b) $32\,210{,}20 = 20\,000 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^5 \rightarrow$

$\rightarrow r = \left(\sqrt[5]{\frac{32\,210{,}23}{20\,000}} - 1\right) \cdot 100 = 10$

Hay que invertir el dinero al 10 %.

c) No es cierto, como se muestra en los apartados anteriores.

d) $C_f = 20\,000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^{10} = 32\,577{,}89$ €

No será el doble que si lo invertimos durante 5 años, como se muestra en el apartado a).

ACTIVIDADES FINALES

1. Calcula términos de una sucesión numérica

ACTIVIDADES FLASH

56 Indica los tres términos siguientes de estas sucesiones.

a) 1, −1, 2, −2, 3, −3, …

b) 2, 3, 5, 7, 11, …

c) $a_1 = 2, a_n = -a_{n-1}$

d) $a_1 = 2, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

a) 4, −4, 5, … c) −2, 2, −2, …

b) 13, 17, 19, … d) 3, 4, 7, …

57 Encuentra los 4 primeros términos.

a) Su primer término es 5 y cada término se obtiene sumando 3 al término anterior.

b) Su primer término es −2 y cada término se obtiene multiplicando por 3 el término anterior.

a) 5, 8, 11, 14, …

b) −2, −6, −18, −54, …

ACTIVIDADES FLASH

58 Decide si en estas sucesiones aparece el número 50.

a) La sucesión formada por los múltiplos de 3.

b) La sucesión formada por los cuadrados de los números naturales.

c) La sucesión en la que cada término es el número que indica su posición.

a) No. b) No. c) Sí.

59 Siendo $a_1 = 3$, da 5 términos de estas sucesiones:

a) Cada término es el triple del anterior.

b) Cada término es igual al cuadrado de la posición que ocupa más el término anterior.

a) 3, 9, 27, 81, 243, …

b) 3, 7, 16, 32, 57, …

60 Resuelve el crucigrama. Para ello, completa las horizontales con los términos que faltan en las sucesiones. Después, comprueba que lo has hecho bien calculando a_3 en las sucesiones verticales.

HORIZONTALES:

1. 2, 5, □, 11, 14, …
2. 3, 33, □, 3333, …
3. 1, 8, □, 64, …; 15, 20, □, 30, …
4. 3, 6, □, 24, …; 10, −12, □, −16, …
5. 90, 86, □, 78, …; 24, □, 13, 9, 6, …

6. 1, 13, □, 1357, …
7. 1, −1, □, −1, …

VERTICALES:

1. $a_n = n^2 - 2^n$
2. $a_n = n^2 \cdot (n + 2)^2 + 3$
3. $a_n = 12n + 1$
   $a_n = 2n^2 + n$
4. $a_n = n^4 + 2$
   $a_n = (4^n - 2) : 2$
5. $a_n = 2^{n+2}$
   $a_n = 7n - 6$
6. $a_n = 8^n + 2n$
7. $a_n = 10 - 2n$

Recuerda que cada cifra ocupará una casilla del crucigrama.

			8			
		3	3	3		
	2	7		2	5	
1	2				1	4
	8	2		1	8	
		1	3	5		
			1			

61 **INVENTA.** Escribe una sucesión recurrente. Para ello, da valores a a_1 y a_2 y crea una regla de recurrencia. Después, halla los 5 primeros términos de la sucesión.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$a_1 = 2,\ a_2 = 3;\ a_n = a_{n-2} + 2 \cdot a_{n-1}$

2, 3, 8, 19, 46, …

62 En la sucesión de los números impares:

a) ¿Cuál es el término a_{12}? ¿Y a_{23}? ¿Y a_{157}?

b) ¿Qué posición ocupa el número 15? ¿Y 1427?

c) ¿Existe un n tal que $a_n = 126$?

d) ¿Qué términos hay entre el número 25 y el 35?

Como $a_n = n + (n - 1)$:

a) $a_{12} = 23,\ a_{23} = 45,\ a_{157} = 313$

b) $15 = 2n - 1 \rightarrow n = 8 \rightarrow$ posición 8
$1427 = 2n - 1 \rightarrow n = 714 \rightarrow$
$\rightarrow$ Ocupa la posición 714.

c) No, porque 126 no es un número impar.

d) 27, 29, 31 y 33

63 Escribe los términos que se piden.

a) a_3 y a_4, siendo $a_n = (-1)^{n+1} \cdot 3n$

b) a_2 y a_3, siendo $a_n = \dfrac{1}{n^2} - n$

c) a_4 y a_5, siendo $a_n = n^3 \cdot (-1)^n$

d) a_6 y a_8, siendo $a_n = 2n - n^2 + 3$

a) $a_3 = 9,\ a_4 = -12$

b) $a_2 = -\dfrac{7}{4},\ a_3 = -\dfrac{26}{9}$

c) $a_4 = 64,\ a_5 = -125$

d) $a_6 = -21,\ a_8 = -45$

64 **INVESTIGA.** Di si el número 52 es un término de estas sucesiones e indica qué posición ocupa.

a) $a_n = 2n + 7$
b) $a_n = 3n + 7$
c) $a_n = 5n - 8$
d) $a_n = 5n - 4$

a) No.

b) Sí, su posición es 15.

c) Sí, su posición es 12.

d) No.

65 **INVENTA.** Escribe los términos generales de tres sucesiones en las que el cuarto término sea 18.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$a_n = 14 + n,\ b_n = 26 - 2n,\ c_n = 22 - n$

66 Calcula los términos de las sucesiones y asigna a cada número la letra que corresponde a su posición en el alfabeto inglés.

a) $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{2} + n$, si $n > 1$, con $a_1 = 0$.

> Ma$a_{11}a_5$emaa_{11}ics is a $a_9a_7$ace wa_5ea_{10}e you caa_8 a_3o $a_{11}a_5$i$a_8$gs w$a_5$ica_5 you caa_8`a_{11} a_3o ia_8 $a_{11}a_5$e a_{10}eaa_7 wo$a_{10}a_7a_3$.
>
> MARCUS DU SAUTOY

b) $b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$, $b_1 = 5$, $b_2 = -2$

> Mb_4thb_6mb_4tb_7b_3s b_7s b_4 gb_4mb_6 plb_4yb_6b_5 $b_4b_3b_3$or$b_5b_7b_8$g to $b_3b_6$rt$b_4b_7b_8$ s$b_7$mplb_6 rulb_6s b_9b_7th m$b_6b_4b_8b_7b_8$gless m$b_4$rks ob_8 pb_4pb_6r.
>
> DAVID HILBERT

a) Mathematics is a place where you can do things which you can't do in the real world.

b) Mathematics is a game played according to certain simple rules with meaningless marks on paper.

INTERNET

67 ●○○ **INVENTA.** Busca la regla de formación de la sucesión de Fibonacci. Elige dos valores negativos para a_1 y a_2 y escribe los 6 primeros términos de una sucesión similar.

La serie de Fibonnaci es: $a_1 = 1, a_2 = 1$ y $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

Elegimos dos valores negativos arbitrarios, por ejemplo: $a_1 = -2, a_2 = -4$.

$a_1 = -2, a_2 = -4, a_3 = -6, a_4 = -10,$
$a_5 = -16, a_6 = -26$

68 ●●○ Calcula los 6 primeros términos de estas sucesiones.

a) $a_3 = 5$ y $a_n = -a_{n-1} + 2$

b) $a_3 = 6$, $a_4 = 5$ y $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

a) $a_1 = 5, a_2 = -3, a_3 = 5, a_4 = -3,$
$a_5 = 5, a_6 = -3$

b) $a_1 = 7, a_2 = -1, a_3 = 6, a_4 = 5,$
$a_5 = 11, a_6 = 16$

2. Obtiene una ley de formación para el término general de una sucesión

ACTIVIDADES FLASH

69 ●○○ Relaciona cada sucesión con su término general.

a) 1, 2, 4, 8, …	1. 2^n
b) 2, 4, 8, 16, …	2. $2^n - 1$
c) 1, 3, 7, 15, …	3. 2^{n-1}

a) → 3. b) → 1. c) → 2.

70 ●●○ Calcula el término general de estas sucesiones.

a) $-1, 1, -1, 1, -1, \ldots$

b) $1, -1, 1, -1, 1, \ldots$

c) $1, -2, 3, -4, 5, \ldots$

d) $2, 4, 6, 8, 10, \ldots$

a) $a_n = (-1)^n$ c) $a_n = n \cdot (-1)^{n-1}$

b) $a_n = (-1)^{n-1}$ d) $a_n = 2n$

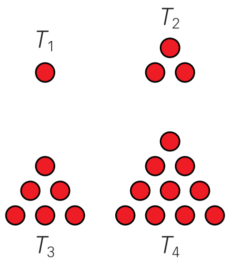
71 ●●○ Escribe el término general de la sucesión si:

a) Multiplicamos por 2 cada uno de los términos de la sucesión de término general $a_n = 3n - \dfrac{1}{2}$.

b) Sumamos 2 unidades a cada uno de los términos de la sucesión $a_n = 3n - \dfrac{1}{2}$.

a) $b_n = 6n - 1$ b) $b_n = 3n + \dfrac{3}{2}$

72 ●●● **INVESTIGA.** Los números triangulares son los que siguen esta serie:



a) Calcula T_5 y T_{10}.

b) Determina el término general.

a) $T_5 = 10 + 5 = 15$

$T_{10} = 15 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 21$

b) $a_n = a_{n-1} + n$

73 ●●○ Las siguientes sucesiones están relacionadas con la sucesión $a_n = n^2$. Deduce cuál es esa relación y, a partir de ella, escribe su término general.

a) 2, 8, 18, 32, …

b) 4, 9, 16, 25, …

c) 3, 6, 11, 18, …

a) $a_n = 2n^2$

b) $a_n = (n + 1)^2$

c) $a_n = n^2 + 2$

74 ●○○ **JUEGO.** Una persona escribe en secreto el término general de una sucesión y dice en voz alta su primer término. El resto de los participantes, por turnos, pueden pedirle el siguiente término, o bien intentar adivinar el término general.

Respuesta abierta.

75 ●●● **RETO.** ¿Cuál es el término general de estas sucesiones?

a) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

b) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \ldots$

c) $\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{12}, \ldots$

d) $1, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{5}{9}, \ldots$

a) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

b) $a_n = \frac{1}{2n - 1}$

c) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{3n}$

d) $a_n = \frac{n}{2n - 1}$

76 ●●● Dada la sucesión con ley de recurrencia:

$a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ a_3 = 4$

y $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}$

a) Escribe el término a_{n+2} en función a_n, a_{n-1} y a_{n-2}.

b) Calcula a_5 a partir de la expresión de a_{n+2}.

a) $\left.\begin{array}{l} a_{n+2} = a_{n+1} + a_n - a_{n-1} \\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1} - a_{n-2} \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow a_{n+2} = 2a_n - a_{n-2}$

b) $n = 3 \rightarrow$

$\rightarrow a_{3+2} = 2a_3 - a_{3-2} =$

$= 2 \cdot 4 - 2 = 6$

3. Identifica los elementos de progresiones aritméticas y geométricas

Progresiones aritméticas

ACTIVIDADES FLASH

77 ●○○ Decide si estas sucesiones son progresiones aritméticas y, si lo son, calcula su diferencia.

a) 7, 6, 5, 4, …

b) 20, 18, 16, 14, …

c) 2, 4, 2, 6, 2, 8, …

d) 6, 5, 3, 7, 6, 5, …

a) Sí. $d = -1$

b) Sí. $d = -2$

c) No.

d) No.

ACTIVIDADES FLASH

78 Indica la diferencia y el término a_4 de estas progresiones aritméticas.

a) $a_5 = 0$ y $a_6 = 5$

b) $a_6 = -1$ y $a_7 = 2$

c) $a_3 = 1$ y $a_5 = 7$

d) $a_6 = 3$ y $a_8 = 13$

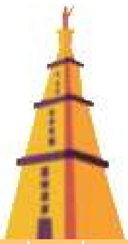
a) $d = 5, a_4 = -5$

b) $d = 3, a_4 = -7$

c) $d = 3, a_4 = 4$

d) $d = 5, a_4 = -7$

79 Ordena los términos de esta progresión aritmética con $d < 0$, y escribe el nombre de uno de los padres del álgebra.



N	O	D	I	O	F	A	T
−9	3	11	7	−17	−1	−5	−13

11, 7, 3, −1, −5, −9, −13, −17 → $\rightarrow d = -4 \rightarrow$ DIOFANTO

80 Averigua el término general y el quinto término.

a) $a_1 = 5$ y $d = -3$

b) $a_1 = -3$ y $d = -1$

c) $a_2 = -17$ y $d = 4$

d) $a_8 = 2$ y $d = -1$

a) $a_n = 8 - 3n \rightarrow a_5 = -7$

b) $a_n = -2 - n \rightarrow a_5 = -7$

c) $a_n = -25 + 4n \rightarrow a_5 = -5$

d) $a_n = 10 - n \rightarrow a_5 = 5$

81 Calcula la diferencia y el término general de estas progresiones aritméticas.

a) $a_1 = 1$ y $a_7 = 13$

b) $a_1 = -3$ y $a_5 = 17$

c) $a_2 = -5$ y $a_6 = 11$

d) $a_3 = 1$ y $a_8 = 16$

Después, completa el siguiente sudoku, utilizando las diferencias obtenidas en los huecos correspondientes. Recuerda, rellena los números del 1 al 6 en cada fila, columna y área sin que se repitan.

a) $d = 2$ c) $d = 4$

b) $d = 5$ d) $d = 3$

3	2	6	4	5	1
4	1	5	6	3	2
5	4	1	2	6	3
6	3	2	1	4	5
2	5	4	3	1	6
1	6	3	5	2	4

82 Calcula el lugar que ocupa el número 24 en estas progresiones aritméticas.

a) $a_n = 3n + 6$

b) $a_n = 2n - 10$

c) $a_n = 8 - n$

d) $a_n = 4n + 12$

a) Posición 6.

b) Posición 17.

c) No aparece el número 24 en esta progresión aritmética.

d) Posición 3.

83 Calcula el primer término, la diferencia y el término general de estas progresiones aritméticas.

a) $a_4 = 13$ y $a_{11} = 41 - a_2$

b) $a_3 = 6$ y $a_8 = 21 - a_1$

a) $d = 3, a_1 = 4, a_n = 1 + 3n$

b) $d = 3, a_1 = 0, a_n = -3 + 3n$

84 Completa esta progresión aritmética.

$$\square, \frac{1}{2}, \square, \frac{5}{6}, \square, \square, \dots$$

$\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1, \frac{7}{6}, \dots$

85 **INVENTA.** Escribe el término general y calcula los primeros 5 términos de una progresión aritmética sabiendo que $a_3 = 23$.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$a_n = -1 + 8n \rightarrow a_1 = 7$,
$a_2 = 15$,
$a_3 = 23$,
$a_4 = 31$,
$a_5 = 38$

86 De una progresión aritmética se sabe que los términos quinto y sexto suman 15,321.

a) ¿Cuánto suman los términos a_4 y a_7?

b) ¿Cuánto suman los términos a_3, a_4, a_7 y a_8?

a) 15,321

b) $2 \cdot 15{,}321 = 30{,}642$

Cómo se añaden números entre dos términos de una progresión aritmética

87 Añade tres números entre 7 y 23 para que todos ellos formen una progresión aritmética.

Resuelta en el libro de texto.

88 ¿En qué año nació Gauss? Estos matemáticos nacieron en años que siguen una progresión aritmética.

Laplace	Gauss	Dirichlet
1749		1805

$\frac{1805 - 1749}{2} = \frac{56}{2} = 28 \rightarrow$

$\rightarrow 1749 + 28 = 1777$

Gauss nació en 1777.

89 En un tablero de la oca hay colocadas 8 fichas. La primera está en la casilla 7 y la última en la casilla 63. Si todas están a igual distancia de la siguiente y de la anterior, ¿cada cuántas casillas hay una ficha? ¿En qué casillas están?

$\frac{63 - 7}{7} = \frac{56}{7} = 8$

Hay una ficha cada 8 casillas.

Están en las casillas 7, 15, 23, 31, 39, 47, 55 y 63.

90 **INVESTIGA.** Crea dos progresiones aritméticas, a_n y b_n. Suma los términos de ambas y crea la sucesión $c_n = a_n + b_n$. ¿Es c_n una progresión aritmética?

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$\left.\begin{array}{l} a_n = 2 + 3n \\ b_n = -1 + 2n \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow c_n = a_n + b_n = 1 + 5n$

Esta sigue siendo una progresión aritmética.

91 ¿Cuánto suman todas las caras de estos dados?

a) Dado de 20 caras numeradas del 1 a 20.

b) Dado de 10 caras con los múltiplos de 10 desde 0 en cada cara.

c) Dado de 8 caras con números pares desde 50.

d) Dado de 12 caras numeradas desde 100 a 111.

a) $S_{20} = \frac{(1+20) \cdot 20}{2} = \frac{420}{2} = 210$

b) $S_{10} = \frac{(0+90) \cdot 10}{2} = 450$

c) $S_8 = \frac{(50+64) \cdot 8}{2} = 456$

d) $S_{12} = \frac{(100+111) \cdot 12}{2} = 1\,266$

92 Averigua el término general de la progresión aritmética en cada caso.

a) $S_{16} = -528$ y $a_{16} = -3$

b) $S_{52} = 6\,682$ y $a_1 = 1$

c) $S_{35} = 1\,960$ y $a_3 = 11$

d) $S_{13} = 0$ y $a_8 = 8$

a) $-528 = \frac{(a_1 - 3) \cdot 16}{2} \rightarrow$
$\rightarrow a_1 = -63 \rightarrow a_n = -67 + 4n$

b) $6\,682 = \frac{(1 + a_{52}) \cdot 52}{2} \rightarrow$
$\rightarrow a_{52} = 256 \rightarrow a_n = -4 + 5n$

c) $1\,960 = \frac{(11 - 2d + 11 + 32d) \cdot 35}{2} \rightarrow$
$\rightarrow d = 3 \rightarrow a_n = 2 + 3n$

d) $0 = \frac{(8 - 7d + 8 + 5d) \cdot 13}{2} \rightarrow$
$\rightarrow d = 8 \rightarrow a_n = -56 + 8n$

93 **RETO.** Escribe los números enteros positivos en filas poniendo 13 números en cada fila. ¿En qué fila se cumple que la suma de sus números es 341 458?

$S_{13} = \frac{[a_1 + (a_1 + 12)] \cdot 13}{2} = 341\,471 \rightarrow$
$\rightarrow a_1 = 26\,261$

$26\,261 : 13 = 2\,020{,}07 \rightarrow$ En la fila 2 021.

Progresiones geométricas

ACTIVIDADES FLASH

94 Decide si son progresiones geométricas y, si lo son, calcula su razón.

a) 3, 9, 27, 81, …

b) 2, 4, 6, 8, 16, …

c) −8, 4, −2, 1, −0,5, …

d) 10, 5, 8, 4, 6, 3, …

a) Sí. $\rightarrow r = 3$

b) No es progresión geométrica.

c) Sí. $\rightarrow r = -\frac{1}{2}$

d) No es progresión geométrica.

95 Di los dos términos siguientes en estas progresiones geométricas.

a) $a_1 = 7,\ r = 2$

b) $a_1 = 5,\ r = -1$

c) $a_1 = -1,\ a_2 = 1$

d) $a_1 = 3,\ a_2 = 9$

a) $a_2 = 14,\ a_3 = 28$

b) $a_2 = -5,\ a_3 = 5$

c) $a_3 = -1,\ a_4 = 1$

d) $a_3 = 27,\ a_4 = 81$

Cómo se determina si una progresión es aritmética o geométrica

96 ¿Son progresiones aritméticas o geométricas?

a) 2, 6, 10, 14, …

b) 6, 12, 24, 48, …

Resuelta en el libro de texto.

97 Decide si son progresiones aritméticas o geométricas y calcula su diferencia o su razón.

a) 1, 3, 9, 27, …

b) 1, 3, 5, 7, 9, …

c) $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$

d) −4, 4, −4, 4, …

e) 6, 3, 0, −3, …

f) $\frac{1}{25}, \frac{1}{5}, 1, 5, \dots$

a) Geométrica → $r = 3$

b) Aritmética → $d = 2$

c) Geométrica → $r = \frac{1}{2}$

d) Geométrica → $r = -1$

e) Aritmética → $d = -3$

f) Geométrica → $r = 5$

98 **INVESTIGA.** ¿Pueden existir progresiones que sean al mismo tiempo aritméticas y geométricas?

Sí, una progresión aritmética con $d = 0$ y una progresión geométrica con $r = 1$ tendría los mismos números.
Por ejemplo, $a_n = 5$.

99 Ordena los términos de esta progresión geométrica sabiendo que $-1 < r < 0$, y averigua el nombre de este matemático.

D	U	C	E	E	I	L	S
1/3	27	−9	−1/9	−81	−1	3	1/27

$-81, 27, -9, 3, -1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{27}$

El matemático es EUCLIDES.

100 Halla el término general de estas sucesiones.

a) 7, −7, 7, −7, 7, …

b) $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, \dots$

c) $7^{-1}, 7^{-2}, 7^{-3}, 7^{-4}, \dots$

d) $1{,}25; \frac{15}{4}; 11{,}25; \frac{135}{4}; \dots$

a) $a_n = 7 \cdot (-1)^{n-1}$

b) $a_n = \frac{1}{4} \cdot 2^{n-1}$

c) $a_n = 7^{-1} \cdot (7^{-1})^{n-1} = 7^{-1} \cdot 7^{1-n} = 7^{-n}$

d) $a_n = 1{,}25 \cdot 3^{n-1}$

101 Calcula a_5 y averigua la altura de estos picos.

a) Everest → Progresión con $a_1 = 553$ y $r = 2$.

b) Kanchenjunga → Progresión con $a_1 = 106$ y $r = 3$.

a) $a_n = 553 \cdot 2^{n-1} \rightarrow a_5 = 8\,848$ m

b) $a_n = 106 \cdot 3^{n-1} \rightarrow a_5 = 8\,586$ m

102 **INVESTIGA.** ¿Puede ser el número 0 el primer término de una progresión geométrica o aritmética?

Sí, aunque en una progresión geométrica todos los términos serán 0.

103 Calcula los 5 primeros términos y la razón.

a) $a_n = (-3)^n$

b) $a_n = 3 \cdot (-2)^{n+1}$

c) $a_n = 2^{1-n}$

d) $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{7}$ siendo $a_1 = 2\,401$

a) $a_1 = -3$, $a_2 = 9$, $a_3 = -27$, $a_4 = 81$, $a_5 = -243 \rightarrow r = -3$

b) $a_1 = 12$, $a_2 = -24$, $a_3 = 48$, $a_4 = -96$, $a_5 = 192 \rightarrow r = -2$

c) $a_1 = 1$, $a_2 = \dfrac{1}{2}$, $a_3 = \dfrac{1}{4}$, $a_4 = \dfrac{1}{8}$, $a_5 = \dfrac{1}{16} \rightarrow r = \dfrac{1}{2}$

d) $a_1 = 2\,401$, $a_2 = 343$, $a_3 = 49$, $a_4 = 7$, $a_5 = 1 \rightarrow r = \dfrac{1}{7}$

104 **INVENTA.** Escribe el término general y calcula 5 términos de una progresión geométrica con $a_4 = 32$.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$a_n = 2^{n+1} \rightarrow 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$

105 Halla y escribe el término general de estas progresiones geométricas. ¿Tienen una única razón?

a) $a_2 = 6$, $a_3 = 12$

b) $a_3 = 5$, $a_4 = -10$

c) $a_3 = 18$, $a_5 = 648$

d) $a_2 = -1$, $a_6 = -81$

a) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} \rightarrow r = 2$

b) $a_n = \dfrac{5}{4} \cdot (-2)^{n-1} \rightarrow r = -2$

c) $a_n = \dfrac{1}{2} \cdot 6^{n-1} \rightarrow r = 6$

o $b_n = \dfrac{1}{2} \cdot (-6)^{n-1} \rightarrow r = -6$

d) $a_n = -\dfrac{1}{3} \cdot 3^{n-1} \rightarrow r = 3$

o $b_n = \dfrac{1}{3} \cdot (-3)^{n-1} \rightarrow r = -3$

106 **RETO.** Contesta razonadamente.

a) En una progresión geométrica en la que $a_1 \cdot a_2 = a_3$, ¿cuánto vale la razón?

b) En una progresión geométrica en la que $a_2 \cdot a_3 = a_4$, ¿cuánto vale el primer término?

a) $\dfrac{a_3}{a_2} = a_1 \rightarrow r = a_1$

b) $\dfrac{a_4}{a_3} = a_2 \rightarrow r = a_2$

$a_2 = a_1 \cdot r^1 = a_1 \cdot a_2 \rightarrow a_1 = \dfrac{a_2}{a_2} = 1$

107 El tercer término de una progresión geométrica es $\dfrac{12}{5}$ y la razón es 10. ¿Qué lugar ocupan estos números en la progresión?

a) $\dfrac{12}{500}$

b) 24

c) 240000

$a_n = \dfrac{3}{125} \cdot 10^{n-1}$

a) $\dfrac{3}{125} \cdot 10^{n-1} = \dfrac{12}{500} \rightarrow n = 1$

b) $\dfrac{3}{125} \cdot 10^{n-1} = 24 \rightarrow n = 4$

c) $\dfrac{3}{125} \cdot 10^{n-1} = 240\,000 \rightarrow n = 8$

108 Dos términos consecutivos de una progresión geométrica son 7 y 8. Averigua qué lugar ocupan sabiendo que $a_1 = \dfrac{343}{64}$.

Como el término general es

$$a_n = \frac{343}{64} \cdot \left(\frac{8}{7}\right)^{n-1} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{343}{64} \cdot \left(\frac{8}{7}\right)^{n-1} = 7 \rightarrow n = 3$$

El 7 ocupa la posición 3 y el 8 ocupa la posición 4.

109 ●●○ **INVESTIGA.** Escribe dos progresiones geométricas a_n y b_n. Suma los términos de ambas progresiones y crea la sucesión $c_n = a_n + b_n$. ¿Es c_n una progresión geométrica? ¿Y la sucesión $d_n = a_n \cdot b_n$?

Sean dos progresiones geométricas:
$a_n = a_1 \cdot r_1^{n-1}$ y $b_n = b_1 \cdot s_1^{n-1}$

Suma: $c_n = a_1 \cdot r_1^{n-1} + b_1 \cdot s_1^{n-1}$

No se puede simplificar, luego en general no es una progresión geométrica.

Producto:
$d_n = a_1 \cdot r_1^{n-1} \cdot b_1 \cdot s_1^{n-1} = a_1 \cdot b_1 \cdot (r_1 s_1)^{n-1}$

Es una progresión geométrica cuyo primer término vale $a_1 b_1$ y su razón vale $r_1 s_1$.

110 ●○○ Obtén la suma de los 7 primeros términos de estas progresiones geométricas.

a) $a_n = (-2) \cdot 3^{n+1}$

b) $a_n = 3^{n-2}$

c) $a_n = (-3) \cdot 2^{n+2}$

d) $a_n = (-2)^{n-1}$

a) $S_7 = \dfrac{-18 \cdot (3^7 - 1)}{3 - 1} = -19\,674$

b) $S_7 = \dfrac{\frac{1}{3} \cdot (3^7 - 1)}{3 - 1} = \dfrac{1\,093}{3}$

c) $S_7 = \dfrac{-24 \cdot (2^7 - 1)}{2 - 1} = -3\,048$

d) $S_7 = \dfrac{(-2)^7 - 1}{-2 - 1} = 43$

111 ●●○ Halla los 5 primeros términos de estas progresiones.

a) $a_1 = 6,\ r = 1$

b) $a_2 = -1,\ r = \dfrac{1}{3}$

c) $a_2 = 10,\ a_3 = 1$

d) $a_2 = 2,\ a_4 = \dfrac{2}{9}$

Después, calcula su suma y utiliza la calculadora para comprobar que lo has hecho bien.

a) $6, 6, 6, 6, 6, \dots \qquad S_5 = 30$

b) $-3, -1, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{27}, \dots$

$$S_5 = \frac{-3 \cdot \left(\left(\frac{1}{3}\right)^5 - 1\right)}{\frac{1}{3} - 1} = -\frac{121}{27}$$

c) $r = \dfrac{1}{10} \rightarrow 100, 10, 1, \dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{100}, \dots$

$$S_5 = \frac{100 \cdot \left(\left(\frac{1}{10}\right)^5 - 1\right)}{\frac{1}{10} - 1} = 111{,}11$$

d) Primera solución:

$r = \dfrac{1}{3} \rightarrow 6, 2, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{9}, \dfrac{2}{27} \dots$

$$S_5 = \frac{6 \cdot \left(\left(\frac{1}{3}\right)^5 - 1\right)}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{242}{27}$$

Segunda solución:

$r = -\dfrac{1}{3} \rightarrow -6, 2, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{9}, -\dfrac{2}{27} \dots$

$$S_5 = \frac{-6 \cdot \left(\left(-\frac{1}{3}\right)^5 - 1\right)}{-\frac{1}{3} - 1} = -\frac{122}{27}$$

112 ●○○ Calcula, si es posible, la suma de todos los términos de estas progresiones geométricas.

a) 10; 2; 0,4; 0,08; …

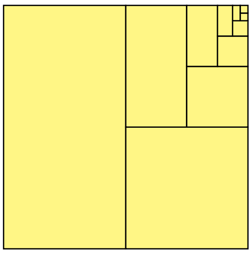
b) 16; 12; 9; 6,75; …

a) $S = \dfrac{10}{1 - \dfrac{1}{5}} = \dfrac{25}{2}$

b) $S = \dfrac{16}{1 - \dfrac{3}{4}} = 64$

113 **RETO.** ¿Sabrías obtener una progresión geométrica de este gráfico?

Si utilizas la fórmula para calcular su suma, ¿sabrías decir cuál es la suma de sus infinitos términos?



$\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, \ldots \rightarrow a_n = \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$S = \dfrac{\dfrac{1}{2}}{1 - \dfrac{1}{2}} = 1$

114 Halla, si se puede, la suma de los infinitos términos de estas progresiones geométricas.

a) $a_1 = 3,\ a_2 = -1$

b) $a_1 = -1,\ a_2 = -3$

c) $a_1 = -6,\ r = \dfrac{1}{5}$

d) $a_1 = -2,\ r = -3$

a) $S = \dfrac{3}{1 + \dfrac{1}{3}} = \dfrac{9}{4}$

b) $|r| > 1 \rightarrow$ La suma no se puede calcular.

c) $S = \dfrac{-6}{1 - \dfrac{1}{5}} = -\dfrac{15}{2}$

d) $|r| > 1 \rightarrow$ La suma no se puede calcular.

115 Escribe los 5 primeros términos de la progresión geométrica que tiene $a_1 = \dfrac{4}{3}$ y cuya suma de todos sus términos es 2.

$2 = \dfrac{\dfrac{4}{3}}{1 - r} \rightarrow r = \dfrac{1}{3}$

$a_1 = \dfrac{4}{3},\ a_2 = \dfrac{4}{9},\ a_3 = \dfrac{4}{27},\ a_4 = \dfrac{4}{81},$

$a_5 = \dfrac{4}{243}$

116 **INVENTA.** Escribe el primer término y la razón de una progresión geométrica tal que la suma de sus infinitos términos sea:

a) $+\infty$

b) $-\infty$

c) No se pueda calcular.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $a_1 = 2,\ r = 5$

b) $a_1 = -2,\ r = 5$

c) $a_1 = 1,\ r = -1$

4. Resuelve problemas utilizando sucesiones

117 Una persona decide empezar a correr y el primer día que sale tan solo aguanta 6 minutos. Se marca como objetivo correr cada día 3 minutos más que el anterior hasta que consiga correr una hora. ¿Cuántos días tardará en conseguirlo?

$60 = 6 + (n - 1) \cdot 3 \rightarrow$
$\rightarrow 18 = n - 1 \rightarrow n = 19$

Tardará 19 días en conseguirlo.

118 **MATEMÁTICAS Y… BIOLOGÍA.** El proceso de reproducción de las células se denomina *mitosis* y consiste en que cada célula se divide en dos más exactamente iguales. ¿Cuántas células se obtendrán a partir de la original cuando se haya cumplido este ciclo en 10 ocasiones?

Cada célula se divide siempre en dos, luego en diez ciclos:

$2^{10} = 1\,024$

Se obtendrán 1 024 células a partir de la célula original.

119 Lanzamos un balón que da botes a lo largo de un pasillo.

Si al séptimo bote choca con la pared y se para, ¿qué distancia habrá recorrido?

Teniendo en cuenta las distancias que aparecen en la figura:

$$S_7 = \frac{1 \cdot \left(\left(\frac{2}{3}\right)^7 - 1\right)}{\frac{2}{3} - 1} = \frac{2\,059}{729} = 2{,}82$$

El balón habrá recorrido 2,82 m.

120 La primera etapa de la vuelta a Galicia son 35 km. Cada nueva etapa se hacen 5 km más. Si la vuelta dura 7 días, ¿cuántos kilómetros se recorren en total?

$$S_7 = \frac{(35 + 65) \cdot 7}{2} = 350$$

En total se recorren 350 km.

121 **MATEMÁTICAS Y… DEPORTE.** En el torneo de tenis Madrid Másters participan 64 jugadoras. Tras cada partido, la ganadora se clasifica para la siguiente ronda. Por ganar el primer partido reciben 20 000 euros. En las sucesivas rondas reciben 40 000 euros más que en la anterior. ¿Cuánto dinero recibirá la campeona?

$64 = 2^6$, la ganadora jugará 6 partidos.

$a_6 = 20\,000 + 5 \cdot 40\,000 = 220\,000$

La campeona recibirá 220 000 €.

122 **MATEMÁTICAS Y… MEDIOAMBIENTE.** Se estima que el nivel del mar está subiendo 3 mm anuales y que si sube un metro más desaparecerá el delta del Ebro. Si la situación no cambia, ¿cuánto tardaremos en perder este parque natural?

$$\frac{1000}{3} = 333{,}33$$

En 334 años habremos perdido este parque natural.

Esta actividad se puede utilizar para trabajar el ODS 14, vida submarina.

123 Una rana está en el borde de una charca circular de 5 m de radio y se desplaza saltando en línea recta hacia el centro. Cada vez avanza la mitad que en el salto anterior. En el primer salto avanza 3 m.

a) ¿En cuántos saltos llega al centro?

b) ¿Llega al centro si el primer salto es de 2 m?

a) $5 = \dfrac{3 \cdot ((1/2)^n - 1)}{1/2 - 1} \rightarrow n \approx 2{,}58$

Llega al centro en 3 saltos.

b) $\dfrac{2}{1 - 1/2} = 4$ m. Incluso haciendo infinitos saltos nunca llegaría al centro.

124 María está mirando pisos de nueva construcción.

a) Si los precios ascienden en una progresión aritmética conforme aumenta la altura, ¿cuánto cuesta cada piso? ¿Qué diferencia hay entre ellos?

b) El portal mide 5 m de altura; y cada piso, 3,5 m. ¿A qué altura se encuentra el séptimo piso?

c) Si María quiere comprar un piso que esté a más de 18 m de altura, pero no puede pagar más de 250 000 €, ¿qué piso puede comprar?

a) $(279\,300 - 205\,000) : 6 = 12\,383{,}33$

Hay una diferencia de 12 383,33 € entre un piso y el siguiente.

2.° piso: 217 383,33 €

3.^er^ piso: 229 766,66 €

4.° piso: 242 604, 99 €

5.° piso: 254 988,32 €

6.° piso: 267 371,65 €

b) $5 + 3{,}5 \cdot 7 = 29{,}5$ m

c) Puede comprar el cuarto piso.

Esta actividad se puede utilizar para trabajar el ODS 11, ciudades y comunidades sostenibles.

125 La población de una ciudad de 20 000 habitantes crece a un ritmo de un 2 % al año, ¿cuántos habitantes tendrá dentro de 10 años?

$a_{10} = 20\,000 \cdot (1{,}02)^9 = 23\,902$

Dentro de 10 años habrá 23 902 habitantes en la ciudad.

126 El 31 de diciembre se depositan 5 000 € al 4 % anual. Si no se retiran durante 6 años, ¿qué capital habrá al finalizar cada uno de los 6 años?

$C_f = 5\,000 \cdot (1{,}04)^t$

$T = 1 \rightarrow C_f = 5\,200$ €

$T = 2 \rightarrow C_f = 5\,408$ €

$T = 3 \rightarrow C_f = 5\,624{,}32$ €

$T = 4 \rightarrow C_f = 5\,849{,}29$ €

$T = 5 \rightarrow C_f = 6\,083{,}26$ €

$T = 6 \rightarrow C_f = 6\,326{,}60$ €

127 Calcula el capital que, invertido a un interés compuesto del 5 %, produce 1 500 € en 4 años.

$1\,500 = C \cdot (1{,}05)^4 \rightarrow C = 1\,234$

Hay que invertir 1 234 €.

128 Si un capital de 5 000 € se convierte en 6 000 € en una situación de interés compuesto al cabo de 2 años, ¿cuál es el rédito al que ha estado invertido?

$6\,000 = 5\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{r}{100}\right)^2 \rightarrow$

$\rightarrow r = 9{,}54\,\%$

129 ●●○ **MATEMÁTICAS Y... CIBERSEGURIDAD.** Uno de los tipos de virus que pueden afectar a tu móvil es el denominado *gusano*, que se puede transmitir a través de mensajes de WhatsApp. Estos virus eligen al azar varios de tus contactos y le envían un mensaje. Al abrirlo, la persona que lo recibe activa el virus, que vuelve a repetir el proceso de la misma forma. Imagina que un móvil ha sido infectado con un *gusano*. El *gusano* elige al azar a 5 personas de sus contactos y les manda un mensaje. Si suponemos que las personas a las que se manda el mensaje siempre son diferentes, cuando el virus se haya reproducido ocho veces, ¿podría haber contagiado a todos los móviles de las personas que viven en tu localidad?

$$a_n = 5^n \rightarrow S_8 = \frac{5 \cdot (5^8 - 1)}{5 - 1} = 488\,280$$

Cuando el virus se haya reproducido 8 veces habrá infectado 488 280 móviles, así que habrá infectado todos los móviles de las personas que viven en mi localidad.

130 ●●● Si dejamos caer una canica, da un bote contra el suelo y sube hasta un tercio de la altura a la que se ha soltado. Si se deja caer a dos metros de altura, ¿cuántos rebotes dará antes de pararse? (Supondremos que deja de rebotar cuando se encuentra a menos de 1 cm de altura del suelo).

$$a_n = 200 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \rightarrow 1 = 200 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \rightarrow$$

$\rightarrow n \approx 5$. Dará 5 botes.

131 ●●● Para construir una torre de naipes, se colocan en la base el doble de cartas del número de pisos que queramos tener. A continuación, se coloca una carta en horizontal que soportará el siguiente piso de naipes.

a) Halla la sucesión que forma el número de cartas horizontales necesario según el número n de pisos.

b) Halla la sucesión que forma el número de cartas ladeadas necesario según el número n de pisos.

c) ¿Forman una sucesión el número de cartas necesario para una torre de tamaño n?

a) $a_1 = 0$, $a_n = a_{n-1} + (n - 1)$

b) $b_1 = 2$, $b_n = b_{n-1} + 2n$

c) Sí $\rightarrow c_1 = 2$,
$c_n = a_n + b_n = c_{n-1} + (3n - 1)$

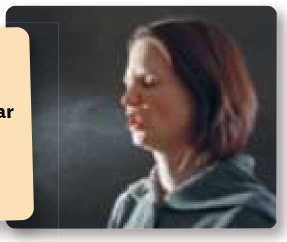
FAKE NEWS

¿Quién vigila la caja de Pandora?

La humanidad está alerta por una posible nueva pandemia.

El nuevo virus tiene una capacidad infección similar al de la varicela. Se estima que 10 personas contagiadas, sin vacunas y sin una férrea cuarentena podrían contagiar a toda la población de un país como España en menos de 2 meses y a la mitad de la población mundial en tan solo 2 semanas.

Virus: varicela
Personas que un enfermo puede infectar en una semana: 7
Transmisión: aérea (gotas) o contacto



Y tú, ¿qué opinas?

La progresión geométrica que representa el número de contagiados por semana es $a_n = 70 \cdot 7^{n-1}$.

$$S_8 = \frac{70 \cdot (7^8 - 1)}{7 - 1} = 67\,256\,000$$

En dos meses habría 67 256 000 contagiados, que son más que toda la población de España.

$$S_2 = \frac{70 \cdot (7^2 - 1)}{7 - 1} = 560$$

En dos semanas habría 560 contagiados, que son menos de la mitad de la población mundial.

Por tanto, la primera parte de la noticia es cierta, pero la segunda parte es falsa.

PROBLEMAS APARENTEMENTE DISTINTOS

132 En una progresión aritmética de diferencia 540 y cuyo primer término es 17 990, calcula:

a) El quinto término.

b) La suma de los términos hasta el quinto.

c) La suma de los diez primeros términos.

$a_n = 17\,990 + 540(n - 1)$

a) $a_5 = 20\,150$

b) $S_5 = \dfrac{(17\,990 + 20\,150) \cdot 5}{2} = 95\,350$

c) $S_{10} = \dfrac{[17\,990 + (17\,990 + 540 \cdot 9)] \cdot 10}{2} = 204\,200$

133 El sueldo bruto de Eva es 17 990 €. Según su contrato, su sueldo anual aumentará 540 € brutos cada año, durante 10 años.

a) ¿Cuánto cobrará el 5.º año?

b) ¿Cuánto habrá cobrado en 5 años?

c) ¿Y al finalizar el contrato?

a) $a_5 = 20\,150$ €

b) $S_5 = \dfrac{(17\,990 + 20\,150) \cdot 5}{2} = 95\,350$ €

c) $S_{10} = \dfrac{[17\,990 + (17\,990 + 540 \cdot 9)] \cdot 10}{2} = 204\,200$ €

134 Observa la siguiente progresión geométrica:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 4,\ \dots$$

a) Halla el cuarto término.

b) ¿Cuánto suman los 4 primeros términos de la progresión?

c) Calcula la suma de los 8 primeros términos.

a) $2^3 = 8$

b) $1 + 2 + 4 + 8 = 15$

c) $S_8 = \dfrac{1 \cdot (2^8 - 1)}{2 - 1} = 255$

135 Una tienda decide dar a su clientela un descuento cada mes: el primero será de 1 €; el segundo, de 2 €; el tercero, de 4 € y así sucesivamente hasta el octavo mes.

a) ¿Qué descuento dan el cuarto mes?

b) ¿Cuánto dinero regalan en esos cuatro meses?

c) Y hasta el octavo mes, ¿cuánto descuento dan?

a) $2^3 = 8$

Dan 8 € de descuento.

b) $1 + 2 + 4 + 8 = 15$

Regalan 15 €.

c) $S_8 = \dfrac{1 \cdot (2^8 - 1)}{2 - 1} = 255$

Dan 255 € de descuento.

136 Calcula el capital final obtenido al invertir 4 000 € a interés compuesto en cada uno de los siguientes casos.

a) Interés compuesto anual del 0,3 % durante 5 años.

b) 10 años a interés compuesto anual del 0,5 %.

c) Interés compuesto del 0,8 % durante 15 años.

¿Cuál es la suma de las tres cantidades anteriores?

a) $C_f = 4\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{0,3}{100}\right)^5 = 4\,060,36$ €

b) $C_f = 4\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{0,5}{100}\right)^{10} = 4\,204,56$ €

c) $C_f = 4\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{0,8}{100}\right)^{15} = 4\,507,83$ €

La suma de todas ellas es 12 772,75 €.

137 He visto un anuncio de venta de Letras del Tesoro.

Quiero invertir 12 000 € a partes iguales entre los tres tipos de Letras, ¿cuánto tendré a los 15 años?

Letras del Tesoro
A 5 años.
Interés anual: 0,3 %

Letras del Tesoro
A 15 años.
Interés anual: 0,8 %

Letras del Tesoro
A 10 años.
Interés anual: 0,5 %

Letras del Tesoro verde:

$C_f = 4\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{0,3}{100}\right)^5 = 4\,060,36$ €

Letras del Tesoro naranja:

$C_f = 4\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{0,5}{100}\right)^{10} = 4\,204,56$ €

Letras del Tesoro amarillo:

$C_f = 4\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{0,8}{100}\right)^{15} = 4\,507,83$ €

A los 15 años tendré 12 772,75 €.

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

1 ¿Cuánto dinero tengo que pedir?

Esta es la vivienda que me gustaría comprar: tiene mucha luz, es espaciosa y las zonas comunes son magníficas.

No dispongo de todo el dinero necesario para comprarla, así que tendré que pedir un préstamo hipotecario a una entidad bancaria.

Llevo ahorrando desde que comencé a trabajar a los 22 años. Ahora tengo 34 y he ahorrado una media de 780 € anuales.

- Cuando tenía 27 años, la cantidad que había ahorrado en los 5 años anteriores la invertí en un fondo de vivienda que me ofrecía el 1,25 % durante 5 años. ¿Qué cantidad invertí en el fondo? ¿Qué cantidad recibí a los 5 años?
- Así que, ahora mismo, el dinero del que dispongo es lo que he ahorrado durante estos años más la cantidad que recibí del fondo de vivienda. ¿Cuánto dinero de hipoteca tengo que solicitar?
- $780 \cdot 5 = 3\,900$
  Con 27 años había ahorrado 3 900 €.
  $3\,900 \cdot (1 + 0,0125)^5 = 4\,149,92$
  A los 5 años recibí 4 149,92 €.
- $4\,149,92 + 7 \cdot 780 = 9\,609,92$
  He ahorrado 9 609,92 €, por lo que tengo que pedir 125 390,08 €.