-3x^2 + x + 2) \cdot (x^2 + 2) = -3x^2 \cdot x^2 - 3x^2 \cdot 2 + x \cdot x^2 + x \cdot 2 + 2 \cdot x^2 + 2 \cdot 2 = -3x^4 - 6x^2 + x^3 + 2x + 2x^2 + 4 =$$
$$= -3x^4 + x^3 - 4x^2 + 2x + 4$$

Dados dos polinomios, $P(x)$ y $Q(x)$, al **dividirlos** obtenemos otros dos polinomios, $C(x)$ y $R(x)$, que cumplen:

$$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x), \text{ con grado de } R(x) < \text{grado de } Q(x).$$

Los polinomios $P(x)$, $Q(x)$, $C(x)$ y $R(x)$ se denominan polinomio **dividendo**, **divisor**, **cociente** y **resto** de la división, respectivamente.

4. Operaciones con polinomios.

14 Opera con los siguientes polinomios:

$$P(x) = 2x^3 - 3x + 1$$
$$Q(x) = 3x^2 + 2x + 1$$
$$R(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$

a) $P(x) + Q(x)$ c) $R(x) - Q(x)$ e) $P(x) \cdot Q(x)$
b) $P(x) + R(x)$ d) $Q(x) - P(x)$ f) $P(x) \cdot R(x)$

a) $P(x) + Q(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 2$
b) $P(x) + R(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 2$
c) $R(x) - Q(x) = x^4 - 4x^3 - x^2$
d) $Q(x) - P(x) = -2x^3 + 3x^2 + 5x$
e) $P(x) \cdot Q(x) = 6x^5 + 4x^4 - 7x^3 - 3x^2 - x + 1$
f) $P(x) \cdot R(x) = 2x^7 - 8x^6 + x^5 + 17x^4 - 8x^3 - 4x^2 - x + 1$

15 Dados los polinomios $P(x) = x^2 - x - 1$, $Q(x) = -x^3 + 2$ y $R(x) = x^3 + x^2 - 15x$, calcula el valor de $-Q(x) + 2 \cdot P(x) + R(x)$.

$$2x^3 + 3x^2 - 17x - 4$$

16 **REFLEXIONA.** Averigua el valor de a para que se cumpla la siguiente igualdad:

$$(3x - 4) \cdot (x - a) = 3x^2 + 2x - 8$$

$3x^2 + (-3a - 4)x + 4a = 3x^2 + 2x - 8 \rightarrow$

$\rightarrow \left.\begin{array}{r} -3a - 4 = 2 \\ 4a = -8 \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow a = -2$

4. Operaciones con polinomios.

Cómo se dividen polinomios

Para **dividir un polinomio entre un polinomio**, seguiremos los siguientes pasos:

$$P(x) = -2x^3 + x^4 - 20 - 11x^2 + 30x \quad \textbf{entre}$$
$$Q(x) = 3x + x^2 - 2$$

1º) Ordenamos decrecientemente los términos del dividendo y del divisor y los dispondremos como una división normal.

$$x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20 \quad \underline{\big| \; x^2 + 3x - 2}$$

2º) Se divide el primer término del dividendo con el primer término del divisor, así se obtiene el primer término del cociente.

$$\begin{array}{l|l} x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20 & x^2 + 3x - 2 \\ \hline & x^2 \end{array}$$

4. Operaciones con polinomios.

3º) Se multiplica el primer término del cociente por cada término del divisor y el producto pasa restando al dividendo.

$$\begin{array}{rrrrr|l} x^4 & -2x^3 & -11x^2 & +30x & -20 & x^2+3x-2 \\ \cline{6-6} -x^4 & -3x^3 & +2x^2 & & & x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2+3x-2 \\ \times x^2 \\ \hline x^4+3x^3-2x^2 \end{array}$$

4º) Se suman algebraicamente.

$$\begin{array}{rrrrr|l} \cancel{x^4} & -2x^3 & -11x^2 & +30x & -20 & x^2+3x-2 \\ \cline{6-6} \cancel{-x^4} & -3x^3 & +2x^2 & & & x^2 \\ \hline & -5x^3 & -9x^2 & +30x & -20 & \end{array}$$

4. Operaciones con polinomios.

5º) Se divide el primer término del nuevo residuo o resto, entre el primer término del divisor, así obtenemos el segundo término del divisor. Este segundo término se multiplica por el divisor y se pasa restando al dividendo.

$$\begin{array}{rrrrr|l} \cancel{x^4} & -2x^3 & -11x^2 & +30x & -20 & x^2+3x-2 \\ \cline{6-6} \cancel{-x^4} & -3x^3 & +2x^2 & & & x^2 \\ \hline & -5x^3 & -9x^2 & +30x & -20 & \end{array}$$

$$\frac{-5x^3}{x^2} = -5x$$

$$\begin{array}{r} x^2+3x-2 \\ \times \quad -5x \\ \hline -5x^3-15x^2+10x \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr|l} \cancel{x^4} & -2x^3 & -11x^2 & +30x & -20 & x^2+3x-2 \\ \cline{6-6} \cancel{-x^4} & -3x^3 & +2x^2 & & & x^2-5x \\ \hline & -5x^3 & -9x^2 & +30x & -20 & \\ & +5x^3 & +15x^2 & -10x & & \end{array}$$

4. Operaciones con polinomios.

6º) Se repite el procedimiento hasta que el grado del polinomio resto sea menor que el grado del polinomio divisor.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
\cancel{x^4} & -2x^3 & -11x^2 & +30x & -20 & x^2+3x-2 \\
\cline{6-6}
-\cancel{x^4} & -3x^3 & +2x^2 & & & x^2-5x+6 \\
\cline{1-5}
 & -\cancel{5x^3} & -9x^2 & +30x & -20 & \\
 & +\cancel{5x^3} & +15x^2 & -10x & & \\
\cline{2-5}
 & & +\cancel{6x^2} & +20x & -20 & \\
 & & -\cancel{6x^2} & -18x & +12 & \\
\cline{3-5}
 & & & +2x & -8 &
\end{array}
$$

Polinomio cociente $\longrightarrow$ $C(x) = x^2 - 5x + 6$

Polinomio resto $\longrightarrow$ $R(x) = 2x - 8$

4. Operaciones con polinomios.

17 Realiza las siguientes divisiones.

a) $(x^5 - 3x^2 + x + 4) : x$

b) $(x^4 + 6x^3 + x^2 - 2) : x^2$

c) $(x^5 - 1) : x^3$

d) $(4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x + 3) : (2x)$

e) $(6x^5 + 4x^2 - 3x + 4) : (3x^2)$

f) $(2x^5 + x^4) : (4x^3)$

a) $C(x) = x^4 - 3x + 1 \qquad R(x) = 4$

b) $C(x) = x^2 + 6x + 1 \qquad R(x) = -2$

c) $C(x) = x^2 \qquad R(x) = -1$

d) $C(x) = 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$

$R(x) = 3$

e) $C(x) = 2x^3 + \frac{4}{3}$

$R(x) = -3x + 4$

f) $C(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x \qquad R(x) = 0$

18 Calcula el cociente y el resto de estas divisiones.

a) $(x^5 - x^3 + x) : (x + 1)$

b) $(x^5 - 243) : (x - 3)$

c) $(6x^4 + 3x^3 + 4x + 2) : (2x + 1)$

d) $(x^6 - 2x^5 + 3x^3 - 6x^2 - x + 6) : (x - 2)$

e) $(2x^3 - 8x^2 + 3x - 1) : (-x + 2)$

f) $x^5 : (2 + x)$

a) $C(x) = x^4 - x^3 + 1$
$R(x) = -1$

b) $C(x) = x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 27x + 81$
$R(x) = 0$

c) $C(x) = 3x^3 + 2$
$R(x) = 0$

d) $C(x) = x^5 + 3x^2 - 1$
$R(x) = 4$

e) $C(x) = -2x^2 + 4x + 5$
$R(x) = -11$

f) $C(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16$
$R(x) = -32$

4. Operaciones con polinomios.

19 Efectúa las divisiones.

a) $(x^4 + x^2 + 1) : (x^2 + 1)$

b) $(2x^3 + 3x^2 - 2x - 3) : (x^2 - 1)$

c) $(2x^5 + x^4 + y^3 + x^2 + 2x + 2) : (2y^2 - x)$

a) $C(X) = X^2$
$R(X) = 1$

b) $C(X) = 2X + 3$
$R(X) = 0$

c) $C(X) = X^3 + X^2 + X + 1$
$R(X) = 3X + 2$

20 Halla el dividendo de estas divisiones, siendo $Q(x)$ el divisor, $C(x)$ el cociente y $R(x)$ el resto.

a) $Q(x) = x^5 + 2x$, $C(x) = 2x + 1$ y $R(x) = -5$

b) $Q(x) = x + 3$, $C(x) = x + 3$ y $R(x) = 0$

c) $Q(x) = 3x + 1$, $C(x) = 2x^2 + 1$ y $R(x) = -2$

d) $Q(x) = x + 2x^2$, $C(x) = 1 + x^2$ y $R(x) = 2 - x$

a) $P(X) = 2X^6 + X^5 + 4X^2 + 2X - 5$

b) $P(X) = X^2 + 6X + 9$

c) $P(X) = 6X^3 + 2X^2 + 3X - 1$

d) $P(X) = 2X^4 + X^3 + 2X^2 + 2$

21 Calcula el resto de esta división sin realizarla.

Dividendo → $P(x) = 9x^5 - 3x^4 - x^2 + 2x - 5$

Divisor → $Q(x) = 3x^3 - x^2$

Cociente → $C(x) = 3x^2$

$$R(X) = P(X) - Q(X) \cdot C(X) =$$
$$= P(X) - (9X^5 - 3X^4) = -X^2 + 2X - 5$$

4. Operaciones con polinomios.

Cómo se dividen polinomios entre monomios del tipo $(x - a)$ y $(x + a)$ (regla de Ruffini)

Divide por Ruffini $6x^3 - 13x + 5$ entre $x + 2$

Procedimiento:

1.Se colocan los coeficientes del dividendo ordenado en forma decreciente en horizontal y, si falta alguno, se pone un cero.

	6	0	-13	5

4. Operaciones con polinomios.

2. Debajo y a la izquierda se coloca **a** con el signo cambiado.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 0 & -13 & 5 \\ -2 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

3. Se baja directamente el primer término del dividendo.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 0 & -13 & 5 \\ -2 & & & & \\ \hline & 6 & & & \end{array}$$

4. Operaciones con polinomios.

4. Se multiplica la **a** cambiada de signo por el valor que bajamos del dividendo.

	6	0	-13	5
- 2		-12		
	6			

5. Se suma el nuevo valor calculado con el valor del dividendo de la fila superior.

	6	0	-13	5
- 2		-12		
	6	-12		

4. Operaciones con polinomios.

6. Se repite el proceso anterior.

	6	0	-13	5
-2		-12	24	-22
	6	-12	11	$\boxed{-17}$

7. El cociente es un polinomio de un grado menor que el dividendo y sus coeficientes son los valores escritos en azul.

$$C(x) = 6x^2 - 12x + 11$$

8. El resto es el último número.

$$R(x) = R = -17$$

4. Operaciones con polinomios.

22 Divide utilizando la regla de Ruffini.

a) $(x^5 - 1) : (x - 1)$

b) $(x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 2) : (x + 1)$

c) $(x^5 + x^3 - x - 1) : (x - 2)$

d) $(4x^2 + 3) : (x + 2)$

e) $(2x^4 - 18x^2 - x + 6) : (x - 3)$

f) $(-x^5 + x^4) : (x + 1)$

g) $(2x^3 - 7x + x^5 - 3) : (x + 1)$

a) $C(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
$R(x) = 0$

b) $C(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 6$
$R(x) = 4$

c) $C(x) = x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 10x + 19$
$R(x) = 37$

d) $C(x) = 4x - 8$
$R(x) = 19$

e) $C(x) = 2x^3 + 6x^2 - 1$
$R(x) = 3$

f) $C(x) = -x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 2$
$R(x) = 2$

g) $C(x) = x^4 - x^3 + 3x^2 - 3x - 4$
$R(x) = 1$

23 Indica el cociente y el resto de estas divisiones.

a) $(x^2 + x + 1) : (-x - 1)$

b) $(2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - x - 2) : (-x + 1)$

a) $C(x) = -x \qquad R(x) = 1$

b) $C(x) = -2x^3 + x^2 - 3x - 2$
$R(x) = 0$

24 Completa en tu cuaderno y escribe los polinomios dividendo, divisor, cociente y resto.

	1	2	0	3
?				
		0		

	3	3	1	?
-1				
				0

$P(x) = x^3 + 2x^2 + 3$
$Q(x) = x + 2$
$C(x) = x^2$
$R(x) = 3$

$P(x) = 3x^3 + 3x^2 + x + 1$
$Q(x) = x + 1$
$C(x) = 3x^2 + 1$
$R(x) = 0$

5. Factor común.

5. Factor común

Sacar factor común consiste en transformar una expresión de suma o resta en producto.

$$\overset{\text{Factor común}}{\longrightarrow}$$
$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$$
$$\underset{\text{Propiedad distributiva}}{\longleftarrow}$$

$$\overset{\text{Factor común}}{\longrightarrow}$$
$$a \cdot b - a \cdot c = a \cdot (b - c)$$
$$\underset{\text{Propiedad distributiva}}{\longleftarrow}$$

EJEMPLO

12. Saca factor común en estos polinomios.

a) $4x - 4y$

Tenemos que encontrar los factores que se repiten en todos los términos. En este caso, las letras no se repiten, pero sí el número 4.

$$4x - 4y = 4(x - y)$$

Cuando el factor común coincide con cualquiera de los sumandos, en su lugar queda la unidad.

$$a + ab + ac = a \cdot (1 + b + c)$$

5. Factor común.

b) $3x - 6y + 9z$

A veces no se repite un número, pero todos los coeficientes de los términos son múltiplos de un número.

En este caso, los coeficientes son múltiplos de 3. Cuando esto ocurre, para sacar factor común calculamos el m.c.d. de los coeficientes sin signo: m.c.d. $(3, 6, 9) = 3$.

$$3x - 6y + 9z = 3 \cdot x - 3 \cdot 2y + 3 \cdot 3z = 3(x - 2y + 3z)$$

c) $2x + 3xy + 4xyz$

En este caso, el máximo común divisor de los coeficientes es 1. La variable x es la que se repite en todos los términos.

$$2x + 3xy + 4xyz = x \cdot 2 + x \cdot 3y + x \cdot 4yz = \\ = x(2 + 3y + 4yz)$$

d) $5x^3 + 7x^4 + 9x^5$

En este caso, el máximo común divisor de los coeficientes es 1. La variable x es la que se repite en todos los términos. Entonces, tomamos la x que aparece con menor grado, es decir, x^3.

$$5x^3 + 7x^4 + 9x^5 = x^3 \cdot 5 + x^3 \cdot 7x + x^3 \cdot 9x^2 = \\ = x^3(5 + 7x + 9x^2)$$

5. Factor común.

25 Extrae factor común.

a) $2x + 2z$
b) $3x - 3y$
c) $5x + 5y$
d) $2x - 10y$
e) $3y + 6z$
f) $2x + 4y + 6z$
g) $9x - 18y + 36z$
h) $15x + 10y - 20z$
i) $48x - 72y + 12z$
j) $6x + 30y - 24z$

a) $2(x + z)$
b) $3(x - y)$
c) $5(x + y)$
d) $2(x - 5y)$
e) $3(y + 2z)$
f) $2(x + 2y + 3z)$
g) $9(x - 2y + 4z)$
h) $5(3x + 2y - 4z)$
i) $12(4x - 6y + z)$
j) $6(x + 5y - 4z)$

26 Completa en tu cuaderno.

a) $x^6 - 2x^2 = \square\,(x^4 - \square)$
b) $5z^3 + 3z^2 - 4z = \square\,(5\square^2 + 3\square - 4)$

a) $x^6 - 2x^2 = x^2(x^4 - 2)$
b) $5z^3 + 3z^2 - 4z = z(5z^2 + 3z - 4)$

27 **REFLEXIONA.** Escribe valores para a y b de forma que se cumpla que x^4 es el factor común del polinomio $2x^a + x^b - 3x^4$.

Respuesta abierta. La condición es que a y b sean iguales o mayores que 4.
Por ejemplo: $a = 5$ y $b = 7$.

5. Factor común.

28 Extrae factor común en los siguientes polinomios.

a) $3x + 6x^2$
b) $4x^3 - 2x$
c) $6x^4 - 3x^2 + x$
d) $4x^3 - 12x^2 + 16x$
e) $2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5$
f) $15x^3 + 10x^4 - 25x^5 + 35x^6$

a) $3x(1 + 2x)$
b) $2x(2x^2 - 1)$
c) $x(6x^3 - 3x + 1)$
d) $4x(x^2 - 3x + 4)$
e) $x^2(2 + 3x + 4x^2 + 5x^3)$
f) $5x^3(3 + 2x - 5x^2 + 7x^3)$

29 Saca factor común en estos polinomios. Después, aplica la propiedad distributiva para comprobar que lo has hecho bien.

a) $8x^2 - 4x$
b) $18x^3y^2 - 12x^2y^3$
c) $30a^2b - 14ab^2 + 5a^2b^2$
d) $-9y^4 + 12y^2 - 3y^3$
e) $5xz^3 - 7x^3z^3 + xz^2$
f) $30b^2 + 18ab^2 + 12b - 18b^2$

a) $4x(2x - 1)$
b) $6x^2y^2(3x - 2y)$
c) $ab(30a - 14b + 5ab)$
d) $3y^2(-3y^2 + 4 - y)$
e) $xz^2(5z - 7x^2z + 1)$
f) $6b(5b + 3ab + 2 - 3b)$

5. Factor común.

30 Completa en tu cuaderno las siguientes igualdades para que sean ciertas.

a) $x^5 - 5x^2 = \square \cdot (x^3 - \square)$

b) $\square + 9x^3 - \square = 3x \cdot (x^3 + \square - 1)$

c) $49x^4y^3 + \square - \square = 7xy \cdot (\square + 2xy - 7y)$

d) $6x^3y^2 + \square x^2y^2 + 12x^2y = \square \cdot (2xy + 3\square + \square)$

e) $50xyz^2 + 15xy^2 - \square = \square \cdot (\square + 3y \; \square \; 4xz)$

a) $x^5 - 5x^2 = x^2(x^3 - 5)$

b) $3x^4 + 9x^3 - 3x = 3x(x^3 + 3x^2 - 1)$

c) $49x^4y^3 + 14x^2y^2 - 49xy^2 =$
$= 7xy \cdot (7x^3y^2 + 2xy - 7y)$

d) $6x^3y^2 + 9x^2y^2 + 12x^2y =$
$= 3x^2y \cdot (2xy + 3y + 4)$

e) $50xyz^2 + 15xy^2 - 20x^2yz =$
$= 5xy \cdot (10z^2 + 3y - 4xz)$

31 Piensa y escribe, en cada caso, un polinomio de grado cinco del que se pueda extraer como factor común el siguiente factor.

a) $2x^3$ c) $10x^2$ e) x^4

b) $6x^2$ d) $9x$ f) 3

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $2x^5 - 4x^3 = 2x^3(x^2 - 2)$

b) $6x^5 - 12x^2 = 6x^2(x^3 - 2)$

c) $50x^5 + 30x^2 = 10x^2(5x^3 + 3)$

d) $9x^5 + 9x^2 + 9x = 9x(x^4 + x + 1)$

e) $x^6 + 2x^4 = x^4(x^2 + 2)$

f) $12x^5 + 9 = 3(4x^5 + 3)$

32 Calcula a, b y c para que el factor común de $x^2y^5z^4 + x^ay^bz^c$ sea xy^3z^2.

$a = 1$, $b = 3$ y $c = 2$

6. Igualdades notables.

6. Igualdades notables

Las **igualdades notables** resultan muy eficaces para abreviar algunos cálculos con expresiones algebraicas. Se forman a partir de ciertos productos de binomios.

6.1. Cuadrado de una suma

El **cuadrado de una suma** es igual al cuadrado del primero más el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

La expresión $(a + b)^2$ es el cuadrado de la suma de dos monomios.

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b = a^2 + 2ab + b^2$$

6. Igualdades notables.

6.2. Cuadrado de una diferencia

El **cuadrado de una diferencia** es igual al cuadrado del primero menos el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

La expresión $(a - b)^2$ es el cuadrado de la diferencia de dos monomios.

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a \cdot a - a \cdot b - b \cdot a + b \cdot b = a^2 - 2ab + b^2$$

EJEMPLO

13. Aplica las igualdades notables y desarrolla los siguientes cuadrados.

a) $(5x + 3)^2 \underset{\uparrow \atop a = 5x,\ b = 3}{=} (5x)^2 + 2 \cdot 5x \cdot 3 + 3^2 = 25x^2 + 30x + 9$

b) $(2x - 3y)^2 \underset{\uparrow \atop a = 2x,\ b = 3y}{=} (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$

6. Igualdades notables.

33 Observa los siguientes binomios y desarrolla sus cuadrados.

a) $(x + 7)^2$
b) $(x - 4)^2$
c) $(6 + x)^2$
d) $(3a^2 + 2b)^2$
e) $(2a + 1)^2$
f) $(3a - b)^2$
g) $\left(\frac{1}{2}x + 4\right)^2$
h) $(2b^2 - 5b^3)^2$
i) $(3z^3 - 4)^2$
j) $(7 + xyz)^2$
k) $(8x^2 - 3b)^2$
l) $(1 - z^4)^2$
m) $(5y^3 - 4z^2y^2)^2$
n) $\left(\frac{3}{5}xy^2 - \frac{1}{4}y\right)^2$

a) $x^2 + 14x + 49$
b) $x^2 - 8x + 16$
c) $36 + 12x + x^2$
d) $9a^4 + 12a^2b + 4b^2$
e) $4a^2 + 4a + 1$
f) $9a^2 - 6ab + b^2$
g) $\frac{1}{4}x^2 + 4x + 16$
h) $4b^4 - 20b^5 + 25b^6$
i) $9z^6 - 24z^3 + 16$
j) $49 + 14xyz + x^2y^2z^2$
k) $64x^4 - 48x^2b + 9b^2$
l) $1 - 2z^4 + z^8$
m) $25y^6 - 40z^2y^5 + 16z^4y^4$
n) $\frac{9}{25}x^2y^4 - \frac{6}{20}xy^3 + \frac{1}{16}y^2$

34 Desarrolla estas expresiones algebraicas utilizando igualdades notables.

a) $(3x^3 - a^2)^2$
b) $(x^2 + x^3)^2$
c) $(2x + x^3)^2$
d) $(6ab^2 - 2y)^2$

a) $9x^6 - 6a^2x^3 + a^4$
b) $x^4 + 2x^5 + x^6$
c) $4x^2 + 4x^4 + x^6$
d) $36a^2b^4 - 24ab^2y + 4y^2$

6. Igualdades notables.

35 **REFLEXIONA.** Expresa como cuadrado de una suma o una diferencia, según corresponda.

a) $x^2 + 6x + 9$

b) $4x^2 - 12xy + 9y^2$

c) $\frac{1}{4}x^2 + 1 - x$

d) $x^2 + 4xy + 4y^2$

e) $x^4 + 2x^2 + 1$

f) $9y^2 + \frac{25}{4}x^2z^2 + 15xyz$

a) $(x+3)^2$

b) $(2x-3y)^2$

c) $\left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2$

d) $(x+2y)^2$

e) $(x^2+1)^2$

f) $\left(3y + \frac{5}{2}xz\right)^2$

6.3. Suma por diferencia

El **producto de una suma por su diferencia** es igual a la diferencia de sus cuadrados.

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

Dados los monomios a y b, podemos operar para obtener el producto de su suma por su diferencia.

$$(a+b)\cdot(a-b) = a\cdot a - a\cdot b + b\cdot a - b\cdot b = a^2 - b^2$$

EJEMPLO

14. Simplifica los siguientes productos.

a) $(2x+y)\cdot(2x-y) = (2x)^2 - y^2 = 4x^2 - y^2$

$a = 2x$
$b = y$

b) $(3x^3 - 5x)\cdot(3x^3+5x) = (3x^3)^2 - (5x)^2 = 9x^6 - 25x^2$

$a = 3x^3$
$b = 5x$

6. Igualdades notables.

6.4. Aplicaciones

Al igual que con el procedimiento de sacar factor común, estas igualdades sirven para convertir expresiones de suma y resta en productos. Para poder expresar un polinomio mediante una igualdad notable, su grado debe ser par.

EJEMPLO

15. Estudia si estos polinomios se pueden expresar como el cuadrado de una suma o una diferencia.

a) $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$

$a = x$ $\quad b = 3$

$2ab = 2 \cdot 3 \cdot x = 6x$

b) $x^2 + 4x + 16 \rightarrow$ No lo podemos expresar como cuadrado

$a = x$ $\quad b = 4$

$2ab = 2 \cdot 4 \cdot x = 8x$

EJEMPLO

16. Estudia si estos polinomios se pueden expresar como una suma por una diferencia.

a) $x^2 - 9 = (x + 3) \cdot (x - 3)$

$a = x$

$b = 3$

b) $4x^2 - 8 = \left(2x + \sqrt{8}\right) \cdot \left(2x - \sqrt{8}\right)$

$a = 2x$

$b^2 = 8 \rightarrow b = \sqrt{8}$

6. Igualdades notables.

36 Calcula los siguientes productos.

a) $(x+7)\cdot(x-7)$

b) $(7x+4y)\cdot(7x-4y)$

c) $(3x^2+1)\cdot(3x^2-1)$

a) x^2-49

b) $49x^2-16y^2$

c) $9x^4-1$

37 Estudia si estos polinomios se pueden expresar como suma por diferencia.

a) x^2-1

b) $\frac{16}{9}-x^2$

c) x^4-9

d) $y^4-\frac{1}{4}$

a) $(x+1)\cdot(x-1)$

b) $\left(\frac{4}{3}+x\right)\cdot\left(\frac{4}{3}-x\right)$

c) $(x^2+3)\cdot(x^2-3)$

d) $\left(x^2+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x^2-\frac{1}{2}\right)$

38 Expresa en forma de producto.

a) $4x^2-4$

b) $9a^2-25b^2$

c) $100x^2-4z^6$

a) $(2x+2)\cdot(2x-2)$

b) $(3a+5b)\cdot(3a-5b)$

c) $(10x+2z^3)\cdot(10x-2z^3)$

6. Igualdades notables.

39 **REFLEXIONA.** Observa el siguiente ejemplo y calcula mentalmente.

$$1000^2 - 999^2 = (1000 + 999) \cdot (1000 - 999) =$$
$$= 1999 \cdot 1 = 1999$$

a) $46^2 - 45^2$ b) $26^2 - 24^2$ c) $102^2 - 98^2$

a) $91 \cdot 1 = 91$

b) $50 \cdot 2 = 100$

c) $200 \cdot 4 = 800$

40 Escribe los polinomios como producto de dos factores o como un cuadrado.

a) $x^2 - 16$ d) $x^2 - 4x + 4$

b) $x^4 - 36$ e) $16x^2 - 24xy + 9y^2$

c) $4x^2 - 25$ f) $16x^4 + 24x^2 + 9$

a) $(x - 4)(x + 4)$ d) $(x - 2)^2$

b) $(x^2 - 6)(x^2 + 6)$ e) $(4x - 3y)^2$

c) $(2x - 5)(2x + 5)$ f) $(4x^2 + 3)^2$

41 Expresa estos polinomios como el cuadrado de una suma o diferencia.

a) $9x^2 + 18x + 9$ d) $4x^2 - 4x + 1$

b) $16x^2 - 16x + 4$ e) $9x^4 + 6x^2 + 1$

c) $x^2 + 16x + 64$ f) $25x^4 + 20x^3 + 4x^2$

a) $(3x + 3)^2$ d) $(2x - 1)^2$

b) $(4x - 2)^2$ e) $(3x^2 + 1)^2$

c) $(x + 8)^2$ f) $(5x^2 + 2x)^2$

6. Igualdades notables.

42 Expresa como igualdad notable si es posible.

a) $16xy + 4xy^2$
b) $9x^2 - 6x + 1$
c) $x^2 + 4xy + 4y^2$
d) $9x^2 + 16$
e) $36z^2 - y^4$
f) $9x^2 + xy + 4y^2$

a) No se puede.
b) $(3x - 1)^2$
c) $(x + 2y)^2$
d) No se puede.
e) $(6z - y^2)(6z + y^2)$
f) No se puede.

43 Escribe como igualdades notables, si se puede.

a) $\frac{x^2}{4} - 4y^2$
b) $4y^2 + \frac{x^2}{9} + \frac{4}{3}xy$
c) $\frac{x^2}{4} - \frac{2}{3}xy + \frac{4y^2}{9}$
d) $\frac{x^2}{4} + \frac{2}{3}x$

a) $\left(\frac{x}{2} - 2y\right)\left(\frac{x}{2} + 2y\right)$
b) $\left(2y + \frac{x}{3}\right)^2$
c) $\left(\frac{x}{2} - \frac{2}{3}y\right)^2$
d) No se puede.

7. Factorización de un polinomio.

7. Factorización de un polinomio

Si $(x - a)$ es divisor de un polinomio $P(x)$, entonces a es divisor del término independiente de $P(x)$.

7.1. Divisores de un polinomio

Un polinomio, $Q(x)$, es **divisor** de otro polinomio, $P(x)$, cuando la división $P(x) : Q(x)$ tiene como resto 0.

Cuando una división no tiene resto 0, el dividendo es igual al cociente por el divisor más el resto.

EJEMPLO

17. Comprueba si $(x - 2)$ es divisor de estos polinomios.

a) $x^4 - 3x^2 - 5x + 6$

Dividimos el polinomio entre $(x - 2)$ y comprobamos si el resto es cero.

$(x^4 - 3x^2 - 5x + 6) : (x - 2)$

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 0 & -3 & -5 & 6 \\
2 & & 2 & 4 & 2 & -6 \\
\hline
 & 1 & 2 & 1 & -3 & \boxed{0}
\end{array}
$$

El resto de la división es cero, luego $(x - 2)$ es divisor de $x^4 - 3x^2 - 5x + 6$.

$$x^4 - 3x^2 - 5x + 6 = (x - 2) \cdot (x^3 + 2x^2 + x - 3)$$

7. Factorización de un polinomio.

b) $x^4 - 2x^3 - 3x + 12$

Dividimos el polinomio entre $(x - 2)$ y comprobamos si el resto es cero.

$(x^4 - 2x^3 - 3x + 12) : (x - 2)$

	1	−2	0	−3	12
2		2	0	0	−6
	1	0	0	−3	$\boxed{6}$

El resto de la división no es cero, luego $(x - 2)$ no es divisor de $x^4 - 2x^3 - 3x + 12$.

$$x^4 - 2x^3 - 3x + 12 = (x - 2) \cdot (x^3 - 3) + 6$$

7.2. Factorización de polinomios

Factorizar un polinomio consiste en escribirlo como producto de sus polinomios divisores de menor grado.

Para factorizar un polinomio utilizamos estas técnicas, cuando sea posible sacar factor común (cuando todos los términos tienen un divisor común), las igualdades notables y la regla de Ruffini.

7. Factorización de un polinomio.

44 Comprueba si $(x-3)$ es divisor de los siguientes polinomios.

a) $P(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 12x - 10$

b) $Q(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 3x - 9$

c) $R(x) = x^4 - 81$

d) $S(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2$

e) $T(x) = x^3 + 2x^2 - 9x - 18$

a) No, porque 3 no es divisor de -10.

b) Sí.

c) Sí.

d) $S(x) = x^2(x^2 - 2x - 3) \rightarrow$ Sí.

e) Sí.

45 Halla la suma de los polinomios con divisor $(x+1)$.

$$P(x) = 2x^4 + x^3 - 7x^2 - 6x$$

$$Q(x) = x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18$$

$$R(x) = x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 6x - 8$$

$P(x) = x(2x^3 + x^2 - 7x - 6)$

$(x+1)$ es divisor de $P(x)$.

$(x+1)$ no es divisor de $Q(x)$.

$(x+1)$ es divisor de $R(x)$.

$P(x) + R(x) = 3x^4 - 3x^3 - 10x^2 - 12x - 8$

46 **REFLEXIONA.** Calcula los divisores del polinomio $P(x) = x(x-1)(x+1)$.

1, x, $(x-1)$, $(x+1)$, $x \cdot (x-1)$,
$x \cdot (x+1)$, $(x-1)(x+1)$,
$x(x-1)(x+1)$

7. Factorización de un polinomio.

Cómo se factoriza un polinomio

Factoriza el polinomio:

$$P(x) = 9x^5 + 9x^4 - 4x^3 - 4x^2$$

1 Sacamos factor común, si es posible.

- $P(x) = \underbrace{9x^5 + 9x^4 - 4x^3 - 4x^2}_{x \text{ aparece en todos los términos.}}$ ← El menor exponente es 2. Tomamos x^2.
- m.c.d. $(9, 9, 4, 4) = 1$

→ Factor común: x^2

$$9x^5 + 9x^4 - 4x^3 - 4x^2 = x^2(9x^3 + 9x^2 - 4x - 4)$$

7. Factorización de un polinomio.

Continuamos factorizando el polinomio de grado 3.

(2) Aplicamos la regla de Ruffini para encontrar factores del tipo $(x - a)$, donde a siempre tiene que ser un número divisor del término independiente del polinomio.

$9x^3 + 9x^2 - 4x - 4$

El término independiente es 4.

Div (4) = {1, −1, 2, −2, 4, −4}

$$\begin{array}{r|rrrr} & 9 & 9 & -4 & -4 \\ 1 & & 9 & 18 & 14 \\ \hline & 9 & 18 & 14 & \boxed{10} \end{array} \neq 0$$

No es divisor.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 9 & 9 & -4 & -4 \\ -1 & & -9 & 0 & 4 \\ \hline & 9 & 0 & -4 & \boxed{0} \end{array}$$

Es divisor.

$$9x^3 + 9x^2 - 4x - 4 = (x + 1)(9x^2 - 4)$$

(3) Comprobamos si se pueden aplicar las igualdades notables.

$9x^2 - 4$

Dos términos y una resta: es suma por diferencia.

$a^2 - b^2$

$9x^2 - 4$

$9x^2 = a^2 \rightarrow a = 3x$

$4 = b^2 \rightarrow b = 2$

$9x^2 - 4 = (3x + 2)(3x - 2)$

(4) Escribimos el polinomio inicial como el producto de todos los polinomios divisores de menor grado que hemos calculado.

$$\begin{aligned} P(x) = 9x^5 + 9x^4 - 4x^3 - 4x^2 &= x^2(9x^3 + 9x^2 - 4x - 4) = \\ &= x^2(x + 1)(9x^2 - 4) = \\ &= x^2(x + 1)(3x + 2)(3x - 2) \end{aligned}$$

7. Factorización de un polinomio.

47 Factoriza estos polinomios.

a) $A(x) = x^2 - x - 6$
b) $B(x) = 2x^2 - 6x + 4$
c) $C(x) = 16x^2 - 49$
d) $D(x) = x^2 + x - 20$
e) $E(x) = y^2 + 9y + 20$
f) $F(x) = x^2 + 5x + 6$
g) $G(x) = x^2 + 2x - 8$

a) $(x + 2)(x - 3)$
b) $2(x - 1)(x - 2)$
c) $(4x - 7)(4x + 7)$
d) $(x - 4)(x + 5)$
e) $(x + 5)(x + 4)$
f) $(x + 2)(x + 3)$
g) $(x - 2)(x + 4)$

48 Encuentra la descomposición factorial de estos polinomios.

a) $x^3 + x^2 - 12x$
b) $x^3 + 8x^2 + 19x + 12$
c) $x^3 + 10x^2 + 33x + 36$
d) $x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$
e) $x^5 + 4x^4 - 5x^3 - 20x^2 + 4x + 16$
f) $2x^6 + 6x^5 - 2x^2 - 6x$

a) $x(x + 4)(x - 3)$
b) $(x + 1)(x + 3)(x + 4)$
c) $(x + 3)^2(x + 4)$
d) $(x - 1)(x + 2)(x^2 + 1)$
e) $(x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 2)(x + 4)$
f) $2x(x + 3)(x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)$