Tema 4

SUCESIONES

Índice

1. Sucesiones.

1. Sucesiones

Una **sucesión** es un conjunto ordenado de números reales:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots$$

Cada número de la sucesión se llama **término** y se designa por a_i, donde i indica el lugar que ocupa en la sucesión.

EJEMPLO

1. Indica cuáles son los términos a_2 y a_5 en las siguientes sucesiones.

a) 5, 9, 13, 17, 21, 25, …

b) 6, 3, 0, −3, −6, −9, −12, …

c) 3, 6, 12, 24, 48, 96, …

d) 31, 29, 27, 25, 23, 21, …

a_2 es el segundo término y a_5 es el quinto.

a) $a_2 = 9, a_5 = 21$

b) $a_2 = 3, a_5 = -6$

c) $a_2 = 6, a_5 = 48$

d) $a_2 = 29, a_5 = 23$

1. Sucesiones.

1.1. Regla de formación

Existen sucesiones en las que se pueden determinar sus términos a partir de un cierto criterio; a este criterio se le llama **regla de formación.**

Para determinar la regla de formación, estudiamos la relación que existe entre los términos y la posición que ocupan.

EJEMPLO

2. Indica la regla de formación de cada sucesión y averigua sus dos términos siguientes.

a) $-1, -2, -3, -4, -5, \ldots \rightarrow$ Cada término es el opuesto de la posición que ocupa: -6, -7.

b) 1, 11, 111, 1 111, 11 111, … → Cada término tiene tantos unos como el lugar que ocupa en la sucesión: 111 111, 1 111 111.

c) $-3, -6, -9, -12, -15, \ldots \rightarrow$ Cada término es el anterior menos 3 unidades: -18, -21.

d) 7, 9, 11, 13, 15, … → Cada término es el anterior más dos unidades: 17, 19.

e) 1, 4, 9, 16, 25, … → Cada término es el cuadrado de la posición que ocupa: 36, 49.

f) 4, 2, 6, 8, 14, … → El primer término es 4, el segundo es 2 y los siguientes son la suma de los dos términos anteriores: 22, 36.

1. Sucesiones.

1 Escribe los términos a_1 y a_4 en las siguientes sucesiones.

a) 1, 12, 123, 1 234, 12 345, …

b) 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, …

c) 11, 121, 1 331, 14 641, 161 051, …

d) $\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, \ldots$

a) $a_1 = 1,\ a_4 = 1\,234$

b) $a_1 = 6,\ a_4 = 12$

c) $a_1 = 11,\ a_4 = 14\,641$

d) $a_1 = \frac{1}{6},\ a_4 = \frac{4}{6}$

2 Averigua la regla de formación de estas sucesiones y escribe dos términos más de cada una de ellas.

a) 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; …

b) 5, 8, 11, 14, 17, 20, …

c) 1, 8, 27, 64, 125, …

d) 3, 7, 10, 17, 27, 44, …

a) Cada término es el anterior más 0,1.
0,6 y 0,7

b) Cada término es el anterior más 3 unidades.
23 y 26

c) Cada término es n^3 donde n es el lugar que ocupa en la sucesión.
216 y 343

d) El primer término es 3, el segundo 7 y a partir de ahí el siguiente término es la suma de los dos anteriores.
71 y 115

1. Sucesiones.

3 REFLEXIONA. Escribe la sucesión cuyos primeros términos son $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ y $a_3 = 4$, y los siguientes se calculan sumando los tres anteriores.

2, 3, 4, 9, 16, 29, 54, 99, …

1.2. Término general

El **término general** de una sucesión es una expresión algebraica que permite calcular cualquier término de la sucesión sabiendo el lugar que ocupa. Se representa por a_n.

EJEMPLO

3. Calcula el término general de cada sucesión y sus términos a_{10} y a_{100}.

a) 5, 10, 15, 20, 25, 30, …

$$\left.\begin{array}{ll} a_1 = 5 \cdot 1 & a_3 = 5 \cdot 3 \\ a_2 = 5 \cdot 2 & a_4 = 5 \cdot 4 \end{array}\right\} \rightarrow$$ Cada término es el lugar que ocupa multiplicado por 5.

Término general: $a_n = 5 \cdot n \rightarrow$ Siendo n el lugar que ocupa.

$a_n = 5n \xrightarrow{n\,=\,10} a_{10} = 5 \cdot 10 = 50$ $\qquad$ $a_n = 5n \xrightarrow{n\,=\,100} a_{100} = 5 \cdot 100 = 500$

1. Sucesiones.

b) 2, 5, 8, 11, 14, 17, ...

$a_1 = 3 \cdot 1 - 1$ $\quad a_3 = 3 \cdot 3 - 1$
$a_2 = 3 \cdot 2 - 1$ $\quad a_4 = 3 \cdot 4 - 1$ → Cada término es el lugar que ocupa multiplicado por 3 menos una unidad.

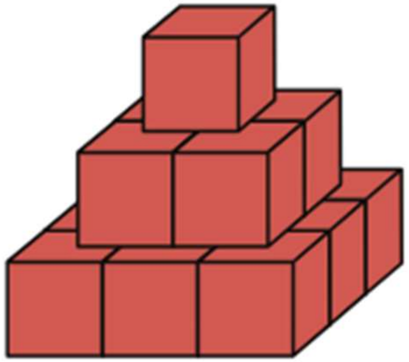
Término general: $a_n = 3 \cdot n - 1$ → Siendo n el lugar que ocupa.

$$a_n = 3n - 1 \xrightarrow{n = 10} a_{10} = 3 \cdot 10 - 1 = 29$$

$$a_n = 3n - 1 \xrightarrow{n = 100} a_{100} = 3 \cdot 100 - 1 = 299$$

RETO

Construimos pirámides con cubos. Si tenemos 140 cubos, ¿hasta qué altura podemos llegar?



Como el término general de la sucesión es $a_n = 1^2 + \ldots + n^2 \rightarrow 1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, \ldots$ En la altura 7 habremos usado 140 cubos.

1. Sucesiones.

1.3. Sucesiones recurrentes

Una **sucesión** es **recurrente** cuando cada término, después de un término dado, se obtiene a partir de los anteriores.

El término anterior a a_n es a_{n-1} y el término posterior es a_{n+1}.

EJEMPLO

4. Halla el término general de esta sucesión y calcula dos términos más: 1, 2, 3, 6, 11, 20, …

Cada término se forma sumando los tres anteriores.

Término general: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$

$$a_7 = a_6 + a_5 + a_4 \rightarrow a_7 = 6 + 11 + 20 = 37$$
$$a_8 = a_7 + a_6 + a_5 \rightarrow a_8 = 11 + 20 + 37 = 68$$

4 Escribe los 5 primeros términos de las sucesiones que tienen estos términos generales.

a) $a_n = 4n$

b) $a_n = \frac{n}{3}$

c) $a_n = n^2 + n$

d) $a_n = \frac{n+1}{n}$

a) $a_1 = 4$, $a_2 = 8$, $a_3 = 12$, $a_4 = 16$, $a_5 = 20$

b) $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{2}{3}$, $a_3 = \frac{3}{3}$, $a_4 = \frac{4}{3}$, $a_5 = \frac{5}{3}$

1. Sucesiones.

c) $a_1 = 2, a_2 = 5, a_3 = 10, a_4 = 17,$
$a_5 = 26$

d) $a_1 = 2, a_2 = \frac{3}{2}, a_3 = \frac{4}{3}, a_4 = \frac{5}{4},$
$a_5 = \frac{6}{5}$

5 Halla los 4 primeros términos de una sucesión recurrente tal que $a_1 = 2$ y $a_n = -3 \cdot a_{n-1} + 5$.

$$a_1 = 2,\ a_2 = -1,\ a_3 = 8,\ a_4 = -19$$

6 **REFLEXIONA.** Determina el término general de esta sucesión recurrente:

$1, -2, 1, 2, -5, 4, 3, -12, \ldots$

$$a_n = a_{n-3} - a_{n-2} - a_{n-1},\ n > 3$$

2. Progresión aritmética.

2. Progresión aritmética

Una **progresión aritmética** es una sucesión en la que cada término (menos el primero) se obtiene a partir del anterior sumándole un número fijo *d*, llamado **diferencia** de la progresión.

En una progresión aritmética se cumple que:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots = d$$

EJEMPLO

5. Estudia estas sucesiones y decide si son progresiones aritméticas.

a) 4, 7, 10, 13, 16, 19, … b) 1, 2, 4, 7, 11, 16, …

Una sucesión es una progresión aritmética si $a_n - a_{n-1} = d$. Es decir:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = a_5 - a_4 = a_6 - a_5 = \dots = d$$

a) $7 - 4 = 10 - 7 = 13 - 10 = 16 - 13 = 19 - 16 = \dots = 3$ → Es una progresión aritmética con diferencia $d = 3$.

b) $2 - 1 = 1$; $4 - 2 = 2$; $7 - 4 = 3$; $11 - 7 = 4$; $16 - 11 = 5$ → No es una progresión aritmética.

2. Progresión aritmética.

2.1. Término general de una progresión aritmética

En una progresión aritmética, cada uno de sus términos es igual al anterior más la diferencia.

$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$
$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$
$$\ldots$$
$$a_n = a_1 + (n-1)d \leftarrow \text{Término general}$$

El término general de una progresión aritmética es:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

siendo a_1 el primer término y d la diferencia.

Dados dos términos a_p y a_q de una progresión aritmética ($p < q$), se cumple que $a_q = a_p + (q-p)d$.

2. Progresión aritmética.

7 Estudia si estas sucesiones son progresiones aritméticas y, en caso afirmativo, indica la diferencia.

a) 7, 14, 21, 28, 35, …

b) −3, −5, −7, −9, −11, …

c) −1, 1, 5, 11, 19, 29, …

d) 7, 6, 4, 1, −3, −8, …

e) $3, \frac{7}{3}, \frac{5}{3}, 1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \ldots$

a) Es una progresión aritmética y su diferencia es $d = 7$.

b) Es una progresión aritmética y su diferencia es $d = -2$.

c) No.

d) No.

e) Es una progresión aritmética y su diferencia es $d = -\frac{2}{3}$.

8 Comprueba que son progresiones aritméticas y calcula la diferencia y el primer término.

a) $a_n = 1 - 2n$

b) $a_n = \frac{2}{3}(n - 1)$

a) $a_1 = -1, a_2 = -3, a_3 = -5,$
$a_4 = -7$

Es una progresión aritmética y $d = -2$..

b) $a_1 = 0, a_2 = \frac{2}{3}, a_3 = \frac{4}{3}, a_4 = \frac{6}{3}$

Es una progresión aritmética y $d = \frac{2}{3}$.

2. Progresión aritmética.

9 **REFLEXIONA.** Halla la diferencia de la progresión aritmética que tiene como segundo y quinto términos estos dos siguientes:

$$a_2 = -\frac{1}{3},\ a_5 = \frac{7}{6}$$

$$a_5 = a_2 + 3d \rightarrow \frac{9}{6} = 3d \rightarrow d = \frac{1}{2}$$

10 Halla la diferencia en estas progresiones aritméticas.

a) 5,4; 4,8; 4,2; 3,6; 3; …

b) $a_1 = -5,\ a_{10} = -0{,}5$

c) $a_4 = 7,\ a_8 = 10$

d) $a_2 = 1{,}9,\ a_5 = 1{,}6$

a) $d = -0{,}6$

b) $d = 0{,}5$

c) $d = 0{,}75$

d) $d = -0{,}1$

11 Calcula el término general de las siguientes progresiones aritméticas.

a) $-13, -7, -1, 5, 11, \ldots$

b) $d = -1{,}2;\ a_3 = 2$

c) $a_1 = 5,\ a_6 = 4$

d) $a_3 = -\frac{1}{2},\ a_6 = 1$

a) $a_n = -19 + 6n$

b) $a_n = 5{,}6 - 1{,}2n$

c) $a_n = 5{,}2 - 0{,}2n$

d) $a_n = -\frac{3}{2} + (n-1)\cdot\frac{1}{2} = -2 + \frac{n}{2}$

2. Progresión aritmética.

12 Averigua la diferencia de las progresiones aritméticas cuyo término general es el siguiente.

a) $a_n = 3n + 4$
b) $a_n = 5 - 2n$
c) $a_n = 3(n+1)$
d) $a_n = \frac{n}{2} - 3$

a) $d = 3$
b) $d = -2$
c) $d = 3$
d) $d = \frac{1}{2}$

13 Calcula la diferencia y el término general de las siguientes progresiones aritméticas.

a) $a_2 = 6, a_3 = 4$
b) $a_3 = 8, a_6 = \frac{29}{4}$
c) $a_{17} = 5, a_{21} = 4{,}6$
d) $a_3 = \frac{2}{5}, a_7 = \frac{6}{5}$

a) $d = -2,\ a_n = 10 - 2n$
b) $d = -\frac{1}{4},\ a_n = \frac{35}{4} - \frac{1}{4}n$
c) $d = -0{,}1;\ a_n = 6{,}7 - 0{,}1n$
d) $d = \frac{1}{5},\ a_n = -\frac{1}{5} + \frac{1}{5}n$

14 Comprueba que se trata de progresiones aritméticas y calcula su término general.

a) $\frac{2}{3}, \frac{7}{6}, \frac{5}{3}, \frac{13}{6}, \frac{8}{3}, \dots$

b) $-\frac{1}{5}, -\frac{7}{10}, -\frac{6}{5}, -\frac{17}{10}, -\frac{11}{5}, \dots$

2. Progresión aritmética.

a) $\frac{2}{3}, \frac{7}{6}, \frac{5}{3}, \frac{13}{6}, \frac{8}{3}, \dots = \frac{4}{6}, \frac{7}{6}, \frac{10}{6}, \frac{13}{6}, \frac{16}{6}, \dots$

Es una progresión aritmética.

$a_1 = \frac{2}{3} \qquad d = \frac{2}{3}$

$a_n = \frac{1}{6} + \frac{n}{2}$

b) $-\frac{1}{5}, -\frac{7}{10}, -\frac{6}{5}, -\frac{17}{10}, -\frac{11}{5}, \dots = -\frac{2}{10}, -\frac{7}{10}, -\frac{12}{10}, -\frac{17}{10}, -\frac{22}{10}, \dots$

Es una progresión aritmética.

$a_1 = -\frac{1}{5} \qquad d = -\frac{5}{10}$

$a_n = \frac{3}{10} - \frac{5n}{10}$

15 En una piscina hay una escalera con cuatro escalones. El más alto se encuentra a 185 cm del fondo de la piscina y el siguiente está a 155 cm del fondo. ¿A qué distancia del fondo está el primer escalón?

$a_n = 215 - 30n \rightarrow a_4 = 95$

El primer escalón se encuentra a 95 cm del fondo.

2. Progresión aritmética.

2.2. Suma de los *n* primeros términos de una progresión aritmética

Vamos a buscar una fórmula general para sumar los n primeros términos de una progresión aritmética. Para ello consideramos la suma de los n primeros términos de la progresión y cambiamos el orden:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n \qquad S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1$$

Sumando ambas expresiones:

$$\begin{array}{rlllll} & S_n = a_1 & + a_2 & + \ldots + a_{n-1} & + a_n \\ + & S_n = a_n & + a_{n-1} & + \ldots + a_2 & + a_1 \\ \hline & \multicolumn{5}{l}{2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)} \end{array}$$

Además, en una progresión aritmética, se cumple que:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \ldots$$

Como los sumandos son iguales a $(a_1 + a_n)$, tenemos que:

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n \rightarrow S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

2. Progresión aritmética.

La suma de los n primeros términos de una progresión aritmética, $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_n$, es: $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

RETO

Hay números que se pueden expresar como suma de números consecutivos:

$3 = 1 + 2$

$18 = 3 + 4 + 5 + 6$

¿Puedes escribir así las 5 primeras potencias de 3? ¿Y 3^{100}?

$3^1 = 3 = 1 + 2$

$3^2 = 9 = 2 + 3 + 4$

$3^3 = 27 = 8 + 9 + 10$

$3^4 = 81 = 26 + 27 + 28$

$3^5 = 243 = 80 + 81 + 82$

En general:

$3^n = (3^{n-1} - 1) + 3^{n-1} + (3^{n-1} + 1)$

$3^{100} = (3^{99} - 1) + 3^{99} + (3^{99} + 1)$

2. Progresión aritmética.

EJEMPLO

6. Calcula la suma de los 5 primeros términos de esta progresión aritmética: 5, 7, 9, 11, 13, ...

- Sumando los cinco primeros términos: $5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 45$
- Aplicando la fórmula: $S_5 = \dfrac{(5+13)\cdot 5}{2} = 45$

En ambos casos obtenemos el mismo resultado.

Como $a_n = a_1 + (n-1)d$, la fórmula para calcular la suma de los términos de una progresión aritmética se puede escribir también de la siguiente manera:

$$S_n = a_1 \cdot n + \frac{n(n-1)\cdot d}{2}$$

16 Halla los dos siguientes términos de estas progresiones aritméticas y calcula la suma de los 8 primeros términos mediante la fórmula. Después, comprueba el resultado haciendo la suma término a término.

a) 7, 4, 1, −2, −5, −8, ...

b) $-\frac{3}{2}, -\frac{7}{6}, -\frac{5}{6}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \ldots$

a) −11 y −14

$S_8 = 7 \cdot 8 + \dfrac{8 \cdot 7 \cdot (-3)}{2} = -28$

Sumando término a término: −28.

2. Progresión aritmética.

$\frac{3}{6}$ y $\frac{5}{6}$

b) $$S_8 = \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot 8 + \frac{8 \cdot 7 \cdot \frac{2}{6}}{2} = -\frac{24}{2} + \frac{112}{12} = -\frac{32}{12} = -\frac{8}{3}$$

Sumando término a término: $-\frac{8}{3}$.

17 Halla la suma de los 50 primeros términos de estas progresiones aritméticas.

a) $a_n = 7n - 4$ b) $a_n = 2n - 5$ c) $a_n = 1 - 3n$

a) $S_{50} = \frac{(3 + 346) \cdot 50}{2} = 8\,725$

b) $S_{50} = \frac{(-3 + 95) \cdot 50}{2} = 2\,300$

c) $S_{50} = \frac{(-2 - 149) \cdot 50}{2} = -3\,775$

18 **REFLEXIONA.** De una progresión aritmética se sabe que los términos cuarto y quinto suman 28. ¿Cuánto sumarán los 8 primeros términos?

$$a_4 + a_5 = 28 = a_3 + a_6 = a_2 + a_7 =$$
$$= a_1 + a_8 \rightarrow 28 \cdot 4 = 112$$

2. Progresión aritmética.

19 Calcula la suma de los 15 primeros términos de las progresiones aritméticas que cumplen lo siguiente.

a) $a_1 = -1, a_3 = 5$

b) $a_1 = 5, a_4 = 2$

c) $a_1 = \frac{1}{5}, a_6 = \frac{27}{10}$

d) $a_1 = 20, a_6 = -5$

e) $a_1 = 8, a_5 = 0$

f) $a_1 = \frac{3}{4}, a_5 = \frac{31}{20}$

a) $S_{15} = \frac{(-1 + 41) \cdot 15}{2} = 300$

b) $S_{15} = \frac{(5 - 9) \cdot 15}{2} = -30$

c) $S_{15} = \frac{\left(\frac{1}{5} + \frac{36}{5}\right) \cdot 15}{2} = \frac{111}{2}$

d) $S_{15} = \frac{(20 - 50) \cdot 15}{2} = -225$

e) $S_{15} = \frac{(8 - 20) \cdot 15}{2} = -90$

f) $S_{15} = \frac{\left(\frac{3}{4} + \frac{71}{20}\right) \cdot 15}{2} = \frac{129}{4}$

20 Halla la suma de los 10 primeros términos de estas progresiones aritméticas.

a) $3, 10, 17, 24, \dots$

b) $\frac{2}{5}, \frac{6}{5}, 2, \frac{14}{5}, \dots$

c) $-3{,}2; -2{,}7; -2{,}2; -1{,}7; \dots$

d) $-\frac{5}{4}, \frac{1}{4}, \frac{7}{4}, \frac{13}{4}, \dots$

a) $S_{10} = 3 \cdot 10 + \frac{10 \cdot 9 \cdot 7}{2} = 345$

b) $S_{10} = \left(\frac{2}{5}\right) \cdot 10 + \frac{10 \cdot 9 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)}{2} = 40$

c) $S_{10} = -3{,}2 \cdot 10 + \frac{10 \cdot 9 \cdot 0{,}5}{2} = -9{,}5$

d) $S_{10} = \left(-\frac{5}{4}\right) \cdot 10 + \frac{10 \cdot 9 \cdot \left(\frac{6}{4}\right)}{2} = 55$

2. Progresión aritmética.

21 Calcula la suma de los 12 primeros términos de las siguientes progresiones.

a) $a_n = n + 4$

b) $a_n = \dfrac{n-2}{3}$

c) $a_n = \dfrac{3}{5} - \dfrac{2}{5}n$

d) $a_n = \dfrac{2}{3}n - 3$

a) $S_{12} = \dfrac{(5+16)\cdot 12}{2} = 126$

b) $S_{12} = \dfrac{\left(-\dfrac{1}{3} + \dfrac{10}{3}\right)\cdot 12}{2} = 18$

c) $S_{12} = \dfrac{\left(\dfrac{1}{5} - \dfrac{21}{5}\right)\cdot 12}{2} = -24$

d) $S_{12} = \dfrac{\left(-\dfrac{7}{3} + 5\right)\cdot 12}{2} = 16$

22 De una progresión aritmética se sabe que $a_1 = 3$ y que la suma de sus 10 primeros términos es 255.

a) ¿Cuál es el décimo término?

b) ¿Cuál es la diferencia?

c) ¿Cuánto vale la suma de todos los términos entre el tercero y el décimo, ambos incluidos?

d) ¿Cuánto vale la suma de sus 20 primeros términos?

a) $255 = \dfrac{(3 + a_{10})\cdot 10}{2} \rightarrow a_{10} = 48$

b) $48 = 3 + 9\cdot d \rightarrow d = 5$

c) $a_3 = 3 + 2\cdot 5 = 13 \rightarrow$

$\rightarrow S_8 = \dfrac{(13+48)\cdot 8}{2} = 244$

d) $S_{20} = 3\cdot 20 + \dfrac{20\cdot 19\cdot 5}{2} = 1\,010$

2. Progresión aritmética.

23 De una progresión aritmética se conoce que $a_3 = 7$ y que la suma de sus 8 primeros términos es 68.

a) Calcula su término general.

b) Escribe los ocho primeros términos de la sucesión.

c) Halla la suma de los 15 primeros términos de la sucesión.

a) $\frac{(a_1 + a_8) \cdot 8}{2} = 4 \cdot (a_3 + a_6) = 68 \rightarrow$

$\rightarrow 4 \cdot (7 + a_6) = 68 \rightarrow a_6 = 9$

y $a_n = 5 + (n - 1) \cdot 1 = 4 + n$

b) 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, …

c) $S_{15} = 5 \cdot 15 + \frac{15 \cdot 14 \cdot 1}{2} = 180$

24 Considera la progresión $a_n = 5 + 3n$.

a) Calcula la suma de los 50 primeros términos.

b) ¿Cuántos términos de la progresión hay que sumar para que el resultado sea 93?

a) $S_{50} = \frac{(8 + 155) \cdot 50}{2} = 4\,075$

b) $\frac{(8 + 5 + 3n) \cdot n}{2} = 93 \rightarrow$

$\rightarrow 13n + 3n^2 = 186 \rightarrow n = 6$

3. Progresión geométrica.

3. Progresión geométrica

Una **progresión geométrica** es una sucesión en la que cada término (menos el primero) se obtiene multiplicando el anterior por un número fijo, r, llamado **razón** de la progresión.

En una progresión geométrica se cumple que:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \dots = r$$

EJEMPLO

7. Estudia si las siguientes sucesiones son progresiones geométricas.

a) 3, 6, 12, 24, 48, …

$\frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{24}{12} = \frac{48}{24} = \dots = 2 \rightarrow$ Es una progresión geométrica de razón 2.

b) 5, 10, 30, 120, 600, …

$\frac{10}{5} = 2; \frac{30}{10} = 3; \frac{120}{30} = 4; \frac{600}{120} = 5 \rightarrow$ No es una progresión geométrica.

3. Progresión geométrica.

RETO

Una ameba se reproduce cada minuto dividiéndose en dos amebas. Si dos amebas, reproduciéndose, llenan un tubo de ensayo en 2 horas, ¿cuánto tiempo tardaría una ameba sola?

Una ameba sola tardaría 2 horas y 1 minuto.

3.1. Término general de una progresión geométrica

En una progresión geométrica, cada uno de sus términos es igual al anterior multiplicado por la razón.

$a_2 = a_1 \cdot r$

$a_3 = a_2 \cdot r = (a_1 r) \cdot r = a_1 r^2$

$a_4 = a_3 \cdot r = (a_1 r^2) \cdot r = a_1 r^3$

...

$a_n = a_1 r^{n-1} \leftarrow$ Término general

3. Progresión geométrica.

El término general de una progresión geométrica es $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$, siendo a_1 el primer término y r la razón.

Dados dos términos, a_p y a_q, de una progresión geométrica ($p < q$), se cumple que $a_q = a_p \cdot r^{q-p}$.

25 Estudia si estas progresiones son geométricas y calcula su razón en caso de que lo sean.

a) 4, 12, 36, 108, 324, …

b) 3,5; 2,5; 1,5; 0,5; …

c) 2; 0,4; 0,08; 0,016; …

d) $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \dots$

e) $-3, 12, -48, 192, \dots$

f) 0,9; 0,8; 0,7; 0,6; …

g) 8, 6, 4, 2, …

h) $-\frac{1}{5}, \frac{2}{15}, -\frac{4}{45}, \frac{8}{135}, \dots$

a) Sí. $\rightarrow r = 3$

b) No.

c) Sí. $\rightarrow r = 0{,}2$

d) Sí. $\rightarrow r = 2$

e) Sí. $\rightarrow r = -4$

f) No.

g) No.

h) Sí. $\rightarrow r = -\frac{2}{3}$

3. Progresión geométrica.

26 Calcula el primer y el segundo término de estas progresiones geométricas.

a) $a_n = 7 \cdot (-2)^{n+2}$

b) $a_n = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$

c) $a_n = -0{,}3^{n+1}$

d) $a_n = \sqrt{3^n}$

a) $a_1 = -56,\ a_2 = 112$

b) $a_1 = 2,\ a_2 = 1$

c) $a_1 = -0{,}09;\ a_2 = -0{,}027$

d) $a_1 = \sqrt{3},\ a_2 = 3$

27 **REFLEXIONA.** En una progresión geométrica se sabe que $a_5 = 8$ y $|r| = \sqrt{2}$. Calcula a_1 y a_2.

$8 = a_1 \cdot (\sqrt{2})^4 \rightarrow a_1 = 2$

$a_2 = 2 \cdot \pm\sqrt{2} = \pm 2\sqrt{2}$ (dependiendo de si r es positiva o negativa).

28 Calcula la razón en estas progresiones geométricas.

a) $a_1 = 6,\ a_2 = 12$

b) $a_3 = 6,\ a_4 = 7$

c) $a_3 = -2,\ a_6 = 250$

d) $a_2 = 5,\ a_5 = 10\sqrt{2}$

a) $r = 2$

b) $7 = 6 \cdot r^1 \rightarrow r = \frac{7}{6}$

c) $250 = -2 \cdot r^3 \rightarrow r = -5$

d) $10\sqrt{2} = 5 \cdot r^3 \rightarrow r = \sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

3. Progresión geométrica.

29 Obtén el término general y el quinto término en estas progresiones geométricas.

a) $a_4 = 5,\ r = 1$
b) $a_7 = 2,\ r = -1$
c) $a_3 = \frac{1}{9},\ r = 3$
d) $a_2 = 6,\ r = -2$
e) $a_3 = 10,\ r = 0{,}1$
f) $a_4 = \frac{1}{25},\ r = -\frac{1}{5}$

a) $a_n = 5,\ a_5 = 5$

b) $a_n = 2 \cdot (-1)^{n-1},\ a_5 = 2$

c) $a_n = \frac{1}{81} \cdot 3^{n-1},\ a_5 = 1$

d) $a_n = -3 \cdot (-2)^{n-1},\ a_5 = -48$

e) $a_n = 10^3 \cdot 0{,}1^{n-1};\ a_5 = 0{,}1$

f) $a_n = -5 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1},\ a_5 = -\frac{1}{125}$

30 Halla el término general en cada caso.

a) $3, -3, 3, -3, 3, \ldots$
b) $2, 6, 18, 54, 162, \ldots$
c) $\sqrt{5}, \sqrt{10}, \sqrt{20}, \sqrt{40}, \sqrt{80}, \ldots$
d) $20, 10, 5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \ldots$

a) $a_n = 3 \cdot (-1)^{n-1}$

b) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

c) $a_n = \sqrt{5} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{n-1}$

d) $a_n = 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

3. Progresión geométrica.

31 Averigua la razón y el término general de estas sucesiones.

a) $a_3 = 8,\ a_4 = 4$

b) $a_2 = 7,\ a_5 = 56$

c) $a_4 = 5,\ a_5 = -5$

d) $a_2 = \frac{3}{2},\ a_5 = \frac{4}{9}$

e) $a_5 = -64,\ a_8 = -1$

f) $a_6 = 3,\ a_{11} = 3$

g) $a_3 = 5,\ a_6 = 10\sqrt{2}$

h) $a_4 = \frac{\sqrt{27}}{5},\ a_5 = \frac{9}{5}$

a) $r = \frac{1}{2},\ a_n = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

b) $r = 2,\ a_n = \frac{7}{2} \cdot 2^{n-1}$

c) $r = -1,\ a_n = -5 \cdot (-1)^{n-1}$

d) $r = \frac{2}{3},\ a_n = \frac{9}{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

e) $r = \frac{1}{4},\ a_n = -16\,384 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

f) $r = 1,\ a_n = 3$

g) $r = \sqrt{2},\ a_n = \frac{5}{2} \cdot (\sqrt{2})^{n-1}$

h) $r = \sqrt{3},\ a_n = \frac{1}{5} \cdot (\sqrt{3})^{n-1}$

32 En una progresión geométrica se sabe que $a_4 = 2$ y que $a_7 = 54$. Calcula:

a) La razón.

b) El primer término.

c) El término general.

c) El tercer término.

a) $r = 3$

b) $a_1 = \frac{2}{27}$

c) $a_n = \frac{2}{27} \cdot 3^{n-1}$

d) $a_3 = \frac{2}{27} \cdot 3^2 = \frac{2}{3}$

3. Progresión geométrica.

33 Calcula la razón y el término general de estas progresiones geométricas.

a) $a_1 = 1, a_3 = 9$

b) $a_2 = 7, a_4 = 14$

c) $a_5 = \dfrac{1}{32}, a_7 = \dfrac{1}{128}$

d) $a_3 = 5, a_5 = 20$

e) $a_4 = -12, a_6 = -6$

f) $a_2 = \dfrac{1}{4}, a_6 = 4$

a) Dos opciones: $r = 3, a_n = 3^{n-1}$
o $r = -3, a_n = (-3)^{n-1}$

b) Dos opciones:
$r = \sqrt{2}, a_n = \dfrac{7}{\sqrt{2}} \cdot (\sqrt{2})^{n-1}$
o $r = -\sqrt{2}, a_n = -\dfrac{7}{\sqrt{2}} \cdot (-\sqrt{2})^{n-1}$

c) Dos opciones: $r = \dfrac{1}{2}, a_n = \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$
o $r = -\dfrac{1}{2}, a_n = \dfrac{1}{2} \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

d) Dos opciones: $r = 2, a_n = \dfrac{5}{4} \cdot 2^{n-1}$
o $r = -2, a_n = \dfrac{5}{4} \cdot (-2)^{n-1}$

e) Dos opciones:
$r = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, a_n = (-24\sqrt{2}) \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$
o $r = -\dfrac{1}{\sqrt{2}},$
$a_n = (24\sqrt{2}) \cdot \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$

f) Dos opciones: $r = +2, a_n = \dfrac{1}{8} \cdot 2^{n-1}$
o $r = -2, a_n = -\dfrac{1}{8} \cdot (-2)^{n-1}$

3. Progresión geométrica.

3.2. Suma de *n* términos de una progresión geométrica

Buscamos una fórmula general para calcular la suma de n términos de una progresión geométrica:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

Multiplicando los dos miembros de la igualdad por la razón r, obtenemos:

$$S_n \cdot r = \underbrace{a_1 \cdot r}_{a_2} + \underbrace{a_2 \cdot r}_{a_3} + \ldots + \underbrace{a_{n-1} \cdot r}_{a_n} + a_n \cdot r = a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_n \cdot r$$

Restando ambas expresiones:

$$\begin{array}{rrl} & S_n \cdot r = & \cancel{a_2} + \cancel{a_3} + \ldots + \cancel{a_{n-1}} + \cancel{a_n} + a_n \cdot r \\ - & S_n = & a_1 + \cancel{a_2} + \cancel{a_3} + \ldots + \cancel{a_{n-1}} + \cancel{a_n} \\ \hline S_n \cdot r - S_n = & & -a_1 \qquad\qquad\qquad\qquad + a_n \cdot r \end{array}$$

Sacando factor común S_n y despejando:

$$S_n(r-1) = -a_1 + a_n \cdot r = a_n \cdot r - a_1$$

$$S_n = \frac{a_n r - a_1}{r-1} = \frac{(a_1 r^{n-1})r - a_1}{r-1} = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1}$$

3. Progresión geométrica.

La suma de n términos, S_n, de una progresión geométrica de razón r es:

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

EJEMPLO

8. Calcula la suma de los 5 primeros términos de esta progresión geométrica: 1, 2, 4, 8, 16, …

- Sumando los 5 términos: $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$
- Aplicando la fórmula:

$$a_1 = 1,\ r = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \ldots = 2 \rightarrow S_5 = \frac{1 \cdot (2^5 - 1)}{2 - 1} = 31$$

En ambos casos obtenemos el mismo resultado.

RETO

Si tengo 50 € y cada día gasto la mitad del dinero que tengo, ¿cuándo gastaré mi última moneda?

Gasto día 1: 25 €	Quedan 25 €.
Gasto día 2: 12,50 €	Quedan 12,50 €.
Gasto día 3: 6,25 €	Quedan 6,25 €.
Gasto día 4: 3,125 = 3,13 €	Quedan 3,12 €.
Gasto día 5: 1,56 €	Quedan 1,56 €.

3. Progresión geométrica.

34 Suma los 6 primeros términos de estas progresiones geométricas. Después, comprueba el resultado aplicando la fórmula.

a) 2, 6, 18, 54, 162, 486, …

b) 125; 25; 5; 1; 0,2; 0,04; …

c) 0,25; 0,5; 1; 2; 4; 8; …

d) 3, $3\sqrt{3}$, 9, $9\sqrt{3}$, 27, $27\sqrt{3}$, …

e) $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}, \frac{27}{2}, \frac{81}{2}, \frac{243}{2}, \dots$

f) $\frac{2}{5}, \frac{2}{15}, \frac{2}{45}, \frac{2}{135}, \frac{2}{405}, \frac{2}{1\,215}, \dots$

Si conocemos el primer término y el último, para calcular S_n también podemos utilizar esta fórmula:

$$S_n = \frac{a_n r - a_1}{r - 1}$$

a) $S_6 = \dfrac{2 \cdot (3^6 - 1)}{3 - 1} = 728$

b) $S_6 = \dfrac{125 \cdot \left(\left(\frac{1}{5}\right)^6 - 1\right)}{\frac{1}{5} - 1} = 156{,}24$

c) $S_6 = \dfrac{0{,}25 \cdot (2^6 - 1)}{2 - 1} = 15{,}75$

d) $S_6 = \dfrac{3 \cdot \left(\left(\sqrt{3}\right)^6 - 1\right)}{\sqrt{3} - 1} = 106{,}55$

e) $S_6 = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot (3^6 - 1)}{3 - 1} = 182$

f) $S_6 = \dfrac{\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{3}^6 - 1\right)}{\frac{1}{3} - 1} = \dfrac{2}{5}$

3. Progresión geométrica.

35 Dada la progresión geométrica $a_n = 2^{n-2}$, halla:

a) La razón.

b) El primer término.

c) La suma de sus 6 primeros términos.

Ahora, escribe los 6 primeros términos y súmalos.

a) $r = 2$

b) $a_1 = \frac{1}{2}$

c) $S_6 = \dfrac{\frac{1}{2}(2^6 - 1)}{2 - 1} = \dfrac{63}{2}$

$\frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16$

$\frac{1}{2} + 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = \frac{63}{2}$

36 **REFLEXIONA.** Una carretera se bifurca después de 3 km en línea recta. Cada una de las ramificaciones se vuelve a bifurcar tras otros 3 km, y así sucesivamente hasta un total de 6 veces. ¿Cuántos kilómetros se acumulan entre todas las bifurcaciones?

La razón de esta progresión geométrica es $r = 2$ y su primer término $a_1 = 3$. Cada bifurcación es una iteración, luego hay que hallar S_7.

$S_7 = \dfrac{3 \cdot (2^7 - 1)}{2 - 1} = 381$ km.

3. Progresión geométrica.

37 Calcula la suma de los 8 primeros términos de las siguientes progresiones geométricas en las que conocemos un término y la razón.

a) $a_2 = 5,\ r = 2$

b) $a_3 = 2,\ r = 5$

c) $a_5 = \frac{81}{2},\ r = -3$

d) $a_3 = 343,\ r = -7$

e) $a_5 = 2,\ r = -1$

f) $a_3 = \frac{9}{2},\ r = \frac{1}{2}$

a) $a_1 = \frac{5}{2} \rightarrow S_8 = \frac{\frac{5}{2}\cdot(2^8-1)}{2-1} = \frac{1\,275}{2}$

b) $a_1 = \frac{2}{25} \rightarrow S_8 = \frac{\frac{2}{25}\cdot(5^8-1)}{5-1} = 7\,812{,}48$

c) $a_1 = \frac{1}{2} \rightarrow S_8 = \frac{\frac{1}{2}\cdot((-3)^8-1)}{-3-1} = -820$

d) $a_1 = 7 \rightarrow S_8 = \frac{7\cdot((-7)^8-1)}{-7-1} = -5\,044\,200$

e) $a_1 = 2 \rightarrow S_8 = \frac{2\cdot((-1)^8-1)}{-1-1} = 0$

f) $a_1 = 18 \rightarrow S_8 = \frac{18\cdot\left(\left(\frac{1}{2}\right)^8-1\right)}{\frac{1}{2}-1} = \frac{2\,295}{64}$

3. Progresión geométrica.

38 Calcula la suma de los 5 primeros términos de estas progresiones geométricas mediante la fórmula. Después, escribe los términos, súmalos y comprueba que lo has hecho bien.

a) $a_1 = 3,\ a_4 = 81$

b) $a_1 = -3,\ a_4 = 24$

c) $a_1 = 6,\ a_4 = \frac{3}{4}$

d) $a_1 = 8,\ a_2 = 4$

e) $a_1 = \sqrt{5},\ a_3 = 4\sqrt{5}$

f) $a_1 = \frac{25}{4},\ a_5 = \frac{4}{25}$

a) $a_n = 3 \cdot 3^{n-1} \rightarrow$

$$\rightarrow S_5 = \frac{3 \cdot (3^5 - 1)}{3 - 1} = 363$$

$a_1 = 3,\ a_2 = 9,\ a_3 = 27,\ a_4 = 81,$

$a_5 = 243 \rightarrow$

$\rightarrow S_5 = 363$

b) $a_n = (-3) \cdot (-2)^{n-1} \rightarrow$

$$\rightarrow S_5 = \frac{-3 \cdot ((-2)^5 - 1)}{-2 - 1} = -33$$

$a_1 = -3,\ a_2 = 6,\ a_3 = -12,\ a_4 = 24,$

$a_5 = -48 \rightarrow$

$\rightarrow S_5 = -33$

c) $a_n = 6 \cdot (0{,}5)^{n-1} \rightarrow$

$$\rightarrow S_5 = \frac{6 \cdot ((0{,}5)^5 - 1)}{0{,}5 - 1} = 11{,}625$$

$a_1 = 6,\ a_2 = 3,\ a_3 = \frac{3}{2},\ a_4 = \frac{3}{4},$

$a_5 = \frac{3}{8} \rightarrow$

$\rightarrow S_5 = 11{,}625$

d) $a_n = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \rightarrow$

$$\rightarrow S_5 = \frac{8 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^5 - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = 15{,}5$$

$a_1 = 8,\ a_2 = 4,\ a_3 = 2,\ a_4 = 1,$

$a_5 = \frac{1}{2} \rightarrow$

$\rightarrow S_5 = 15{,}5$

3. Progresión geométrica.

e) Hay dos soluciones.

Primera solución:

$a_n = \sqrt{5} \cdot 2^{n-1} \rightarrow$

$\rightarrow S_5 = \dfrac{\sqrt{5} \cdot (2^5 - 1)}{2 - 1} = 69{,}32$

$a_1 = \sqrt{5},\ a_2 = 2\sqrt{5},\ a_3 = 4\sqrt{5},$

$a_4 = 8\sqrt{5},\ a_5 = 16\sqrt{5} \rightarrow$

$\rightarrow S_5 = 69{,}32$

Segunda solución:

$b_n = \sqrt{5} \cdot (-2)^{n-1} \rightarrow$

$\rightarrow S_5 = \dfrac{\sqrt{5} \cdot ((-2)^5 - 1)}{-2 - 1} = 24{,}6$

$b_1 = \sqrt{5},\ b_2 = -2\sqrt{5},\ b_3 = 4\sqrt{5},$

$b_4 = -8\sqrt{5},\ b_5 = 16\sqrt{5} \rightarrow$

$\rightarrow S_5 = 24{,}6$

f) Hay dos soluciones.

Primera solución:

$a_n = \dfrac{25}{4} \cdot \left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1} \rightarrow$

$\rightarrow S_5 = \dfrac{\dfrac{25}{4} \cdot \left(\left(\dfrac{2}{5}\right)^5 - 1\right)}{\dfrac{2}{5} - 1} = 10{,}31$

$a_1 = \dfrac{25}{4},\ a_2 = \dfrac{5}{2},\ a_3 = 1,\ a_4 = \dfrac{2}{5},$

$a_5 = \dfrac{4}{25} \rightarrow S_5 = 10{,}31$

Segunda solución:

$b_n = \dfrac{25}{4} \cdot \left(-\dfrac{2}{5}\right)^{n-1} \rightarrow S_5 = \dfrac{\dfrac{25}{4} \cdot \left(\left(-\dfrac{2}{5}\right)^5 - 1\right)}{-\dfrac{2}{5} - 1} = 4{,}51$

$b_1 = \dfrac{25}{4},\ b_2 = -\dfrac{5}{2},\ b_3 = 1,\ b_4 = -\dfrac{2}{5},$

$b_5 = \dfrac{4}{25} \rightarrow S_5 = 4{,}51$

3. Progresión geométrica.

39 Halla la suma de los 10 primeros términos de estas progresiones geométricas dadas mediante su término general.

a) $a_n = -2 \cdot 3^{n+1}$

b) $a_n = 2 \cdot (-3)^n$

c) $a_n = -\left(\sqrt{5}\right)^{n+1}$

d) $a_n = 2^{n-6}$

a) $a_1 = -18 \rightarrow$

$$\rightarrow S_{10} = \frac{-18 \cdot (3^{10} - 1)}{3 - 1} = -531\,432$$

b) $a_1 = -6 \rightarrow$

$$\rightarrow S_{10} = \frac{-6 \cdot ((-3)^{10} - 1)}{-3 - 1} = 88\,572$$

c) $a_1 = -5 \rightarrow$

$$\rightarrow S_{10} = \frac{-6 \cdot \left(\sqrt{5}^{\,10} - 1\right)}{\sqrt{5} - 1} = -15\,164{,}21$$

d) $a_1 = 2^{-5} \rightarrow$

$$\rightarrow S_{10} = \frac{2^{-5} \cdot (2^{10} - 1)}{2 - 1} = \frac{1\,023}{32}$$

40 Calcula la suma de los 6 primeros términos de estas progresiones geométricas.

a) $a_2 = 8,\ a_3 = 4$

b) $a_2 = 2,\ a_5 = 2$

c) $a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{3}{2}$

d) $a_4 = 5,\ a_5 = -5$

e) $a_3 = 7,\ a_6 = 56$

f) $a_4 = 5\sqrt{2},\ a_5 = 10$

a) $a_n = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \rightarrow$

$$\rightarrow S_6 = \frac{16 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^6 - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{63}{2} = 31{,}5$$

3. Progresión geométrica.

b) $a_n = 2 \rightarrow S_6 = 6 \cdot 2 = 12$

c) $a_n = \frac{1}{6} \cdot 3^{n-1} \rightarrow S_6 = \frac{\frac{1}{6} \cdot (3^6 - 1)}{3 - 1} =$
$= 60{,}67$

d) $a_n = -5 \cdot (-1)^{n-1} \rightarrow$
$\rightarrow S_6 = \frac{-5 \cdot ((-1)^6 - 1)}{-1 - 1} = 0$

e) $a_n = \frac{7}{4} \cdot 2^{n-1} \rightarrow$
$\rightarrow S_6 = \frac{\frac{7}{4} \cdot (2^6 - 1)}{2 - 1} = 110{,}25$

f) $a_n = \frac{5}{2} \cdot (\sqrt{2})^{n-1} \rightarrow$
$\rightarrow S_6 = \frac{\frac{5}{2} \cdot ((\sqrt{2})^6 - 1)}{\sqrt{2} - 1} = 42{,}25$

41 Calcula la suma de los 7 primeros términos de estas progresiones geométricas.

a) $a_2 = 4,\ a_4 = 16$
b) $a_1 = 4,\ a_3 = 36$
c) $a_3 = 2,\ a_5 = 50$
d) $a_2 = 16,\ a_4 = 1$

a) Hay dos soluciones.

$a_n = 2 \cdot 2^{n-1} \rightarrow S_7 = \frac{2 \cdot (2^7 - 1)}{2 - 1} = 254$

$b_n = (-2) \cdot (-2)^{n-1} \rightarrow$
$\rightarrow S_7 = \frac{-2 \cdot ((-2)^7 - 1)}{-2 - 1} = -86$

b) Hay dos soluciones.

$a_n = 4 \cdot 3^{n-1} \rightarrow S_7 = \frac{4 \cdot (3^7 - 1)}{3 - 1} = 4\,372$

$b_n = 4 \cdot (-3)^{n-1} \rightarrow$
$\rightarrow S_7 = \frac{4 \cdot ((-3)^7 - 1)}{-3 - 1} = 2\,188$

3. Progresión geométrica.

c) Hay dos soluciones.

$$a_n = \frac{2}{25} \cdot 5^{n-1} \to$$

$$\to S_7 = \frac{\frac{2}{25} \cdot (5^7 - 1)}{5 - 1} = 1562{,}48$$

$$b_n = \frac{2}{25} \cdot (-5)^{n-1} \to$$

$$\to S_7 = \frac{\frac{2}{25} \cdot ((-5)^7 - 1)}{-5 - 1} = 1041{,}68$$

d) Hay dos soluciones.

$$a_n = 64 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \to$$

$$\to S_7 = \frac{64 \cdot \left(\left(\frac{1}{4}\right)^7 - 1\right)}{\frac{1}{4} - 1} = -85{,}33$$

$$b_n = -64 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} \to$$

$$\to S_7 = \frac{-64 \cdot \left(\left(-\frac{1}{4}\right)^7 - 1\right)}{-\frac{1}{4} - 1} = -51{,}2$$

3. Progresión geométrica.

3.3. Suma de todos los términos de una progresión geométrica con $|r| < 1$

En las progresiones geométricas en las que la razón, r, está entre los valores $-1 < r < 1$, podemos calcular la suma de todos sus términos.

Sabemos que la suma de n términos de una progresión geométrica es:

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

Si $-1 < r < 1$, a medida que el número de términos, n, que tomamos en la suma crece, el valor de r^n es menor, hasta que se convierte prácticamente en 0. Por tanto, tenemos que:

- $r^n - 1$ sería prácticamente igual a -1.
- $r - 1 = -(1 - r)$

Así, la suma de los infinitos términos se puede escribir de la siguiente manera:

$$S = \frac{a_1 \cdot (-1)}{r - 1} = \frac{-a_1}{-(1 - r)} = \frac{a_1}{1 - r}$$

La suma de todos los términos de una progresión geométrica con razón $-1 < r < 1$ es:

$$S = \frac{a_1}{1 - r}$$

3. Progresión geométrica.

EJEMPLO

9. Halla la suma de todos los términos de la progresión geométrica:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$$

- El primer término es $a_1 = 1$.
- Calculamos la razón:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_2 = a_1 \cdot r^{2-1} \rightarrow \frac{1}{2} = 1 \cdot r \rightarrow r = \frac{1}{2} < 1$$

- Como $r < 1$, podemos aplicar la fórmula:

$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

42 Escribe los cinco primeros términos de estas progresiones geométricas y calcula la suma de todos sus términos.

a) $a_1 = 4$, $r = \frac{1}{2}$

b) $a_1 = 9$, $r = \frac{1}{3}$

c) $a_1 = 1$, $r = -\frac{1}{4}$

d) $a_1 = -2$, $r = -\frac{1}{5}$

a) $a_1 = 4$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$, $a_4 = \frac{1}{2}$, $a_5 = \frac{1}{4} \rightarrow$

$\rightarrow S = \dfrac{4}{1-\frac{1}{2}} = 8$

b) $a_1 = 9$, $a_2 = 3$, $a_3 = 1$, $a_4 = \frac{1}{3}$, $a_5 = \frac{1}{9} \rightarrow S = \dfrac{9}{1-\frac{1}{3}} = 13{,}5$

3. Progresión geométrica.

c) $a_1 = 1,\ a_2 = -\frac{1}{4},\ a_3 = \frac{1}{16},$

$a_4 = -\frac{1}{64},\ a_5 = \frac{1}{256} \rightarrow$

$\rightarrow S = \dfrac{1}{1+\frac{1}{4}} = 0{,}8$

d) $a_1 = -2,\ a_2 = \frac{2}{5},\ a_3 = -\frac{2}{25},$

$a_4 = \frac{2}{125},\ a_5 = -\frac{2}{625} \rightarrow$

$\rightarrow S = \dfrac{-2}{1+\frac{1}{5}} = -1{,}67$

43 Calcula la suma de todos los términos de esta progresión geométrica: 64; 12,8; 2,56; 0,512; …

$$r = \frac{12{,}8}{64} = 0{,}2 \rightarrow S = \frac{64}{1-0{,}2} = 80$$

44 Obtén la suma de todos los términos de estas progresiones geométricas.

a) $a_n = 16 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$

b) $a_n = 100 \cdot \left(\frac{1}{11}\right)^{n-1}$

c) $a_n = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n}$

d) $a_n = -98 \cdot \left(-\frac{1}{7}\right)^{n+1}$

a) $S = \dfrac{16}{1-\frac{1}{9}} = 18$

b) $S = \dfrac{100}{1-\frac{1}{11}} = 110$

c) $S = \dfrac{-\frac{1}{5}}{1+\frac{1}{3}} = -\frac{3}{20} = -0{,}15$

d) $S = \dfrac{-2}{1+\frac{1}{7}} = -\frac{7}{4} = -1{,}75$

3. Progresión geométrica.

45 **REFLEXIONA.** La suma de todos los términos de una progresión geométrica es 1,5 y $a_1 = 1$. ¿Cuánto vale la razón?

$$1{,}5 = \frac{1}{1-r} \rightarrow r = \frac{-0{,}5}{-1{,}5} = \frac{1}{3}$$

46 Calcula la suma de los infinitos términos de estas progresiones geométricas.

a) $a_1 = 3,\ r = \frac{1}{5}$

b) $a_1 = -27,\ r = -\frac{2}{3}$

c) $a_1 = -1,\ r = \frac{4}{3}$

d) $a_1 = 2,\ r = -\frac{1}{3}$

e) $a_2 = \frac{3}{4},\ r = \frac{1}{2}$

f) $a_3 = \frac{1}{16},\ r = -\frac{1}{4}$

g) $a_4 = \frac{27}{50},\ r = \frac{3}{5}$

h) $a_5 = \frac{7}{2},\ r = -3$

a) $S = \dfrac{3}{1-\frac{1}{5}} = \dfrac{15}{4}$

b) $S = \dfrac{-27}{1+\frac{2}{3}} = -\dfrac{81}{5}$

c) $S = -\infty$

d) $S = \dfrac{2}{1+\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{2}$

e) $a_1 = \dfrac{a_2}{r} = \dfrac{3}{2} \rightarrow S = \dfrac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 3$

f) $a_1 = \dfrac{a_3}{r^2} = 1 \rightarrow S = \dfrac{1}{1+\frac{1}{4}} = \dfrac{4}{5}$

g) $a_1 = \dfrac{a_4}{r^3} = \dfrac{5}{2} \rightarrow S = \dfrac{5/2}{1-\frac{3}{5}} = \dfrac{25}{4}$

h) La suma no se puede calcular.

3. Progresión geométrica.

47 Di cuánto suman los infinitos términos de estas progresiones geométricas.

a) $a_1 = 2,\ a_2 = 1$

b) $a_1 = 5,\ a_4 = \dfrac{5}{8}$

c) $a_2 = -\dfrac{1}{2},\ a_3 = \dfrac{1}{4}$

d) $a_2 = 1,\ a_5 = 8$

e) $a_2 = -\dfrac{4}{3},\ a_4 = -\dfrac{4}{27}$

f) $a_1 = 5,\ a_5 = \dfrac{81}{125}$

a) $S = \dfrac{2}{1 - \frac{1}{2}} = 4$

b) $r = \dfrac{1}{2} \to S = \dfrac{5}{1 - \frac{1}{2}} = 10$

c) $r = -\dfrac{1}{2} \to a_1 = 1 \to S = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \dfrac{2}{3}$

d) $r = 2 \to a_1 = \dfrac{1}{2} \to S = \dfrac{\frac{1}{2}}{1 - 2} = -\dfrac{1}{2}$

e) Hay dos soluciones.

$r = \dfrac{1}{3} \to a_1 = -4 \to S = \dfrac{-4}{1 - \frac{1}{3}} = -6$

$r = -\dfrac{1}{3} \to a_1 = 4 \to S = \dfrac{4}{1 + \frac{1}{3}} = 3$

f) Hay dos soluciones.

$r = \dfrac{3}{5} \to a_1 = 5 \to S = \dfrac{5}{1 - \frac{3}{5}} = \dfrac{25}{2}$

$r = -\dfrac{3}{5} \to a_1 = 5 \to S = \dfrac{5}{1 + \frac{3}{5}} = \dfrac{25}{8}$

48 La suma de los infinitos términos de una progresión geométrica es 4,5 y su razón es $\dfrac{1}{3}$. Escribe los 5 primeros términos de la sucesión.

$S = \dfrac{a_1}{1 - \frac{1}{3}} = 4{,}5 \to a_1 = 3$

Los cinco primeros términos son:

$3,\ 1,\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{9},\ \dfrac{1}{27}.$

4. Interés compuesto.

4. Interés compuesto

Cuando depositamos un **capital** durante un periodo de **tiempo**, t, a un **rédito**, r%, y, al finalizar cada periodo de inversión, los intereses se añaden al capital, se produce el **interés compuesto**.

Los capitales, al finalizar cada periodo de tiempo, forman una progresión geométrica donde a_1 es el capital inicial y la razón es $\left(1+\frac{r}{100}\right)$.

EJEMPLO

10. Carlos ingresa en un banco 5 000 € al 2 % de interés compuesto anual. Calcula cuánto dinero tendrá en cada uno de los siguientes casos.

a) Al finalizar el primer año.

Al finalizar el primer año recibirá el 2 % del capital que depositó inicialmente.

$$\text{Capital}_{1.^{\text{er}}\text{ año}} = 5\,000 + \frac{2}{100}\cdot 5\,000 = 5\,000\cdot\left(1+\frac{2}{100}\right) = 5\,100\ €$$

4. Interés compuesto.

b) Al finalizar el segundo año.

Al finalizar el segundo año recibirá el 2% del capital que tenía al finalizar el primer año.

$$\text{Capital}_{2.^{\circ}\text{ año}} = 5\,100 + \frac{2}{100} \cdot 5\,100 = 5\,100 \cdot \left(1 + \frac{2}{100}\right) =$$

$$= 5\,000 \cdot \left(1 + \frac{2}{100}\right)^2 = 5\,202 \text{ €}$$

c) Al finalizar el tercer año.

Al finalizar el tercer año recibirá el 2% del capital que tenía al finalizar el segundo año.

$$\text{Capital}_{3.^{\text{er}}\text{ año}} = 5\,202 + \frac{2}{100} \cdot 5\,202 = 5\,000 \cdot \left(1 + \frac{2}{100}\right)^3 = 5\,306{,}04 \text{ €}$$

El **capital final**, C_f, obtenido al invertir a un rédito, r %, un capital, C, durante un tiempo, t, a interés compuesto es:

$$C_f = C \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t, \text{ siendo } t \text{ el tiempo en años}$$

Para aplicar esta fórmula con el tiempo en meses y días, basta con sustituir r por el rédito mensual o diario y t por el número de meses o días de inversión.

4. Interés compuesto.

49 Calcula el capital final que se obtendrá al invertir, con un interés compuesto, 1 200 €:

a) Al 3% anual durante 2 años.

b) Al 3% anual durante 3 años.

c) Al 3% anual durante 4 años.

a) $C_f = 1\,200 \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right)^2 = 1\,273{,}08$ €

b) $C_f = 1\,200 \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right)^3 = 1\,311{,}27$ €

c) $C_f = 1\,200 \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right)^4 = 1\,350{,}61$ €

50 Andrea deposita 2 000 € en un banco que le ofrece un interés compuesto anual del 5%. ¿Cuánto le devuelve el banco al final del segundo año?

$$C_f = 2\,000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^2 = 2\,205 \text{ €}$$

51 **REFLEXIONA.** ¿Qué da mayores beneficios, un depósito de 1 año al 2% o uno de 2 años al 1%?

Si x es el depósito inicial:

$$C_{f_1} = x \cdot \left(1 + \frac{2}{100}\right)^1 = 1{,}02x$$

$$C_{f_2} = x \cdot \left(1 + \frac{1}{100}\right)^2 = 1{,}0201x$$

Por tanto, dos años al 1% da ligeramente mayores beneficios.

4. Interés compuesto.

52 Se depositan 10 000 € al 0,5 % anual. Calcula el capital final que se obtiene después de los siguientes periodos.

a) 1 año	d) 20 años
b) 5 años	e) 30 años
c) 10 años	f) 50 años

¿Cuál es el beneficio obtenido en cada caso?

a) $C_f = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{0,5}{100}\right)^1 = 10\,050 \text{ €} \rightarrow$

$\rightarrow B = C_f - 10\,000 = 50 \text{ €}$

b) $C_f = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{0,5}{100}\right)^5 = 10\,252,51 \text{ €} \rightarrow$

$\rightarrow B = C_f - 10\,000 = 252,51 \text{ €}$

c) $C_f = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{0,5}{100}\right)^{10} = 10\,511,40 \text{ €} \rightarrow$

$\rightarrow B = C_f - 10\,000 = 511,40 \text{ €}$

d) $C_f = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{0,5}{100}\right)^{20} = 11\,048,96 \text{ €} \rightarrow$

$\rightarrow B = C_f - 10\,000 = 1\,048,96 \text{ €}$

e) $C_f = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{0,5}{100}\right)^{30} = 11\,614 \text{ €} \rightarrow$

$\rightarrow B = C_f - 10\,000 = 1\,614 \text{ €}$

f) $C_f = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{0,5}{100}\right)^{50} =$

$= 12\,832,26 \text{ €} \rightarrow$

$\rightarrow B = C_f - 10\,000 = 2\,832,26 \text{ €}$

4. Interés compuesto.

53 Se quiere invertir cierto capital durante 10 años con un interés del 2 %.

a) ¿Qué dinero hay que invertir para obtener 6 095 €?

b) ¿Qué dinero hay que invertir para obtener 12 190 €?

c) Si invertimos el doble de dinero, al mismo rédito y en el mismo tiempo, ¿obtendremos el doble al finalizar el periodo?

a) $6\,095 = C \cdot \left(1 + \dfrac{2}{100}\right)^{10} \rightarrow C = 5\,000$ €

b) $12\,190 = C \cdot \left(1 + \dfrac{2}{100}\right)^{10} \rightarrow$

$\rightarrow C = 10\,000$ €

c) Sí, ya que si $C_f = C \cdot \left(1 + \dfrac{r}{100}\right)^{t} \rightarrow$

$\rightarrow 2C \cdot \left(1 + \dfrac{r}{100}\right)^{t} = 2C_f$.

54 Marcos quería aumentar sus ahorros y para ello invirtió 10 000 € en un banco. Al cabo de 10 años obtuvo 11 046,23 €. ¿Qué rédito le dio el banco?

$$11\,046{,}23 = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{10} \rightarrow$$

$$\rightarrow r = \left(\sqrt[10]{\frac{11\,046{,}23}{10\,000}} - 1\right) \cdot 100 = 1$$

El rédito fue del 1 %.

4. Interés compuesto.

55 Lee y contesta.

a) ¿A qué rédito anual hay que invertir 20 000 € durante 5 años para obtener 25 525,63 €?

b) ¿Y para obtener 32 210,20 €?

c) Si invertimos una cantidad de dinero durante un cierto tiempo al doble de rédito, ¿obtendremos el doble de dinero?

d) Si invertimos 20 000 € al 5 % durante 10 años, ¿cuánto dinero obtendremos? ¿Será el doble que si lo invertimos durante 5 años?

a) $25\,525{,}63 = 20\,000 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^5 \rightarrow$

$\rightarrow r = \left(\sqrt[5]{\frac{25\,525{,}63}{20\,000}} - 1\right) \cdot 100 = 5$

Hay que invertir el dinero al 5 %.

b) $32\,210{,}20 = 20\,000 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^5 \rightarrow$

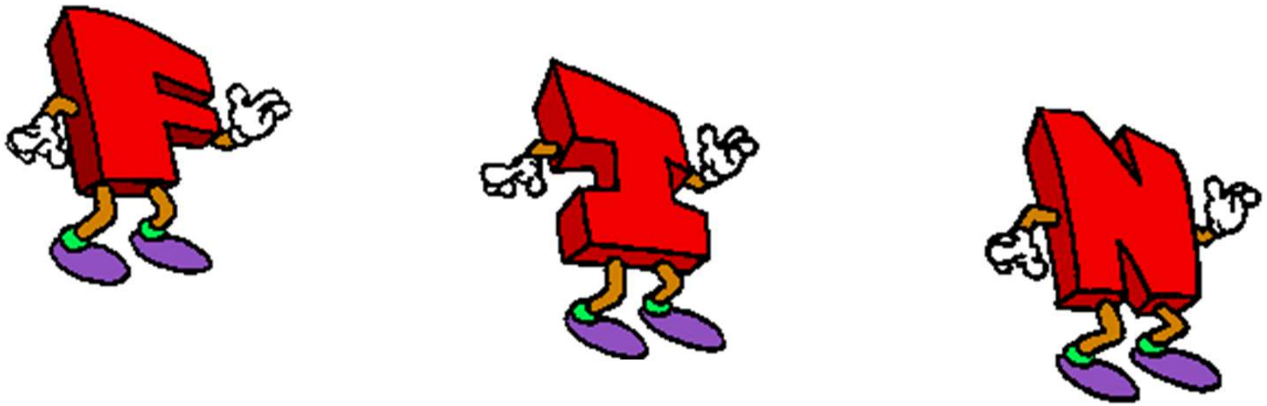
$\rightarrow r = \left(\sqrt[5]{\frac{32\,210{,}23}{20\,000}} - 1\right) \cdot 100 = 10$

Hay que invertir el dinero al 10 %.

c) No es cierto, como se muestra en los apartados anteriores.

d) $C_f = 20\,000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^{10} = 32\,577{,}89$ €

No será el doble que si lo invertimos durante 5 años, como se muestra en el apartado a).


FIN