Tema 3

PROPORCIONALIDAD

Índice

1. Proporcionalidad simple.

Una **razón** es la división entre dos cantidades comparables. Se escribe: $\frac{a}{b}$ y se lee "**a** es a **b**"

Al número **a** se le llama **antecedente**, y al número **b** se le llama **consecuente**.

Ejemplo:

Una persona lee un libro de 250 páginas en 8 horas. Hallar la razón entre el número de páginas que lee y el tiempo que tarda.

$$\frac{250}{8} = 31{,}25$$

El resultado, 31,25, es la velocidad de lectura de dicha persona. Lee a razón de 31,25 páginas por hora.

Una **proporción** es una igualdad entre dos razones. Se escribe: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y se lee "**a** es a **b** como **c** es a **d**"

PROPIEDAD FUNDAMENTAL

En una proporción siempre se cumple: **a · d = b · c**

O sea que el producto de medios (b y c) es igual al producto de extremos (a y d).

Una **magnitud** es una propiedad que se puede **medir**. Como por ejemplo: el tiempo, la distancia, la velocidad, el peso, el precio de las cosas, …

1. Proporcionalidad simple.

1.1 Proporcionalidad directa.

Dos **magnitudes** se dicen **directamente proporcionales** si al multiplicar (dividir) una de ellas por un número distinto de cero, la otra resulta multiplicada (dividida) por ese mismo número.

Dadas dos magnitudes directamente proporcionales, cualquier par de valores correspondientes tiene la misma razón. A ese cociente, o a su inverso, se le llama **razón** (**k**) de **proporcionalidad directa**.

La razón, k, entre esas dos magnitudes directamente proporcionales también recibe el nombre de **constante de proporcionalidad directa**.

Magnitud A	a_1	a_2	a_3
Magnitud B	b_1	b_2	b_3

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = k$$

EJEMPLO 1

Una persona gana 8 € si trabaja 2 horas, 12 € si trabaja 3 horas, 16 € si trabaja 4 horas, etc.

Magnitud Ganancias	8	12	16
Magnitud Horas trabajo	2	3	4

$$\frac{8}{2} = \frac{12}{3} = \frac{16}{4} = k = 4$$

1. Proporcionalidad simple.

EJEMPLO 2

Nos cobran 80 € si compramos 4 libros, 120 € si compramos 6, 200 € si compramos 10, etc.

Magnitud Coste	80	120	200
Magnitud Nº libros	4	6	10

$$\frac{80}{4} = \frac{120}{6} = \frac{200}{10} = k = 20$$

CONTRAEJEMPLO

Una persona gana 12 € si trabaja 2 horas, 15 € si trabaja 3 horas, 20 € si trabaja 4 horas, etc.

Magnitud Ganancias	12	15	20
Magnitud Horas trabajo	2	3	4

$$\frac{12}{2} \neq \frac{15}{3} = \frac{20}{4}$$

Por tanto, como las razones no permanecen constantes, estas dos magnitudes **NO** son directamente proporcionales.

Si dos magnitudes son directamente proporcionales, podemos aplicar para la resolución del ejercicio la llamada **REGLA DE TRES SIMPLE DIRECTA**.

1. Proporcionalidad simple.

EJEMPLO 1:
Una persona gana 8 € si trabaja 2 horas. ¿Cuánto ganará si trabaja 15 horas?.

Suponemos que el sueldo de cada hora es fijo, constante: Son magnitudes directamente proporcionales.

Magnitud Ganancias	8	x
Magnitud Nº horas trabajo	2	15

$$\frac{8}{2} = \frac{x}{15}$$

Nº horas trabajo		Ganancias
2	$\longrightarrow$	8
15	$\longrightarrow$	x

$$2 \cdot x = 15 \cdot 8 \Rightarrow x = \frac{15 \cdot 8}{2} = 60\ €$$

EJEMPLO 2:
Si cuatro cuadernos nos han costado 8 €, ¿cuánto nos costarán 7 cuadernos?.

Nº cuadernos		Coste
4	$\longrightarrow$	8
7	$\longrightarrow$	x

$$4 \cdot x = 7 \cdot 8 \Rightarrow x = \frac{7 \cdot 8}{4} = 14\ €$$

1. Proporcionalidad simple.

1.2 Proporcionalidad inversa.

Dos **magnitudes** se dicen **inversamente proporcionales** si al multiplicar (dividir) una de ellas por un número distinto de cero, la otra resulta dividida (multiplicada) por ese mismo número.

El producto de las dos magnitudes debe permanecer constante, y a ese producto se le llama **constante de proporcionalidad inversa (k)**.

Magnitud A	a_1	a_2	a_3
Magnitud B	b_1	b_2	b_3

$$a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 = a_3 \cdot b_3 = k$$

EJEMPLO 1

Un coche a 50 km/hora tarda 6 horas en recorrer una distancia; a 100 km/hora tarda 3 horas; a 150 km/hora tarda 2 horas.

Magnitud Velocidad (km/h)	50	100	150
Magnitud Tiempo (horas)	6	3	2

$$50 \cdot 6 = 100 \cdot 3 = 150 \cdot 2 = k = 300$$

1. Proporcionalidad simple.

EJEMPLO 2

Dos trabajadores tardan 6 horas en realizar un trabajo; el mismo trabajo lo realizan cuatro trabajadores en 3 horas y ocho trabajadores lo realizan en hora y media.

Magnitud Nº trabajadores	2	4	8
Magnitud Tiempo (horas)	6	3	1,5

$$2 \cdot 6 = 4 \cdot 3 = 8 \cdot 1,5 = k = 12$$

CONTRAEJEMPLO

Tres alumnos que dedican 10, 15 y 20 horas mensuales a la lectura cometen en un mismo texto escrito 40, 30 y 20 faltas de ortografía respectivamente.

Magnitud Nº horas	10	15	20
Magnitud Nº faltas	40	30	20

$$10 \cdot 40 \neq 15 \cdot 30 \neq 20 \cdot 20$$

Si dos magnitudes son inversamente proporcionales, podemos aplicar para la resolución del ejercicio la llamada **REGLA DE TRES SIMPLE INVERSA**.

1. Proporcionalidad simple.

EJEMPLO 1:

Un alumno tarda 6 horas en hacer una ruta campestre caminando a 8 km/h. ¿Cuánto tardará si camina a 12 km/h?.

Suponemos que la velocidad es constante: Son magnitudes inversamente proporcionales.

Magnitud Tiempo (horas)	6	x
Magnitud Velocidad (km/h)	8	12

$$6 \cdot 8 = x \cdot 12$$

Velocidad		Nº horas tarda
8	$\longrightarrow$	6
12	$\longrightarrow$	x

$$12 \cdot x = 6 \cdot 8 \Rightarrow x = \frac{6 \cdot 8}{12} = 4\ horas$$

EJEMPLO 2:

Si cuatro pintores nos pintan la vivienda en diez días, ¿en cuántos días nos la pintarían 5 pintores?.

Nº pintores		Nº días
4	$\longrightarrow$	10
5	$\longrightarrow$	x

$$5 \cdot x = 4 \cdot 10 \Rightarrow x = \frac{4 \cdot 10}{5} = 8\ días$$

1. Proporcionalidad simple.

1. **Resuelve**

a) **Una botella de aceite de tres cuartos de litro cuesta 3,60 €. ¿A cómo sale el litro?**

b) **Dos máquinas cortacésped siegan un prado en media hora. ¿Cuánto tardarían tres máquinas?**

c) **Un cicloturista ha recorrido 4 km en 12 minutos. ¿Qué distancia recorrerá en media hora?**

d) **Un camión, a 60 km/h, tarda en ir de A a B 40 minutos. ¿Cuánto tardará un coche a 80 km/h?**

a) El precio de la botella de aceite es directamente proporcional a su capacidad.

ACEITE (litros)	COSTE (€)
0,75	3,60
1	x

D

$$\frac{3,60}{x} = \frac{0,75}{1} \rightarrow x = \frac{3,60 \cdot 1}{0,75} = 4,80 \text{ €}$$

Un litro de aceite cuesta 4,80 €.

b) El tiempo que se tarda en segar el prado es inversamente proporcional al número de máquinas cortacésped que se utilizan.

MÁQUINAS	TIEMPO (min)
2	30
3	x

I

$$\frac{30}{x} = \frac{3}{2} \rightarrow x = \frac{30 \cdot 2}{3} = 20 \text{ minutos}$$

Tres máquinas tardarían 20 minutos en segar el prado.

1. Proporcionalidad simple.

c) La distancia recorrida por el cicloturista es directamente proporcional al tiempo.

DISTANCIA (km)	TIEMPO (min.)
4	12
x	30

D

$$\frac{4}{x} = \frac{12}{30} \rightarrow x = \frac{4 \cdot 30}{12} = 10 \text{ km}$$

En media hora el cicloturista recorrerá 10 km.

d) El tiempo que un camión tarda en recorrer una distancia es inversamente proporcional a la velocidad a la que circula.

VELOCIDAD (km/h)	TIEMPO (min)
60	40
80	x

I

$$\frac{40}{x} = \frac{80}{60} \rightarrow \frac{40 \cdot 60}{80} = 30 \text{ min.}$$

Si circula a 80 km/h el camión tardará media hora en ir de A a B.

1. Proporcionalidad simple.

2. **Si cada día gasto 3,60 €, mis ahorros durarán 15 días.**

¿Cuánto durarían si gastase 4,50 € diarios?

La duración del dinero ahorrado es inversamente proporcional al gasto diario.

GASTO DIARIO	DÍAS QUE DURAN
3,60	15
4,50	x

I

$$\frac{3,6}{4,5} = \frac{x}{15} \rightarrow x = \frac{3,6 \cdot 15}{4,5} = 12$$

Gastando 4,50 € al día, los ahorros durarían 12 días.

1. Proporcionalidad simple.

3. Cinco metros y medio de cable eléctrico han costado 4,51 €.

¿Cuánto costarán 8 m 35 cm del mismo tipo de cable?

El coste del cable es directamente proporcional a su longitud.

$$\underbrace{\begin{array}{cc} \text{CABLE (m)} & \text{COSTE (€)} \\ \hline 5{,}5 & 4{,}51 \\ 8{,}35 & x \end{array}}_{\text{D}}$$

$$\frac{4,51}{x} = \frac{5,5}{8,35} \rightarrow x = \frac{4,51 \cdot 8,35}{5,5} = 6,85 \text{ €}$$

8 m y 35 cm del mismo tipo de cable costarán 6,85 €.

1. Proporcionalidad simple.

4. **Un ganadero tiene reservas de pasto para alimentar a 35 vacas durante 60 días.**

¿Cuánto le durarán sus reservas si vende 15 vacas?

El tiempo que un ganadero puede alimentar a sus vacas, con una cantidad fija de pasto, es inversamente proporcional al número de estas.

$$\begin{array}{cc} \text{VACAS} & \text{TIEMPO (días)} \\ \hline 35 & 60 \\ \underbrace{20 \qquad\qquad}_{\text{I}} & \!\!\!\!\!\! x \end{array}$$

$$\frac{60}{x} = \frac{20}{35} \rightarrow x = \frac{60 \cdot 35}{20} = 105 \text{ días}$$

Sus reservas le durarán 105 días si tiene que alimentar a 20 vacas.

1. Proporcionalidad simple.

5. En el comedor del colegio se han consumido 132 barras de pan durante tres días.

Si una barra cuesta 0,35 €, ¿qué presupuesto debe destinar el administrador para la compra de pan a la semana?

El número de días es directamente proporcional al número de barras de pan consumidas.

Consideramos que el comedor se abre 5 días a la semana.

$$\underbrace{\begin{array}{cc} \text{N.º DE DÍAS} & \text{BARRAS DE PAN} \\ \hline 3 & 132 \\ 5 & x \end{array}}_{\text{D}}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{132}{x} \rightarrow x = \frac{132 \cdot 5}{3} = 220$$

Presupuesto = 220 · 0,35 = 77 € a la semana.

2. Proporcionalidad compuesta.

Si tenemos tres o más magnitudes, se estudia el tipo de proporcionalidad entre dos de ellas (la que contenga la incógnita y otra cualquiera), dejando fijas las demás.

2.1 Proporcionalidad directa-directa.

Ejemplo 1

Un coche, a una velocidad de 100 km/h, durante 7 horas, recorre 700 km. ¿Cuántos km recorrerá otro coche a una velocidad de 120 km/h durante 5 horas?.

P. DIRECTA

P. DIRECTA

Velocidad		Nº horas tarda		Distancia
100	→	7	→	700
120	→	5	→	x

$$\frac{100}{120}\cdot\frac{7}{5}=\frac{700}{x}\Rightarrow x=\frac{120\cdot 5\cdot 700}{100\cdot 7}=600\ km$$

2. Proporcionalidad compuesta.

Ejemplo 2

El ayuntamiento de cierta pequeña localidad estima que 100 farolas, encendidas durante 8 horas diarias, ocasionan un gasto mensual de 3.200 €. ¿Cuál sería el gasto estimado para 250 farolas, encendidas solo durante 7 horas al día?

P. DIRECTA

P. DIRECTA

Nº farolas		Iluminación (h/día)		Gasto mensual
100	$\longrightarrow$	8	$\longrightarrow$	3200
250	$\longrightarrow$	7	$\longrightarrow$	x

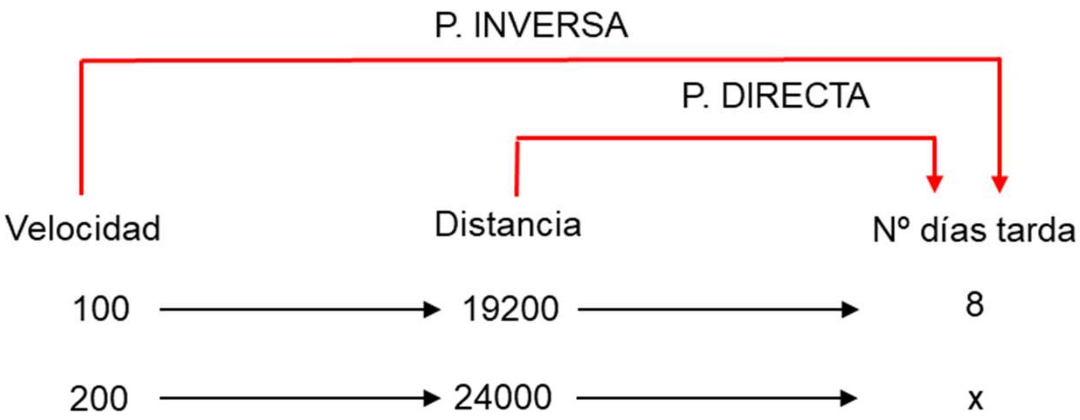
$$\frac{100}{250} \cdot \frac{8}{7} = \frac{3200}{x} \Longrightarrow x = \frac{3200 \cdot 250 \cdot 7}{100 \cdot 8} = 7000 \text{ €}$$

2. Proporcionalidad compuesta.

2.2 Proporcionalidad directa-inversa.

Ejemplo 1

Un coche, a una velocidad de 100 km/h tarda 8 días en recorrer 19.200 km ¿Cuántos días tardará otro coche en recorrer 24.000 km, a una velocidad de 200 km/h?.



$$\frac{200}{100}\cdot\frac{19200}{24000}=\frac{8}{x}\Rightarrow x=\frac{100\cdot 24000\cdot 8}{200\cdot 19200}=5\ días$$

2. Proporcionalidad compuesta.

Ejemplo 2

El ayuntamiento de cierta pequeña localidad estima que 100 farolas, encendidas durante 8 horas diarias, ocasionan un gasto mensual de 3.200 €. ¿Cuál será el máximo de horas que se podrán encender cada día las 250 farolas, si el presupuesto mensual para iluminación tiene un tope de 7000 €?

P. DIRECTA

P. INVERSA

Gasto mensual   Nº farolas   Iluminación (h/día)

$3200 \longrightarrow 100 \longrightarrow 8$

$7000 \longrightarrow 250 \longrightarrow x$

$$\frac{3200}{7000}\cdot\frac{250}{100}=\frac{8}{x}\Longrightarrow x=\frac{7000\cdot 100\cdot 8}{3200\cdot 250}=7\ \textit{horas al día como máximo}$$

2. Proporcionalidad compuesta.

Ejemplo 3

Una familia de cuatro miembros tiene víveres para sobrevivir los 10 días que se prevé estén incomunicados por la nieve, consumiendo a razón de 2 kg por persona y día. Pero se les unen dos familiares más, con lo que deciden reducir el consumo a 1,5 kg por persona y día. ¿Cuántos días podrán sobrevivir en esas condiciones?.

P. INVERSA

P. INVERSA

Nº miembros		Nº kg/día		Nº de días
4	→	2	→	10
6	→	1,5	→	x

$$\frac{6}{4}\cdot\frac{1,5}{2}=\frac{10}{x}\Longrightarrow x=\frac{4\cdot 2\cdot 10}{6\cdot 1,5}=8,89\simeq 9\ días$$

2. Proporcionalidad compuesta.

1. **Por el alquiler de dos bicicletas, durante 3 horas, pagamos ayer 11,10 €. ¿Cuánto nos costará hoy alquilar tres bicicletas durante cinco horas?**

BICICLETAS	TIEMPO (horas)	COSTE (€)
2	3	11,10
3	5	x

$$\frac{11,10}{x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \rightarrow \frac{11,10}{x} = \frac{2}{5} \rightarrow x = \frac{11,10 \cdot 5}{2} = 27,75 \text{ €}$$

El alquiler de tres bicicletas durante 5 horas costará 27,75 €.

2. **Un caño que arroja medio litro por segundo llena un camión cisterna en 3 horas. ¿Qué caudal debería proporcionar para llenar dos cisternas a la hora?**

El número de cisternas que se llenan es directamente proporcional al caudal. El tiempo que tarda en llenarse una cisterna es inversamente proporcional al caudal.

N.° DE CISTERNAS	TIEMPO (h)	CAUDAL (l/s)
1	3	0,5
2	1	x

$$\frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3} = \frac{0,5}{x} \rightarrow x = \frac{2 \cdot 3 \cdot 0,5}{1} = 3$$

Para llenar dos cisternas en una hora, es necesario un caudal de 3 l/s.

2. Proporcionalidad compuesta.

3. Un jardinero cobra 120 € por dar seis cortes de césped a una parcela de 250 m^2.

a) ¿Cuánto cobrará por dar ocho cortes a una parcela de 400 m^2?

b) ¿Cuántos cortes ha contratado para una parcela de 300 m^2, con un coste de 72 €?

a)

SUPERFICIE (m^2)	CORTES DE CÉSPED	COSTE (€)
250	6	120
400	8	x

D D

$$\frac{120}{x} = \frac{250}{400} \cdot \frac{6}{8} \rightarrow \frac{120}{x} = \frac{250 \cdot 6}{400 \cdot 8} \rightarrow x = \frac{120\ 400 \cdot 8}{250 \cdot 6} = 256$$

Dar 8 cortes de césped a una parcela de 400 m^2 costará 256 €.

b)

SUPERFICIE (m^2)	CORTES DE CÉSPED	COSTE (€)
250	6	120
300	x	72

I D

$$\frac{6}{x} = \frac{300}{250} \cdot \frac{120}{72} \rightarrow \frac{6}{x} = \frac{300 \cdot 120}{250 \cdot 72} \rightarrow x = \frac{6 \cdot 250 \cdot 72}{300 \cdot 120} = 3 \text{ cortes}$$

Con 72 € se pueden dar 3 cortes de césped a una parcela de 300 m^2.

2. Proporcionalidad compuesta.

4. **Una cadena de cines, con cinco locales, vende 15 000 entradas en tres semanas. ¿Cuántas entradas puede estimar que vendería a la semana si tuviera siete locales?**

LOCALES	SEMANAS	ENTRADAS
5	3	15 000
7	1	x

$$\frac{15\,000}{x} = \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{1} \rightarrow \frac{15\,000}{x} = \frac{5 \cdot 3}{7 \cdot 1} \rightarrow x = \frac{15\,000 \cdot 7 \cdot 1}{5 \cdot 3} = 7\,000$$

Si tuviera 7 locales vendería 7 000 entradas en 1 semana.

5. **Tres pintores, trabajando 8 horas al día, pintan un muro en 10 días. ¿Cuánto tardarían 5 pintores trabajando 6 horas cada día?**

PINTORES	HORAS/DÍA	DÍAS
3	8	10
5	6	x

$$\frac{10}{x} = \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{3} \rightarrow \frac{10}{x} = \frac{6 \cdot 5}{8 \cdot 3} \rightarrow x = \frac{10 \cdot 8 \cdot 3}{6 \cdot 5} = 8 \text{ días}$$

5 pintores, trabajando 6 horas al día, tardarán 8 días en pintar el muro.

2. Proporcionalidad compuesta.

6. **Una cuadrilla de 5 obreros ha cobrado 1 050 € por un trabajo que ha durado tres días. ¿Cuántos obreros forman otra cuadrilla que, cobrando las mismas tarifas, ha presentado una factura de 1 680 € por un trabajo de 6 días?**

OBREROS	FACTURA (€)	TIEMPO (días)
5	1 050	3
x	1 680	6

D

I

$$\frac{5}{x} = \frac{1050}{1680} \cdot \frac{6}{3} \rightarrow \frac{5}{x} = \frac{1050 \cdot 6}{1680 \cdot 3} \rightarrow x = \frac{5 \cdot 1680 \cdot 3}{1050 \cdot 6} = 4 \text{ obreros}$$

La cuadrilla que, por un trabajo de 6 días, ha presentado una factura de 1 680 € está formada por 4 obreros.

3. Repartos proporcionales.

3.1 Repartos con proporcionalidad directa.

PROPIEDAD
Si dos magnitudes son directamente proporcionales se cumple siempre que la suma o resta de cantidades siguen siendo directamente proporcionales.

Magnitud A	a_1	a_2	$a_1 + a_2$
Magnitud B	b_1	b_2	$b_1 + b_2$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2} = k$$

$$\frac{a_1}{b_1} = k \Longrightarrow a_1 = k \cdot b_1 \qquad \frac{a_2}{b_2} = k \Longrightarrow a_2 = k \cdot b_2$$

$$a_1 + a_2 = k \cdot b_1 + k \cdot b_2 = k \cdot (b_1 + b_2) \Longrightarrow \frac{a_1+a_2}{b_1+b_2} = k$$

3. Repartos proporcionales.

En problemas de reparto nos suelen dar la cantidad total a repartir (**S = a + b + c**) y las cantidades directamente proporcionales (**a', b', c'**), quedando:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{a+b+c}{a'+b'+c'} = k$$

Entonces:

$$\frac{a}{a'} = \frac{S}{a'+b'+c'} \Rightarrow a = a' \cdot \frac{S}{a'+b'+c'} = a' \cdot k$$

$$\frac{b}{b'} = \frac{S}{a'+b'+c'} \Rightarrow b = b' \cdot \frac{S}{a'+b'+c'} = b' \cdot k$$

$$\frac{c}{c'} = \frac{S}{a'+b'+c'} \Rightarrow c = c' \cdot \frac{S}{a'+b'+c'} = c' \cdot k$$

3. Repartos proporcionales.

EJEMPLO 1

Una madre reparte 60 € entre sus tres hijos, en razón directamente proporcional al número de semanas que la han ayudado en las tareas caseras, que han sido de 3,4 y 5 respectivamente. ¿Cuánto les ha correspondido a cada uno?.

$$\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{5}=\frac{60}{12}=k\Longrightarrow k=5$$

$$\frac{a}{3}=\frac{60}{3+4+5}\Longrightarrow a=3\cdot\frac{60}{12}=3\cdot 5=15€$$

$$b=4\cdot 5=20€$$

$$c=5\cdot 5=25€$$

3. Repartos proporcionales.

EJEMPLO 2

Un profesor de matemáticas reparte puntos extras entre cuatro alumnos que han buscado y solucionado problemas originales, en cantidad de 2, 4, 5 y 7 problemas respectivamente. Si al alumno que resolvió 4 problemas le correspondieron 0,75 puntos, ¿cuánto les ha correspondido a cada uno y cuántos puntos repartió en total?.

$$\frac{a}{2}=\frac{b}{4}=\frac{c}{5}=\frac{d}{7}=\frac{S}{18}=k$$

$$\frac{0,75}{4}=\frac{S}{18}\Longrightarrow S=\frac{18\cdot 0,75}{4}=3,375\Longrightarrow k=\frac{3,375}{18}=0,1875$$

$$a=2\cdot 0,1875=0,375$$

$$c=5\cdot 0,1875=0,9375$$

$$d=7\cdot 0,1875=1,3125$$

3. Repartos proporcionales.

3.1 Repartos con proporcionalidad inversa.

Si dos magnitudes son inversamente proporcionales se cumple siempre que:

Magnitud A	a_1	a_2	a_3
Magnitud B	b_1	b_2	b_3

$$a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 = a_3 \cdot b_3 = k$$

Esto es lo mismo que decir que: $$\frac{a_1}{\frac{1}{b_1}} = \frac{a_2}{\frac{1}{b_2}} = \frac{a_3}{\frac{1}{b_3}} = k$$

Por lo tanto, las magnitudes A y $\frac{1}{B}$ son directamente proporcionales

Magnitud A	a_1	a_2	a_3
Magnitud 1 / B	$1 / b_1$	$1 / b_2$	$1 / b_3$

3. Repartos proporcionales.

Repartir una cantidad en partes inversamente proporcionales a los números **a**, **b** y **c** es equivalente a repartir dicha cantidad en partes directamente proporcionales a **1 / a**, **1 / b** y **1 / c**

EJEMPLO 1

Se venden tres máquinas por 1700 €, en razón inversamente proporcional a la antigüedad de cada una, que es de 10,20 y 50 años respectivamente. ¿Cuánto cuesta cada una?

$$\frac{a}{1/10} = \frac{b}{1/20} = \frac{c}{1/50} = \frac{1700}{17/100} = k \Rightarrow k = 10000$$

$$\frac{a}{1/10} = 10000 \Rightarrow a = 10000 \cdot \frac{1}{10} = 1000€$$

$$\frac{b}{1/20} = 10000 \Rightarrow b = 10000 \cdot \frac{1}{20} = 500€$$

$$\frac{c}{1/50} = 10000 \Rightarrow c = 10000 \cdot \frac{1}{50} = 200€$$

3. Repartos proporcionales.

EJEMPLO 2

Un padre reparte 100 € entre sus tres hijos, en razón inversamente proporcional a los días que han llegado tarde a casa, que son 2, 5 y 8 días respectivamente. ¿Cuánto les corresponde a cada uno?.

$$\frac{a}{1/2}=\frac{b}{1/5}=\frac{c}{1/8}=\frac{100}{33/40}=k\Longrightarrow k\backsimeq 121,21$$

$$\frac{a}{1/2}=121,21\Longrightarrow a=121,21\cdot\frac{1}{2}\backsimeq 60,61€$$

$$\frac{b}{1/5}=121,21\Longrightarrow b=121,21\cdot\frac{1}{5}\backsimeq 24,24€$$

$$\frac{c}{1/8}=121,21\Longrightarrow c=121,21\cdot\frac{1}{8}\backsimeq 15,15€$$

3. Repartos proporcionales.

1. **Dos hermanas compran cinco juegos de toallas por 175 €. Una se queda con tres juegos, y la otra, con dos. ¿Cuánto debe pagar cada una?**

Cada juego de toallas cuesta $175 : 5 = 35$ €.

Quien se queda con 3 juegos pagará $3 \cdot 35 = 105$ €.

Quien se queda con 2 juegos pagará $2 \cdot 35 = 70$ €.

2. **Tres amigas que comparten piso reciben una factura de la compañía eléctrica por un importe de 62,40 €. Amelia llegó al piso hace 60 días; Laura, 20 días después, y Cristina solo lleva en la casa 20 días. ¿Cuánto debe pagar cada una?**

Amelia lleva en el piso 60 días.

Laura lleva en el piso 40 días.

Cristina lleva en el piso 20 días.

Se divide el importe de la factura entre el número total de días, $60 + 40 + 20 = 120$.

$$42{,}4 : 120 = 0{,}52 \text{ € por día}$$

El pago de la factura se hará como sigue:

Amelia $\rightarrow$ $60 \cdot 0{,}52 = 31{,}20$ €

Laura $\rightarrow$ $40 \cdot 0{,}52 = 20{,}80$ €

Cristina $\rightarrow$ $20 \cdot 0{,}52 = 10{,}40$ €

3. Repartos proporcionales.

3. **Reparte 660 en partes directamente proporcionales a 1, 2 y 3.**

$1 + 2 + 3 = 6 \rightarrow 660 : 6 = 110$

- $1 \rightarrow 110 \cdot 1 = 110$
- $2 \rightarrow 110 \cdot 2 = 220$
- $3 \rightarrow 110 \cdot 3 = 330$

4. **Reparte 660 en partes inversamente proporcionales a 1, 2 y 3.**

Repartir 660 en partes inversamente proporcionales a 1, 2 y 3 es equivalente a repartir 660 en partes directamente proporcionales a 1, $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{6}{6} + \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{11}{6}$$

$$660 : \frac{11}{6} = 360$$

- $1 \rightarrow 360 \cdot 1 = 360$
- $2 \rightarrow 360 \cdot \frac{1}{2} = 180$
- $3 \rightarrow 360 \cdot \frac{1}{3} = 120$

3. Repartos proporcionales.

5. **Un conductor profesional ha realizado un viaje de A a B, con un vehículo pesado, a una media de 50 km/h.**

A continuación ha regresado conduciendo un utilitario, a 100 km/h. Y por último ha viajado otra vez a B, con una furgoneta, a 80 km/h.

¿Cuánto tiempo ha invertido en cada trayecto, si ha tardado cuatro horas y cuarto en los tres recorridos?

Repartir 255 en partes inversamente proporcionales a 50, 100 y 80 es equivalente a repartir 255 en partes directamente proporcionales a $\frac{1}{50}$, $\frac{1}{100}$ y $\frac{1}{80}$.

$$\frac{1}{50} + \frac{1}{100} + \frac{1}{80} = \frac{8 + 4 + 5}{400} = \frac{17}{400}$$

$$255 : \frac{17}{400} = 6\,000$$

- Vehículo pesado $\rightarrow$ $\frac{1}{50} \cdot 6\,000 = 120$ minutos = 2 horas
- Utilitario $\rightarrow$ $\frac{1}{100} \cdot 6\,000 = 60$ minutos = 1 hora
- Furgoneta $\rightarrow$ $\frac{1}{80} \cdot 6\,000 = 75$ minutos = 1 hora y cuarto

Por tanto, cuando realizó el trayecto de A a B con un vehículo pesado tardó 2 horas, con un utilitario, tardó 1 hora, y en furgoneta, 1 hora y cuarto.

4. Cálculo con porcentajes.

Un porcentaje es una razón cuyo consecuente es 100, es decir, un porcentaje es una forma de expresar un número como una fracción de 100.

Ejemplo:

$4\ \% \rightarrow \frac{4}{100}$; significa 4 de cada 100 y su razón de proporcionalidad es r = 0,04.

EJEMPLO 1

En Matemáticas han aprobado 2 de cada cinco alumnos.

Alumnado (Total)		Alumnado (Aprobado)
5	→	2
100	→	x

$$5 \cdot x = 100 \cdot 2 \Longrightarrow x = \frac{100 \cdot 2}{5} = 40$$

$$\frac{2}{5} = \frac{x}{100} \Longrightarrow x = \frac{100 \cdot 2}{5} = 40 \Longrightarrow \textit{El porcentaje de aprobados es del } 40\%$$

Un porcentaje es una fracción de denominador 100, y se puede asociar a un número decimal:

Ejemplo:

$4\ \% \rightarrow \frac{4}{100} = 0{,}04$

El 65% de 1800 → 0,65 · 1800 = 1170

4. Cálculo con porcentajes.

1. Copia y completa la tabla asociando porcentaje, fracción y número decimal.

82 %			9 %		
	$\frac{53}{100}$			$\frac{7}{100}$	
		0,43			0,03

82 %	53 %	43 %	9 %	7 %	3 %
$\frac{82}{100}$	$\frac{53}{100}$	$\frac{43}{100}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{7}{100}$	$\frac{3}{100}$
0,82	0,53	0,43	0,09	0,07	0,03

2. Calcula.

a) 32 % de 500

b) 86 % de 60

c) 7 % de 850

d) 5 % de 347

e) 11,4 % de 4 000

f) 2,5 % de 88

g) 0,4 % de 900

h) 0,01 % de 5 000

i) 150 % de 398

j) 400 % de 740

a) 32 % de 500 = 0,32 · 500 = 160

b) 86 % de 60 = 0,86 · 60 = 51,6

c) 7 % de 850 = 0,07 · 850 = 59,5

d) 5 % de 347 = 0,05 · 347 = 17,35

e) 11,4 % de 4 000 = 0,114 · 4 000 = 456

f) 2,5 % de 88 = 0,025 · 88 = 2,2

g) 0,4 % de 900 = 0,004 · 900 = 3,6

h) 0,01 % de 5 000 = 0,0001 · 5 000 = 0,5

i) 150 % de 398 = 1,50 · 398 = 597

j) 400 % de 740 = 4 · 740 = 2 960

4. Cálculo con porcentajes.

3. **Un agricultor, que dispone de 40 hectáreas de terreno, siembra el 65 % de cebada; el 15 %, de trigo, y el resto, de avena. ¿Cuántas hectáreas ocupa la avena?**

El porcentaje del terreno sembrado de avena es:

$$100\,\% - (65\,\% + 15\,\%) = 20\,\%$$

Por tanto, de las 40 ha de terreno la avena ocupa:

$$20\,\% \text{ de } 40 \text{ ha} = 0{,}2 \cdot 40 = 8 \text{ ha}$$

4. **Dos hermanos compran un balón que cuesta 42 €. El mayor paga el 60 %. ¿Qué porcentaje paga el pequeño? ¿Cuánto ha de pagar?**

Si el mayor paga el 60 %, el pequeño paga el 40 %.

Por tanto, el pequeño paga 40 % de 42 € = $0{,}4 \cdot 42 = 16{,}80$ €.

5. **Un trabajador tiene un salario bruto de 1 400 € al mes, del que le retienen un 15 % de impuestos. ¿Cuánto le retienen? ¿Qué porcentaje del salario bruto se lleva? ¿Cuál es el salario neto?**

- Le retienen el 15 % de 1 400 € = $0{,}15 \cdot 1\,400 = 210$ €.
- Se lleva 100 % – 15 % = 85 % del salario bruto.
- Salario neto = 85 % de 1 400 € = $0{,}85 \cdot 1\,400 = 1\,190$ €

4. Cálculo con porcentajes.

6. **El ayuntamiento de cierta ciudad sacó a concurso 150 plazas de funcionarios municipales. Se presentaron 2 840 aspirantes de los que un 95 % fue eliminado durante la selección. ¿Se cubrieron todas las plazas?**

Si fueron eliminados el 95 % de aspirantes, entonces pasaron la selección el 5 % de 2 840 aspirantes:

$$0{,}05 \cdot 2\,840 = 142 \text{ aspirantes}$$

El ayuntamiento sacó a concurso 150 plazas y únicamente pasaron la selección 142 aspirantes del total presentados. Por tanto, no se cubrieron todas las plazas.

Cálculo del total, conocidos el % y la parte

$$65\% \text{ de } T = 1170 \rightarrow 0{,}65 \cdot T = 1170 \rightarrow T = 1170 : 0{,}65 = 1800$$

Cálculo del % conocidos el total y la parte

$$P\% \text{ de } 1800 = 1170 \rightarrow \frac{P}{100} \cdot 1800 = 1170 \rightarrow P = \frac{1170 \cdot 100}{1800} = 65$$

4. Cálculo con porcentajes.

7. **Calcula el valor de T en cada caso:**

a) 16 % de $T = 52$ b) 24 % de $T = 156$ c) 18 % de $T = 58,5$

d) 8 % de $T = 10,8$ e) 0,8 % de $T = 5,8$ f) 0,25 % de $T = 3$

a) $0,16 \cdot T = 52 \rightarrow T = 52 : 0,16 = 325$

b) $0,24 \cdot T = 156 \rightarrow T = 156 : 0,24 = 650$

c) $0,18 \cdot T = 58,5 \rightarrow T = 58,5 : 0,18 = 325$

d) $0,08 \cdot T = 10,8 \rightarrow T = 10,8 : 0,08 = 135$

e) $0,08 \cdot T = 5,8 \rightarrow T = 5,8 : 0,008 = 725$

f) $0,0025 \cdot T = 3 \rightarrow T = 3 : 0,0025 = 1\,200$

8. **Calcula el valor de P en cada caso:**

a) P % de 380 = 57 b) P % de 225 = 9 c) P % de 190 = 51,3

d) P % de 46 = 2,88 e) P % de 2 500 = 5 f) P % de 1 800 = 27

a) $\frac{P}{100} \cdot 380 = 57 \rightarrow P = \frac{57}{380} \cdot 100 = 15\%$

b) $\frac{P}{100} \cdot 225 = 9 \rightarrow P = \frac{9}{225} \cdot 100 = 4\%$

c) $\frac{P}{100} \cdot 190 = 51,3 \rightarrow P = \frac{51,3}{190} \cdot 100 = 27\%$

d) $\frac{P}{100} \cdot 46 = 2,88 \rightarrow P = \frac{2,88}{46} \cdot 100 = 6,26\%$

e) $\frac{P}{100} \cdot 2\,500 = 5 \rightarrow P = \frac{5}{2\,500} \cdot 100 = 0,2\%$

f) $\frac{P}{100} \cdot 1800 = 27 \rightarrow P = \frac{27}{1800} \cdot 100 = 1,5\%$

4. Cálculo con porcentajes.

9. Hoy había en el estadio de fútbol 24 000 aficionados, lo que supone un 80 % de su capacidad total. ¿Cuántos aficionados hay en el campo cuando se llena?

T = capacidad total del campo

80 % de $T = 24\,000 \rightarrow 0{,}8 \cdot T = 24\,000 \rightarrow T = 24\,000 : 0{,}8 = 30\,000$ aficionados

Por tanto, cuando el campo se llena hay en él 30 000 aficionados.

10. Elena tenía en su cuenta 5 000 € y ha adquirido un televisor por 750 €. ¿Qué porcentaje de sus ahorros ha gastado?

De un total de 5 000 €, se ha gastado 750 €. ¿Cuánto se ha gastado de cada 100 €?

TOTAL	PARTE
5 000	750
100	x

$$\frac{5\,000}{100} = \frac{750}{x} \rightarrow x = \frac{750 \cdot 100}{5\,000} = 15$$

Se ha gastado el 15 % de sus ahorros.

4. Cálculo con porcentajes.

11. En mi clase somos 16 chicas, lo que supone un $53,\widehat{3}$ % del total de alumnos y alumnas. ¿Cuál es el porcentaje de chicos? ¿Cuántos somos en total?

- Si el porcentaje de chicas es el $53,\widehat{3}$ %, entonces el porcentaje de chicos es:

$$100\,\% - 53,\widehat{3}\,\% = 46,\widehat{7}\,\%$$

- $53,\widehat{3}\ \% = \dfrac{533-53}{9}\ \% = \dfrac{160}{3}\ \%$

En clase hay 16 chicas que son el $\dfrac{160}{3}$ % del total, por tanto:

ALUMNOS	PORCENTAJE
16	160/3
x	100

D

$$\frac{16}{x} = \frac{160/3}{100} \rightarrow x = \frac{16 \cdot 100}{160/3} = 30$$

Por tanto, el número total de alumnos de la clase es 30.

4. Cálculo con porcentajes.

12. Compré un ordenador portátil por 490 € y una pantalla supletoria por 135 €. ¿Qué porcentaje del gasto efectuado supone el ordenador? ¿Y la pantalla?

Portátil = 490 €
Pantalla supletoria = 135 €
→ Gasto total = 490 € + 135 € = 625 €

TOTAL	PARTE
625	490
100	x

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{D}}$

El precio del ordenador representa el 78,4 % del gasto total y el precio de la pantalla es el 100 % – 78,4 % = 21,6 % del total.

13. Bernardo ha comprado una bicicleta. Sus padres le han subvencionado el 50 %, y su abuela, el 30 %. Alejandro ha puesto el resto que son 108 euros. ¿Cuál era el precio de la bicicleta?

Si sus padres le han subvencionado el 50 % y su abuela el 30 %, Bernardo ha puesto:

100 % – (50 % + 30 %) = 20 % del precio total de la bicicleta (T).

20 % de T = 108 € → $0{,}2 \cdot T = 108$ € → $T = 108 : 0{,}2 = 540$ €

La bicicleta costó 540 €.

4. Cálculo con porcentajes.

Aumentos y disminuciones porcentuales

Se llama **índice de variación** al número que multiplicado por la cantidad inicial, nos da la cantidad final.

$$Capital_{Final} = Índice_{Variación} \cdot Capital_{Inicial}$$

En los aumentos porcentuales, el índice de variación es **1 más el aumento porcentual** expresado en forma decimal.

$$Índice_{Variación} = 1 + \frac{\%\ Aumento}{100}$$

Ejemplo: El precio de un pantalón son 80€ sin impuestos, calcula su precio final si el IVA es del 21%

Precio final = 1,21 · 80 = 96,80€

En las disminuciones porcentuales, el índice de variación es **1 menos la disminución porcentual** expresado en forma decimal.

$$Índice_{Variación} = 1 - \frac{\%\ Disminución}{100}$$

Ejemplo: El precio final de un pantalón son 90€, si hoy tiene una rebaja del 15% sobre el precio final, calcula su precio rebajado.

Precio final = 0,85 · 90 = 76,50€

4. Cálculo con porcentajes.

Cálculo de la cantidad inicial

En los aumentos y en las disminuciones porcentuales, para calcular la cantidad inicial. Se divide la cantidad final entre el índice de variación.

Ejemplo: El precio final de un pantalón son 96,80€, calcula su precio sin impuestos si el IVA es del 21%

Precio inicial = 96,80 : 1,21 = 80€

Ejemplo: El precio final de un pantalón con el 15% de rebaja es 76,50€, calcula el precio inicial del pantalón.

Precio final = 76,50 : 0,85 = 90€

Cálculo del porcentaje de aumento o disminución

Para calcular el tanto por ciento de aumento o disminución, se calcula primero el índice de variación, dividiendo la cantidad final entre la inicial. Conocido este, se obtiene con facilidad el porcentaje.

Ejemplo: Compré en las rebajas una bicicleta por 416€ que costaba 640€. ¿Cuál fue el porcentaje de rebaja?

$$416 = I_{\text{variación}} \cdot 640 \rightarrow I_{\text{variación}} = 416 : 640 = 0{,}65$$

$0{,}65 = 1 - P/100 \rightarrow P\ \% = 35\%$; La bicicleta tenía una rebaja del 35%

4. Cálculo con porcentajes.

15. Copia y completa en tu cuaderno.

$C_{INICIAL}$	AUMENTO	$I_{VARIACIÓN}$	C_{FINAL}
850	32 %		
		1,25	1 350
	2 %		331,5

$C_{INICIAL}$	AUMENTO	$I_{VARIACIÓN}$	C_{FINAL}
850	32 %	1,32	1 122
1 080	25 %	1,25	1 350
325	2 %	1,02	331,5

$C_{INICIAL}$	DESCUENTO	$I_{VARIACIÓN}$	C_{FINAL}
630		0,80	
	8 %		79
		0,98	331,5

$C_{INICIAL}$	DESCUENTO	$I_{VARIACIÓN}$	C_{FINAL}
630	20 %	0,80	504
85,87	8 %	0,92	79
338,27	2 %	0,98	331,5

16. En una tienda de informática han subido todos los productos un 7 %. Un ordenador valía 840 €, y una impresora multifunción, 80 €. ¿Cuánto valen ahora?

$$\text{Ordenador: } 840 + \frac{7 \cdot 840}{100} = 898{,}80 \text{ €}$$

$$\text{Impresora: } 80 + \frac{7 \cdot 80}{100} = 85{,}60 \text{ €}$$

17. Un inversor compra acciones por valor de 15 000 €. Una semana después, se ve obligado a venderlas, a pesar de que han bajado un 4 %. ¿Cuánto dinero obtiene de la venta?

Las acciones han bajado un 4 % $\to I_{VARIACIÓN} = 1 - 0{,}04 = 0{,}96$

$$C_{FINAL} = I_{VARIACIÓN} \cdot C_{INICIAL} \to C_{FINAL} = 0{,}96 \cdot 15\,000 = 14\,400 \text{ €}$$

El inversor obtuvo 14 400 € por la venta de las acciones.

4. Cálculo con porcentajes.

18. **¿Cuánto pagará Iván por un traje que costaba 685 €, si le hacen una rebaja del 25 %?**

El traje está rebajado un 25 % $\rightarrow$ $I_{\text{VARIACIÓN}} = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$

$$C_{\text{FINAL}} = I_{\text{VARIACIÓN}} \cdot C_{\text{INICIAL}} \rightarrow C_{\text{FINAL}} = 0{,}75 \cdot 685 = 513{,}75 \text{ €}$$

Iván pagará 513,75 € por el traje.

19. **Un grupo de amigos y amigas cena en un restaurante que carga en los precios de la carta un 6 % de IVA. La cuenta, sin IVA, asciende a 360 €. ¿Cuánto pagarán por la cena?**

IVA = 6 % $\rightarrow$ $I_{\text{VARIACIÓN}} = 1 + 0{,}06 = 1{,}06$

$$C_{\text{FINAL}} = I_{\text{VARIACIÓN}} \cdot C_{\text{INICIAL}} \rightarrow C_{\text{FINAL}} = 1{,}06 \cdot 360 = 381{,}60 \text{ €}$$

La cuenta, IVA incluido, asciende a 381,60 €.

20. **¿Cuánto costaba un vestido que, rebajado un 25 %, sale por 84 €?**

Rebaja del 25 % $\rightarrow$ $I_{\text{VARIACIÓN}} = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$

$$C_{\text{FINAL}} - I_{\text{VARIACIÓN}} \cdot C_{\text{INICIAL}} \rightarrow 84 = 0{,}75 \cdot C_{\text{INICIAL}} \rightarrow C_{\text{INICIAL}} = 84 : 0{,}75 = 112 \text{ €}$$

El vestido costaba 112 €.

4. Cálculo con porcentajes.

21. **El coste de una reparación de fontanería asciende a 143,99 €, IVA incluido (21 %). ¿Cuál era el importe de la factura antes de cargar el IVA?**

IVA = 21 % $\rightarrow I_{\text{VARIACIÓN}} = 1 + 0{,}21 = 1{,}21$

$C_{\text{FINAL}} = I_{\text{VARIACIÓN}} \cdot C_{\text{INICIAL}} \rightarrow 143{,}99 = 1{,}21 \cdot C_{\text{INICIAL}} \rightarrow C_{\text{INICIAL}} = 143{,}99 : 1{,}21 = 119$ €

La factura, antes de cargar el IVA, ascendía a 119 €.

22. **Un automovilista concierta con su seguro una cuota anual de 520 € el primer año, que bajará a 442 € el segundo año en caso de no sufrir incidencias.**

¿En qué porcentaje se rebajará la cuota si se cumple la condición exigida?

$C_{\text{FINAL}} = I_{\text{VARIACIÓN}} \cdot C_{\text{INICIAL}} \rightarrow 442 = I_{\text{VARIACIÓN}} \cdot 520 \rightarrow I_{\text{VARIACIÓN}} = 442 : 520 = 0{,}85$

$I_{\text{VARIACIÓN}} = 0{,}85 \rightarrow$ Rebaja del $(1 - 0{,}85) \cdot 100 = 15$ %

En caso de no sufrir incidencias el primer año, la cuota anual del seguro se rebajará un 15 % el segundo año.

23. **Un cine recibió 4 600 espectadores con el estreno de la semana pasada, y ya lleva 5 200 para el de esta semana. ¿En qué porcentaje se ha superado ya el número de espectadores de la semana pasada?**

$C_{\text{FINAL}} = I_{\text{VARIACIÓN}} \cdot C_{\text{INICIAL}} \rightarrow 5\,200 = I_{\text{VARIACIÓN}} \cdot 4\,600 \rightarrow I_{\text{VARIACIÓN}} = 5\,200 \cdot 4\,600 = 1{,}13$

$I_{\text{VARIACIÓN}} = 1{,}13 \rightarrow$ Aumentao del $(1{,}13 - 1) \cdot 100 = 13$ %

El número de espectadores se ha superado en un 13 % respecto a la semana pasada.

4. Cálculo con porcentajes.

Encadenamiento de variaciones porcentuales

Para encadenar variaciones porcentuales, se multiplican los índices de variación de los sucesivos pasos

24. **Un pueblo tenía 25 000 habitantes en 1950. Hasta 1975 su población aumentó un 18 % y, después, en el último cuarto del siglo XX, volvió a aumentar un 25 %. ¿Cuántos habitantes tenía en el año 2000?**

Aumento del 18 % $\rightarrow I_{V1} = 1{,}18$

Aumento del 25 % $\rightarrow I_{V2} = 1{,}25$

Índice de variación total: $I_{VT} = I_{V1} \cdot I_{V2} = 1{,}18 \cdot 1{,}25 = 1{,}475$

$$C_{FINAL} = I_{VT} \cdot C_{INICIAL} \rightarrow C_{FINAL} = 1{,}475 \cdot 25\,000 = 36\,875 \text{ habitantes}$$

En el año 2000, el pueblo tenía 36 875 habitantes.

4. Cálculo con porcentajes.

25. Un agricultor vende sus melocotones y sus albaricoques, en el árbol, a un intermediario.

— El intermediario recoge la fruta y la pone en el almacén cargando el precio en un 25 %.

— El almacén, en el proceso de limpia, selección y envasado, revaloriza el producto en un 60 %.

— Del almacén, pasa al transporte refrigerado que lo lleva al mercado central de una gran ciudad europea, proceso en el que se dobla el precio.

— Del mercado central pasa al minorista encareciéndose en un 50 %.

a) ¿Qué variación porcentual hay entre el precio cobrado por el agricultor y el pagado por el consumidor?

b) ¿A qué precio paga los melocotones el consumidor, si el agricultor los cobró a 0,45 €/kg?

c) ¿A cuánto vendió el agricultor los albaricoques, si el consumidor los paga a 2,40 €/kg?

a) • Aumento del 25 % → $I_{V1} = 1{,}25$

• Aumento del 60 % → $I_{V2} = 1{,}60$

• Se dobla el precio → $I_{V3} = 2$

• Aumento del 50 % → $I_{V4} = 1{,}50$

Índice de variación total: $I_{VT} = I_{V1} \cdot I_{V2} \cdot I_{V3} \cdot I_{V4} \rightarrow I_{VT} = 1{,}25 \cdot 1{,}60 \cdot 2 \cdot 1{,}50 = 6$

$I_{VT} = 6 \rightarrow$ Entre el precio cobrado por el agricultor y el pagado por el consumidor, ha habido un aumento del $(6 - 1) \cdot 100 = 500\,\%$

4. Cálculo con porcentajes.

b) $C_{FINAL} = I_{VT} \cdot C_{INICIAL} \rightarrow C_{FINAL} = 6 \cdot 0{,}45 = 2{,}7$ €/kg

El consumidor paga los melocotones a 2,7 €/kg.

c) $C_{FINAL} = I_{VT} \cdot C_{INICIAL} \rightarrow 2{,}40 = 6 \cdot C_{INICIAL} \rightarrow C_{INICIAL} = 2{,}40 : 6 = 0{,}4$ €/kg

El agricultor vendió los albaricoques a 0,4 €/kg.

26. El agua almacenada en un pantano sufre los siguientes cambios a lo largo de un año:

1.^er^ TRIMESTRE: sube el 27 %. **3.^er^ TRIMESTRE: baja el 48 %.**

2.° TRIMESTRE: sube el 11 %. **4.° TRIMESTRE: sube el 32 %.**

a) ¿Cuál es la variación durante el primer semestre? ¿Y durante el segundo semestre?

b) Si el día 30 de junio había 2 422 hm^3, ¿cuánto había el 1 de enero? ¿Y el 31 de diciembre?

a) A lo largo del primer semestre:

$I_{VARIACIÓN} = 1{,}27 \cdot 1{,}11 = 1{,}41 \rightarrow$ hay una subida del 41 %

A lo largo del segundo semestre:

$I_{VARIACIÓN} = 0{,}52 \cdot 1{,}32 = 0{,}69 \rightarrow$ hau una bajada del 31 %

b) El 1 de enero había:

$C_{INICIAL} \cdot 1{,}41 = 2\,422$

$C_{INICIAL} = 2\,422 : 1{,}41 = 1\,717{,}73$ hm^3

El 31 de3 diciembre había:

$C_{FINAL} = 2\,422 \cdot 0{,}69 = 1\,671{,}18$ hm^3

4. Cálculo con porcentajes.

28. **Un comerciante poco honesto, antes de anunciar unas rebajas del 40 %, aumenta el 40 % el precio de referencia de los artículos, creyendo que, de esa forma, las cosas quedarán igual. Sin embargo, sí hay un cierto descuento.**

a) ¿Cuál es el verdadero descuento?

b) Si un traje valía 550 €, ¿cuál será su valor en cada paso del proceso?

a) $\left.\begin{array}{l}\text{Aumento del } 40\,\% \rightarrow \text{Índice de variación: } 1{,}4 \\ \text{Descuento del } 40\,\% \rightarrow \text{Índice de variación: } 0{,}6\end{array}\right\} \rightarrow \text{Índice de variación: } 0{,}6 \cdot 1{,}4 = 0{,}84$

Por tanto, se ha aplicado una rebaja total del 16 %.

b) Tras la primera subida $\rightarrow$ $550 \cdot 1{,}4 = 770$ €

Tras la rebaja del 40 % $\rightarrow$ $770 \cdot 0{,}6 = 462$ €

5. Depósitos y préstamos.

Algunos términos que se usan en aritmética mercantil son:

- **Capital (C):** cantidad depositada o prestada.
- **Rédito (r%):** porcentaje anual de beneficios.
- **Tiempo (t):** periodo de duración del préstamo.
- **Interés (I):** beneficio total obtenido,

Vamos primero a resolver problemas de interés simple:

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} \quad si\ t\ es\ en\ años$$

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{1200} \quad si\ t\ es\ en\ meses$$

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{36000} \quad si\ t\ es\ en\ días, ya\ que\ se\ considera\ que\ el\ año\ comercial\ tiene\ 360\ días$$

5. Depósitos y préstamos.

1. Un banco paga el 6 % anual por el dinero depositado. Un inversor pone 20 000 €. Al cabo de un año deja el dinero y los intereses y añade otros 10 000 €. ¿Cuánto dinero le darán al acabar otro año?

- Tras el primer año tendrá: $20\,000 \cdot 1{,}06 = 21\,200$ €.
- Tras añadir 10 000 € tendrá: $21\,200 + 10\,000 = 31\,200$ €.
- Al acabar otro año tendrá: $31\,200 \cdot 1{,}06 = 33\,072$ €.

2. Se depositan 6 000 € al 3 %. Al acabar el año, se saca todo el dinero, se añaden 3 820 € y se deposita todo en otro banco al 5 %. ¿Cuánto dinero hay al final de otro año?

- Tras el primer año: $6\,000 \cdot 1{,}03 = 6\,180$ €
- Se añaden 3 820 €: $6\,180 + 3\,820 = 10\,000$ €
- Tras el segundo año: $10\,000 \cdot 1{,}05 = 10\,500$ €

3. ¿Qué intereses producen 1 000 € en cuatro meses, colocados al 4 % anual? ¿En cuánto se convierten?

Cuatro meses suponen $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ de año.

Un 4 % anual significa $4 \cdot \frac{1}{3} = 1{,}\widehat{3}$ % en cuatro meses:

$$1\,000 \text{ €} \xrightarrow{1{,}\widehat{3}\ \%} 1\,000 \cdot 0{,}01\widehat{3} = 13{,}33 \text{ €}$$

1 000 €, al 4 % anual, producen unos intereses de 13,33 € en cuatro meses. Por tanto, 1 000 € en cuatro meses se convierten en 1 013,33 €.

5. Depósitos y préstamos.

4. ¿Qué capital, colocado al 3,2 % durante 9 meses, produce unos intereses de 448,80 €?

Nueve meses suponen $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ de año.

Un 3,2 % al año significa $3{,}2 \cdot \frac{3}{4} = 2{,}4$ % en nueve meses.

$$C \xrightarrow{2,4\,\%} C \cdot 0{,}024 = 448{,}80 \text{ €} \rightarrow C = 448{,}80 : 0{,}024 = 18\,700 \text{ €}$$

El capital ascendía a 18 700 €.

5. Un capital de 120 000 €, colocado en una cuenta a seis meses, se convierte en 126 750 €. ¿Qué tanto por ciento anual abona la cuenta?

$$\left.\begin{array}{l}\text{Capital inicial} = 120\,000 \text{ €} \\ \text{Capital final} = 126\,750 \text{ €}\end{array}\right\} \rightarrow \text{Intereses} = 126\,750 - 120\,000 = 6\,750 \text{ €}$$

- I = interés semestral aplicado $\rightarrow$ $120\,000 \cdot I = 6\,750$ $\rightarrow$ $I = 6\,750 : 120\,000 = 0{,}05625$

  Abona un 5,625 % de interés semestral.

- Un 5,625 % en seis meses supone $2 \cdot 5{,}625 = 11{,}25$ % al año.

  Por tanto, la cuenta abona un 11,25 % anual.

5. Depósitos y préstamos.

Vamos ahora a resolver problemas de interés compuesto:

Llamemos C_0 al capital inicial y C_1 al capital obtenido al cabo de un año a un porcentaje anual del r%, entonces:

$$C_1 = C_0 + \frac{r}{100} \cdot C_0 = C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)$$

Si en vez de llevarnos el dinero lo dejamos un año más con el mismo rédito, entonces llamemos C_2 al capital obtenido al cabo del segundo año a un porcentaje anual del r%, entonces:

$$C_2 = C_1 + \frac{r}{100} \cdot C_1 = C_1 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right) = C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right) = C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^2$$

Si en vez de llevarnos el dinero lo dejamos n años con el mismo rédito, entonces llamemos C_n al capital obtenido al cabo de n años a un porcentaje anual del r%, entonces:

$$C_n = C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$

Si el periodo de capitalización es mensual (el banco añade cada mes los intereses al capital), entonces el capital final al cabo de k meses sería:

$$C_F = C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{1200}\right)^k$$

5. Depósitos y préstamos.

6. **Un inversor coloca 24 000 € al 4,8 % anual durante cinco años. ¿Cuánto tendrá al final de ese periodo?**

Tendrá $24\,000 \cdot (1{,}048)^5 \approx 30\,340{,}15$ €.

7. **¿En cuánto se transforman 24 000 € durante 5 años al 4,8 % anual, si los periodos de capitalización son mensuales?**

4,8 : 12 = 0,4. Un 4,8 % anual significa un 0,4% mensual.

Como en 5 años hay $5 \cdot 12 = 60$ meses:

$$C_F = 24\,000 \cdot (1{,}004)^{60} \approx 30\,495{,}38 \text{ €}$$

8. **Colocando en un banco 10 000 € durante cinco años, se convierten en 13 000 €.**

a) ¿Qué interés paga el banco?

b) ¿Qué cantidad se habría retirado si los periodos de capitalización hubieran sido mensuales?

a) Llamando x al índice de variación anual:

$$10\,000 \cdot x^5 = 13\,000 \rightarrow x^5 = 13\,000 : 10\,000 \rightarrow x^5 = 1{,}3 \rightarrow x = \sqrt[5]{1{,}3} \approx 1{,}054$$

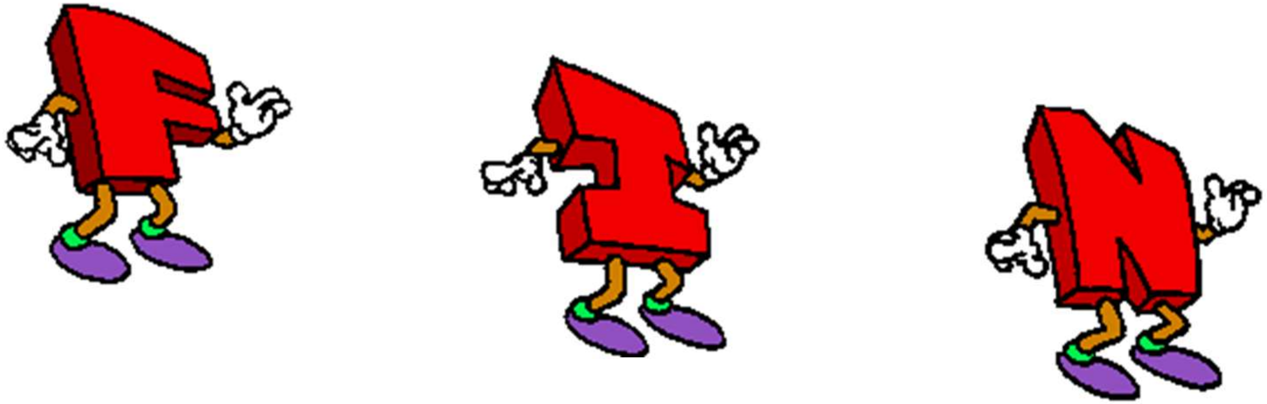
El banco pagaba un 5,4 % anual.

b) 5,4 : 12 = 0,45

Un 5,4 % anual significa un 0,45 % mensual. En 5 años hay $5 \cdot 12 = 60$ meses.

$$C_F = 10\,000 \cdot 1{,}0045^{60} \approx 13\,092 \text{ €}$$

Si los periodos de capitalización hubieran sido mensuales, la cantidad que se habría retirado tras cinco años habría sido 13 092 €.


FIN