Tema 2

POTENCIAS Y RAÍCES

Índice

1. Potencias de números racionales.

1. Potencias de números racionales

1.1. Potencias de exponente entero positivo

Una **potencia de exponente un número entero positivo** es una forrna abreviada de expresar una multiplicación en la que todos los factores son iguales.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}} \qquad \text{si } n > 0$$

EJEMPLO

1. Calcula estas potencias.

a) $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{81}{256}$

c) $2{,}4^3 = 2{,}4 \cdot 2{,}4 \cdot 2{,}4 = 13{,}824$

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$

1. Potencias de números racionales.

En una potencia de exponente entero positivo:

- Si la base es un número positivo, la potencia es siempre positiva.
- Si la base es un número negativo, la potencia es positiva si el exponente es par y negativa si es impar.

EJEMPLO

2. Escribe en forma de fracción el resultado de estas potencias.

a) $\left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = +\frac{16}{9}$

Par

b) $\left(-\frac{4}{3}\right)^3 = \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{64}{27}$

Impar

Debes tener en cuenta que:

$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$

Y, sin embargo:

$-2^4 = -(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = -16$

1. Potencias de números racionales.

1 Escribe en forma de potencia y halla el resultado.

a) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

b) $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$

c) $\left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)$

d) $\left(-\frac{5}{3}\right) \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)$

e) $\left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)$

a) $3^8 = 6\,561$

b) $(-1)^5 = -1$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$

d) $\left(-\frac{5}{3}\right)^3 = -\frac{125}{27}$

e) $\left(-\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{16}{625}$

2 Sin operar, indica el signo del resultado.

a) $(-6)^9$ c) $(+4)^7$ e) $(-2)^{14}$

b) $\left(-\frac{7}{4}\right)^{17}$ d) $\left(\frac{4}{3}\right)^{21}$ f) $\left(-\frac{15}{2}\right)^{34}$

a) Negativo. c) Positivo. e) Positivo.

b) Negativo. d) Positivo. f) Positivo.

3 **REFLEXIONA.** Copia y completa en tu cuaderno.

a) $(\square)^3 = -512$

b) $(\square)^3 = -\frac{8}{27}$

c) $3^{\square} = \square^3 = \square^2 = 729$

d) $\left(\frac{2}{\square}\right)^{\square} = -\frac{8}{125}$

a) $(-8)^3 = -512$

b) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{27}$

c) $3^6 = 9^3 = 27^2 = 729$

d) $\left(\frac{2}{-5}\right)^3 = -\frac{8}{125}$

1. Potencias de números racionales.

1.2. Potencias de exponente entero negativo

Una **potencia de exponente un número entero negativo** es igual al cociente entre la unidad y dicha potencia con el exponente positivo.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{ si } a \neq 0$$

EJEMPLO

3. Calcula estas potencias de exponente negativo.

a) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

b) $(-2)^{-5} = \frac{1}{(-2)^5} = \frac{1}{-32}$

c) $0{,}2^{-2} = \frac{1}{0{,}2^2} = \frac{1}{0{,}04} = 25$

d) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^3} = \frac{1}{\frac{8}{125}} = 1 : \frac{8}{125} = \frac{125}{8}$

1. Potencias de números racionales.

1.3. Potencias de exponente 1, −1 y 0

Para cualquier valor de a, con $a \neq 0$, siempre se cumple que:

$$a^0 = 1 \qquad a^1 = a \qquad a^{-1} = \frac{1}{a}$$

EJEMPLO

4. Calcula estas potencias de números racionales.

a) $3^0 = 1$

b) $(-3)^0 = 1$

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$

d) $3^1 = 3$

e) $(-3)^1 = -3$

f) $\left(-\frac{1}{3}\right)^1 = -\frac{1}{3}$

g) $3^{-1} = \frac{1}{3}$

h) $(-3)^{-1} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$

i) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} = \frac{1}{-\frac{1}{3}} = -3$

1. Potencias de números racionales.

4 Calcula estas potencias.

a) 2^0 f) $(-2)^0$ k) -2^{-1}

b) 5^{-3} g) $(-4)^{-4}$ l) $(-3{,}2)^{-2}$

c) $6{,}25^{-1}$ h) $3{,}4^0$ m) $(-7{,}21)^{-1}$

d) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-1}$ i) $\left(\frac{3}{8}\right)^{-1}$ n) $\left(-\frac{2}{7}\right)^{0}$

e) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}$ j) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}$ ñ) $\left(-\frac{4}{3}\right)^{-2}$

a) 1

b) $\frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$

c) $\frac{1}{\left(\frac{625}{100}\right)^1} = \frac{100}{625} = \frac{4}{25}$

d) $\frac{1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^1} = -\frac{3}{2}$

e) $\left(-\frac{2}{1}\right)^4 = 16$

f) 1

g) $\frac{1}{(-4)^4} = \frac{1}{256}$

h) 1

i) $\frac{1}{\left(\frac{3}{8}\right)^1} = \frac{8}{3}$

j) $\left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{125}{8}$

k) $-\frac{1}{2}$

l) $\frac{1}{\left(-\frac{32}{10}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1024}{100}} = \frac{100}{1024} = \frac{25}{256}$

m) $\frac{1}{\left(-\frac{721}{100}\right)^1} = -\frac{100}{721}$

n) 1

ñ) $\left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$

1. Potencias de números racionales.

5 Opera.

$$\left(-\frac{2}{5}\right)^{-2} + 2{,}45^0 - (-4)^{-1}$$

$$\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 1 - \frac{1}{(-4)} = \frac{25}{4} + 1 + \frac{1}{4} = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}$$

6 **REFLEXIONA.** Justifica si estas parejas de números son iguales.

a) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-1}$ y $\frac{2}{3}$

b) $\left(\frac{5}{4}\right)^{-2}$ y $\frac{16}{25}$

c) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$ y 4

a) No, porque $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-1} = \left(-\frac{3}{2}\right)$.

b) Sí, porque $\left(\frac{5}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$.

c) Sí, porque $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} = (-2)^2 = 4$.

2. Operaciones con potencias.

2. Operaciones con potencias

Si a y b son dos números racionales y m y n son dos números enteros, se cumplen las siguientes propiedades:

- **Producto y cociente de potencias con la misma base**

  $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

  $a^n : a^m = \dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

- **Potencia de un producto y potencia de un cociente**

  $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

  $(a : b)^n = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

- **Potencia de una potencia**

  $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

2. Operaciones con potencias.

EJEMPLOS

5. Opera con las siguientes potencias que tienen la misma base.

a) $(-3)^3 \cdot (-3)^4 = (-3)^{3+4} = (-3)^7 = -2187$

b) $4^{-5} \cdot 4^3 = 4^{-5+3} = 4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$

c) $5^{-2} : 5^{-4} = 5^{-2-(-4)} = 5^2 = 25$

d) $2^{-1} : 2^4 = 2^{-1-4} = 2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

e) $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-3} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \left(-\frac{3}{4}\right)^{-3+2} = \left(-\frac{3}{4}\right)^{-1} = \frac{1}{-\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}$

f) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} : \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-3-(-1)} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^2} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

6. Calcula estas potencias de potencias.

a) $(2^3)^{-2} = 2^{3\cdot(-2)} = 2^{-6} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$

b) $\left(\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)^{-1} = \left(\frac{3}{4}\right)^{2\cdot(-1)} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{16}{9}$

2. Operaciones con potencias.

7 Realiza las siguientes operaciones con potencias.

a) $(-5)^2 \cdot (-5)^3$

b) $2^3 \cdot 2^{-3}$

c) $\left(\frac{6}{5}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^3$

d) $\left(-\frac{5}{3}\right)^{-1} \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)^{-2}$

e) $\left(\frac{2}{7}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^{-1}$

f) $\left(\frac{-2}{5}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{-2}{5}\right)$

g) $(-7)^{-1} : (-7)^2$

h) $3^{-5} : 3^{-1}$

i) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} : \left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$

j) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} : \left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$

k) $\left(-\frac{4}{5}\right)^{-4} : \left(-\frac{4}{5}\right)^2$

l) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-5} : \left(\frac{3}{7}\right)^{-2}$

a) $(-5)^5 = -3\,125$

b) $2^0 = 1$

c) $\frac{6}{5}$

d) $\left(-\frac{5}{3}\right)^{-3} = \left(-\frac{3}{5}\right)^3 = -\frac{27}{125}$

e) $\left(\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{4}{49}$

f) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-1} = -\frac{5}{2}$

g) $(-7)^{-3} = -\frac{1}{343}$

h) $3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$

i) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-1} = -\frac{3}{2}$

j) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

k) $\left(-\frac{4}{5}\right)^{-6} = \left(-\frac{5}{4}\right)^6 = \frac{15\,625}{4\,096}$

l) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-3} = \left(\frac{7}{3}\right)^3 = \frac{343}{27}$

2. Operaciones con potencias.

8 Expresa en forma de una sola potencia.

a) $(5^{-3})^2$

b) $(7^{-1})^{-3}$

c) $((-3)^{-2})^2$

d) $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^4\right)^{-2}$

e) $\left(\left(-\frac{3}{2}\right)^0\right)^{-7}$

f) $\left(\left(\frac{1}{5}\right)^2\right)^{-3}$

g) $((2^2)^{-1})^{-1}$

h) $\left(\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right)^{-2}\right)^{-1}$

i) $\left(\left(\left(-\frac{5}{7}\right)^{-1}\right)^{-3}\right)^2$

a) 5^{-6}

b) 7^3

c) $(-3)^{-4}$

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-8} = 3^8$

e) $\left(-\frac{3}{2}\right)^0$

f) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-6} = 5^6$

g) 2^2

h) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = 3^4$

i) $\left(-\frac{5}{7}\right)^6$

9 **REFLEXIONA.** Señala qué desigualdad es cierta.

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 < \frac{1}{4}$

b) $[2 \cdot (-1)]^4 < \frac{1}{2}$

a) Es cierta, porque $\frac{1}{8} < \frac{1}{4}$.

b) No es cierta, porque $(-2)^4 = 16$ no es menor que $\frac{1}{2}$.

2. Operaciones con potencias.

10 Expresa en forma de una sola potencia.

a) $6^5 \cdot 6^{-3}$ d) $(-7)^{-4} \cdot (-7)^{-2}$

b) $5^{-4} \cdot 3^{-4}$ e) $(-2)^3 \cdot (-5)^3$

c) $8^3 : 2^4$ f) $27^{-2} \cdot 9^5$

a) 6^2

b) 15^{-4}

c) $2^9 : 2^4 = 2^5$

d) $(-7)^{-6}$

e) 10^3

f) $(3^3)^{-2} \cdot (3^2)^5 = 3^{-6} \cdot 3^{10} = 3^4$

11 Simplifica estas expresiones.

a) $\left(\frac{2}{5}\right)^3 : \left(\frac{5}{3}\right)^3$ c) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-5}$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot 2^{-2}$ d) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$

a) $\left(\frac{6}{5^2}\right)^3$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$

c) $(-1)^{-5} = -1$

d) $\left(-\frac{6}{20}\right)^{-1} = \left(-\frac{10}{3}\right)$

12 Expresa como una sola potencia.

a) $8^3 \cdot 4^{-3}$ d) $32^{-1} \cdot 4^3$

b) $25^{-2} : 5^{-4}$ e) $49^{-2} : 7^{-5}$

c) $81^{-2} : 9^{-3}$ f) $5^3 \cdot 125^{-2}$

a) $2^9 \cdot 2^{-6} = 2^3$

b) $5^{-4} : 5^{-4} = 5^0 = 1$

c) $9^{-4} : 9^{-3} = 9^{-1}$

d) $2^{-5} \cdot 2^6 = 2$

e) $7^{-4} : 7^{-5} = 7$

f) $5^3 \cdot 5^{-6} = 5^{-3}$

2. Operaciones con potencias.

13 Escribe como producto de dos potencias.

a) 15^3 c) 6^3 e) 21^{-5}

b) 4^{-3} d) 9^{-2}

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $3^3 \cdot 5^3$ c) $6 \cdot 6^2$ e) $21^{-3} \cdot 21^{-2}$

b) $4^2 \cdot 4^{-5}$ d) $9^2 \cdot 9^{-4}$

14 Opera y expresa el resultado como una sola potencia.

a) $6^{-3} \cdot 5^{-3} : 2^{-3}$

b) $5^{-2} \cdot 2^{-2} : 10^{-3}$

c) $\left(\frac{1}{5}\right)^2 : \left(\frac{1}{5}\right)^{-4} \cdot 7^{-6}$

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{-1} : \left(\frac{2}{5}\right)^{-6}$

e) $18^{-2} : 18^3 \cdot 2^{-5}$

f) $[(2^{-2})^{-3} \cdot 3^6] : 6^2$

g) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{-3} : \left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}$

h) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-3} : \left[\left(\frac{7}{5}\right)^{-1} : \left(\frac{7}{5}\right)^2\right]$

a) 15^{-3}

b) $10^{-2} : 10^{-3} = 10$

c) $\left(\frac{1}{5}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^6 = \left(\frac{1}{35}\right)^6$

d) $\left(\frac{6}{15}\right)^{-1} : \left(\frac{2}{5}\right)^{-6} = \left(\frac{2}{5}\right)^5$

e) $18^{-5} \cdot 2^{-5} = 36^{-5}$

f) $6^6 : 6^2 = 6^4$

g) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} : \left(-\frac{2}{3}\right)^{-4} = -\frac{2}{3}$

h) $\left(\frac{20}{35}\right)^{-3} = \left(\frac{7}{4}\right)^3$

15 Simplifica estos productos de potencias.

a) $-12^3 \cdot 18^{-5}$ c) $15^{-2} \cdot 9^{-3}$

b) $32^2 \cdot (-24)^3$

a) $(-2^2 \cdot 3)^3 \cdot (2 \cdot 3^2)^{-5} =$
$= -2^6 \cdot 2^{-5} \cdot 3^3 \cdot 3^{-10} = -2 \cdot 3^{-7}$

b) $(2^5)^2 \cdot (-2^3 \cdot 3)^3 = 2^{10} \cdot -2^9 \cdot 3^3 =$
$= -2^{19} \cdot 3^3$

c) $(3 \cdot 5)^{-2} \cdot (3^2)^{-3} = 3^{-2} \cdot 3^{-6} \cdot 5^{-2} =$
$= 3^{-8} \cdot 5^{-2}$

3. Notación científica

3.1. Potencias de base 10

- Una **potencia de base 10 y exponente entero positivo** es igual a la unidad seguida de tantos ceros como indique su exponente.
- Una **potencia de base 10 y exponente entero negativo** es igual a la unidad dividida entre dicha potencia con exponente positivo.

EJEMPLO

7. Calcula estas potencias de 10.

a) $10^2 = 100$
c) $10^3 = 1000$
e) $10^5 = 100000$

b) $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1$
d) $10^{-2} = \frac{1}{100} = 0,01$
f) $10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0,001$

3. Notación científica.

3.2. Expresión de números muy grandes y muy pequeños

La **notación científica** es una forma de expresar números mediante el producto de un número cuyo valor absoluto es mayor o igual que 1 y menor que 10 por una potencia de base 10.

Al exponente de la potencia de 10 se le llama **orden de magnitud**.

EJEMPLO

8. Decide si estos números están escritos en notación científica.

a) La distancia de la Tierra a la Luna es de 384 400 000 m.

No está en notación científica, la parte entera es mayor que 10.

$384\,400\,000 \text{ m} = 3{,}844 \cdot 100\,000\,000 \text{ m} = 3{,}844 \cdot 10^8 \text{ m}$

b) El grosor del cabello es de unos $8 \cdot 10^{-5}$ m.

Está escrito en notación científica. El grosor del cabello es de unos $8 \cdot 10^{-5} \text{ m} = \dfrac{8}{100\,000} \text{ m} = 0{,}00008 \text{ m}$.

Una potencia de base 10 con exponente negativo es igual a un número decimal.

$10^{-2} = 0{,}\underbrace{01}_{\text{2 decimales}}$ $\qquad$ $10^{-5} = 0{,}\underbrace{00001}_{\text{5 decimales}}$

3. Notación científica.

16 Estudia si estos números están escritos en notación científica.

a) $154{,}02 \cdot 10^2$
b) $3{,}45701 \cdot 10^{-1}$
c) $1\,542 \cdot 10^5$
d) $2{,}7 \cdot 10^{41}$
e) $0{,}01 \cdot 10^3$
f) $0{,}000023$
g) $0{,}500006 \cdot 10^{-4}$
h) $78 \cdot 10^{-2}$

a) No.
b) Sí.
c) No.
d) Sí.
e) No.
f) No.
g) No.
h) No.

17 Completa las operaciones para que sean correctas.

a) $0{,}2 = 2 \cdot 10^{\square}$
b) $1\,500 = 1{,}5 \cdot 10^{\square}$
c) $0{,}00032 = 3{,}2 \cdot 10^{\square}$
d) $2\,300\,000 = 2{,}3 \cdot 10^{\square}$

a) $0{,}2 = 2 \cdot 10^{-1}$
b) $1\,500 = 1{,}5 \cdot 10^3$
c) $0{,}00032 = 3{,}2 \cdot 10^{-4}$
d) $2\,300\,000 = 2{,}3 \cdot 10^6$

18 **REFLEXIONA.** Escribe estas operaciones como el producto de un número por una potencia de 10.

a) $5^8 \cdot 2^{12}$
b) $750 \cdot (5^4 \cdot 2^4)^{-1}$
c) $25^7 : 125^4 : 10^{-6}$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $16 \cdot 10^8$ b) $75 \cdot 10^{-3}$ c) $25 \cdot 10^6$

3. Notación científica.

19 Escribe estos números en notación científica.

a) 125 d) 400 100 000 000

b) 859 000 e) 2 610 000

c) 74 320 f) 6 040,24

a) $1,25 \cdot 10^2$ d) $4,001 \cdot 10^{11}$

b) $8,59 \cdot 10^5$ e) $2,61 \cdot 10^6$

c) $7,432 \cdot 10^4$ f) $6,04024 \cdot 10^3$

20 Expresa en notación científica los siguientes números.

a) 0,001 d) 0,00000000807

b) 0,00002 e) 0,00000054

c) 0,000010002 f) 0,0003000007

a) $1 \cdot 10^{-3}$ d) $8,07 \cdot 10^{-9}$

b) $2 \cdot 10^{-5}$ e) $5,4 \cdot 10^{-7}$

c) $1,0002 \cdot 10^{-5}$ f) $3,000007 \cdot 10^{-4}$

21 Opera y expresa el resultado en notación científica.

a) $\left(\frac{1}{5}\right)^2$ c) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-11} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2$

b) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-2} \cdot 2^{-2}$ d) $\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}\right)^{-1}$

a) $0,04 = 4 \cdot 10^{-2}$

b) $\left(\frac{2}{9}\right)^{-2} = \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 20,25 = 2,025 \cdot 10$

c) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-9} = (-2)^9 = -512 = -5,12 \cdot 10^2$

d) $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = 0,16 = 1,6 \cdot 10^{-1}$

3. Notación científica.

22 ¿Cuáles de estos números están escritos en notación científica? Corrige los que no lo estén.

a) $6{,}05 \cdot 10^{-4}$
b) $52{,}3 \cdot 10^{7}$
c) $0{,}75 \cdot 10^{-2}$
d) $41{,}27 \cdot 10^{3}$
e) $324 \cdot 10^{-1}$
f) $43{,}9 \cdot 10^{-7}$
g) $0{,}99 \cdot 10^{8}$
h) $8{,}63 \cdot 10^{-1}$

Están escritos en notación científica los números de los apartados a) y h).

b) $5{,}23 \cdot 10^{8}$
c) $7{,}5 \cdot 10^{-3}$
d) $4{,}127 \cdot 10^{4}$
e) $3{,}24 \cdot 10$
f) $4{,}39 \cdot 10^{-6}$
g) $9{,}9 \cdot 10^{7}$

23 Opera y expresa el resultado en notación científica.

a) $2^7 \cdot 5^3$
b) $2^6 : 10^8$
c) $7^3 \cdot 10^{-6}$
d) $2^3 : 5^{-4}$
e) $3^4 : 10^{-5}$
f) $2^{10} \cdot 5^8$
g) $6^3 \cdot 5^2 : 3^2$
h) $14^3 : 7 \cdot 5^3$

a) $2^4 \cdot 2^3 \cdot 5^3 = 2^4 \cdot 10^3 = 1{,}6 \cdot 10^4$
b) $2^6 \cdot 10^{-8} = 6{,}4 \cdot 10^{-7}$
c) $343 \cdot 10^{-6} = 3{,}43 \cdot 10^{-4}$
d) $2^3 \cdot 5^3 \cdot 5 = 5 \cdot 10^3$
e) $81 \cdot 10^{-5} = 8{,}1 \cdot 10^{-4}$
f) $2^2 \cdot 2^8 \cdot 5^8 = 4 \cdot 10^8$
g) $2 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 3^5 \cdot 10^2 =$
$= 486 \cdot 10^2 = 4{,}86 \cdot 10^4$
h) $2^3 \cdot 7^3 : 7 \cdot 5^3 = 7^2 \cdot 10^3 = 4{,}9 \cdot 10^4$

3. Notación científica.

24 El metro es una unidad de medida internacional. Utilízalo y expresa estas distancias en notación científica.

a) Mercurio se encuentra, de media, a unos 77 millones de kilómetros de la Tierra.

b) El tamaño del virus de la gripe es de 0,00012 mm.

a) $7,7 \cdot 10^{10}$ m

b) $1,2 \cdot 10^{-7}$ m

4. Operaciones en notación científica

4.1. Suma y resta en notación científica

Para sumar o restar números en notación científica es necesario que el exponente de la potencia de 10 sea igual en todos los sumandos. Cuando esto ocurre, se suman o se restan los números, manteniendo la misma potencia de 10.

Si los sumandos tienen distinta potencia de 10, hay que transformar alguno de ellos para que las potencias sean iguales.

EJEMPLO

9. Opera y expresa en notación científica.

a) $2{,}01 \cdot 10^5 + 3{,}4 \cdot 10^5 = (2{,}01 + 3{,}4) \cdot 10^5 = 5{,}41 \cdot 10^5$

b) $4{,}2 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-2} = (4{,}2 + 7) \cdot 10^{-2} = 11{,}2 \cdot 10^{-2} = 1{,}12 \cdot 10^{-1}$

c) $1{,}04 \cdot 10^{-7} - 2{,}6 \cdot 10^{-7} = (1{,}04 - 2{,}6) \cdot 10^{-7} = -1{,}56 \cdot 10^{-7}$

d) $7{,}62 \cdot 10^3 - 5{,}2 \cdot 10^2 \rightarrow$ Diferente potencia de 10

$7{,}62 \cdot 10 \cdot 10^2 - 5{,}2 \cdot 10^2 = 76{,}2 \cdot 10^2 - 5{,}2 \cdot 10^2 =$

$= (76{,}2 - 5{,}2) \cdot 10^2 = 71 \cdot 10^2 = 7{,}1 \cdot 10^3$

4.Operaciones en notación científica.

4.2. Multiplicación y división en notación científica

Para multiplicar o dividir números en notación científica, se multiplican o dividen, por un lado, las potencias de 10 y, por otro, los números que las preceden.

EJEMPLO

10. Resuelve estas operaciones y expresa el resultado en notación científica.

a) $(3,2 \cdot 10^{-4}) \cdot (4,5 \cdot 10^{2}) = (3,2 \cdot 4,5) \cdot (10^{-4} \cdot 10^{2}) = \underbrace{14,4 \cdot 10^{-2}}_{\text{No está en notación científica}} =$

$= (14,4 : 10) \cdot (10^{-2} \cdot 10) = 1,44 \cdot 10^{-1}$

b) $(1,47 \cdot 10^{-5}) : (4,2 \cdot 10^{-3}) = (1,47 : 4,2) \cdot (10^{-5} : 10^{-3}) = \underbrace{0,35 \cdot 10^{-2}}_{\text{No está en notación científica}} =$

$= (0,35 \cdot 10) \cdot (10^{-2} : 10) = 3,5 \cdot 10^{-3}$

4.Operaciones en notación científica.

25 Opera y expresa el resultado en notación científica.

a) $7{,}4 \cdot 10^2 + 3{,}2 \cdot 10^2$

b) $6{,}1 \cdot 10^5 - 2{,}9 \cdot 10^5$

c) $5{,}42 \cdot 10^3 + 3{,}2 \cdot 10^2$

d) $1{,}05 \cdot 10^5 - 9{,}9 \cdot 10^4$

e) $9{,}2 \cdot 10^{-3} + 6{,}5 \cdot 10^{-4}$

f) $1{,}7 \cdot 10^{-1} - 7{,}4 \cdot 10^{-2}$

g) $(2{,}5 \cdot 10^3) \cdot (4{,}2 \cdot 10^6)$

h) $(1{,}4 \cdot 10^{-2}) \cdot (6{,}1 \cdot 10^3)$

i) $(6{,}8 \cdot 10^{-1}) \cdot (3{,}5 \cdot 10^{-6})$

j) $(6{,}36 \cdot 10^5) : (5{,}3 \cdot 10^{-1})$

k) $(2{,}4 \cdot 10^{-3}) : (1{,}5 \cdot 10^2)$

l) $(3{,}84 \cdot 10^{-2}) : (1{,}2 \cdot 10^{-5})$

a) $(7{,}4 + 3{,}2) \cdot 10^2 = 10{,}6 \cdot 10^2 = 1{,}06 \cdot 10^3$

b) $(6{,}1 - 2{,}9) \cdot 10^5 = 3{,}2 \cdot 10^5$

c) $(54{,}2 + 3{,}2) \cdot 10^2 = 57{,}4 \cdot 10^2 = 5{,}74 \cdot 10^3$

d) $(10{,}5 - 9{,}9) \cdot 10^4 = 0{,}6 \cdot 10^4 = 6 \cdot 10^3$

e) $(92 + 6{,}5) \cdot 10^{-4} = 98{,}5 \cdot 10^{-4} =$
$= 9{,}85 \cdot 10^{-3}$

f) $(17 - 7{,}4) \cdot 10^{-2} = 9{,}6 \cdot 10^{-2}$

g) $10{,}5 \cdot 10^9 = 1{,}05 \cdot 10^{10}$

h) $8{,}54 \cdot 10$

i) $23{,}8 \cdot 10^{-7} = 2{,}38 \cdot 10^{-6}$

j) $1{,}2 \cdot 10^6$

k) $1{,}6 \cdot 10^{-5}$

l) $3{,}2 \cdot 10^3$

4.Operaciones en notación científica.

26 Copia y completa.

a) $9,4 \cdot 10^5 + \square = 1,2 \cdot 10^6$

b) $\square - 9,5 \cdot 10^2 = 7,3 \cdot 10^3$

c) $3,42 \cdot 10^{-5} - \square = 8,59 \cdot 10^{-6}$

a) $9,4 \cdot 10^5 + 2,6 \cdot 10^5 = 1,2 \cdot 10^6$

b) $8,25 \cdot 10^3 - 9,5 \cdot 10^2 = 7,3 \cdot 10^3$

c) $3,42 \cdot 10^{-5} - 2,561 \cdot 10^{-5} = 8,59 \cdot 10^{-6}$

27 **REFLEXIONA.** Copia y completa los huecos.

a) $(3 \cdot 10^{\square}) \cdot (7 \cdot 10^5) = 2,1 \cdot 10^8$

b) $(1,8 \cdot 10^3) : (2 \cdot 10^{\square}) = 9 \cdot 10^5$

a) $(3 \cdot 10^2) \cdot (7 \cdot 10^5) = 2,1 \cdot 10^8$

b) $(1,8 \cdot 10^3) : (2 \cdot 10^{-3}) = 9 \cdot 10^5$

5. Raíces.

5. Raíces

5.1. Raíz cuadrada de un número racional

La **raíz cuadrada** de un número racional a es otro número b tal que al elevarlo al cuadrado obtenemos el número a.

$$\sqrt{a} = b \quad \text{si} \quad b^2 = a$$

a es el **radicando**, $\sqrt{}$ es el símbolo de la raíz y b es la **raíz**.

- La raíz cuadrada de un número racional positivo tiene siempre dos resultados, uno positivo y otro negativo.
- La raíz cuadrada de un número racional negativo no existe.

5. Raíces.

EJEMPLO

11. Calcula estas raíces cuadradas.

a) $\left.\begin{array}{l}\sqrt{64} = 8 \quad \text{porque} \quad 8^2 = 64 \\ \sqrt{64} = -8 \ \text{porque} \ (-8)^2 = 64\end{array}\right\} \rightarrow$ Lo escribimos como $\sqrt{64} = \pm 8$.

b) $\sqrt{-9}$ no existe, porque ningún número elevado al cuadrado es negativo.

5.2. Expresión decimal de una raíz cuadrada no exacta

Cuando la raíz cuadrada de un número no es exacta, su expresión decimal tiene infinitas cifras decimales. Podemos calcular algunos de sus decimales por tanteo o con la calculadora.

EJEMPLO

12. Aproxima $\sqrt{55}$ con una cifra decimal.

$7^2 = 49$ y $8^2 = 64 \rightarrow$ La parte entera es 7, ya que $64 > 55$.

$7,3^2 = 53,29$ $\qquad$ $7,4^2 = 54,76$ $\qquad$ $7,5^2 = 56,25$

La primera cifra decimal es 4, ya que $56,25 > 55$.

El valor de $\sqrt{55}$ es, aproximadamente, 7,4.

5. Raíces.

28 Calcula, si existen, las raíces cuadradas.

a) $\sqrt{49}$ d) $\sqrt{(-13)^2}$

b) $\sqrt{100}$ e) $\sqrt{(-12)\cdot 3}$

c) $\sqrt{-10^2}$ f) $\sqrt{(-8)\cdot(-18)}$

a) ± 7 c) No existe. e) No existe.

b) ± 10 d) ± 13 f) ± 12

29 ¿Entre qué dos números enteros se encuentran estas raíces?

a) $\sqrt{38}$ b) $\sqrt{70}$ c) $\sqrt{120}$

a) $6 < \sqrt{38} < 7$

b) $8 < \sqrt{70} < 9$

c) $10 < \sqrt{120} < 11$

30 Calcula, por tanteo, estas raíces cuadradas con dos cifras decimales. Después, comprueba tu resultado con la calculadora.

a) $\sqrt{20}$ b) $\sqrt{65}$ c) $\sqrt{90}$

a) 4,47 b) 8,06 c) 9,48

31 **REFLEXIONA.** ¿Cuántos números enteros tienen su raíz comprendida entre 7 y 8? ¿Y cuántos números racionales?

Todos los números enteros comprendidos entre $7^2 = 49$ y $8^2 = 64$, es decir, 14 números e infinitos números racionales porque entre un número entero y el siguiente hay comprendidos infinitos números racionales.

6. Radicales.

6. Radicales

Raíz *n*-ésima de un número racional

La operación inversa de la potenciación es la radicación.

Se llama raíz *n*-ésima de un número *a*, y se escribe $\sqrt[n]{a}$, a un número real *b* que cumple que $b^n = a$.

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ si } b^n = a$$

La expresión $\sqrt[n]{a}$ es el radical, *n* es el índice de la raíz, *a* es el radicando y *b* es la raíz.

EJEMPLOS

13. Decide si -2 y 2 son raíces de estos radicales.

a) $\left.\begin{array}{l}\sqrt[3]{8} \rightarrow (-2)^3 = -8 \rightarrow \text{No es raíz.}\\ \qquad 2^3 = 8 \rightarrow \text{Es raíz.}\end{array}\right\} \rightarrow \sqrt[3]{8} = 2$

b) $\left.\begin{array}{l}\sqrt[3]{-8} \rightarrow (-2)^3 = -8 \rightarrow \text{Es raíz.}\\ \qquad 2^3 = 8 \rightarrow \text{No es raíz.}\end{array}\right\} \rightarrow \sqrt[3]{-8} = -2$

c) $\left.\begin{array}{l}\sqrt[4]{16} \rightarrow (-2)^4 = 16 \rightarrow \text{Es raíz.}\\ \qquad 2^4 = 16 \rightarrow \text{Es raíz.}\end{array}\right\} \rightarrow \sqrt[4]{16} = \pm 2$

d) $\left.\begin{array}{l}\sqrt[5]{32} \rightarrow (-2)^5 = -32 \rightarrow \text{No es raíz.}\\ \qquad 2^5 = 32 \rightarrow \text{Es raíz.}\end{array}\right\} \rightarrow \sqrt[5]{32} = 2$

6. Radicales.

14. Halla cuatro radicales que tengan a 3 como raíz.

Como $3^2 = 9 \rightarrow \sqrt{9}$ tiene a 3 como raíz.

Como $3^3 = 27 \rightarrow \sqrt[3]{27}$ tiene a 3 como raíz.

Como $3^4 = 81 \rightarrow \sqrt[4]{81}$ tiene a 3 como raíz.

Como $3^5 = 243 \rightarrow \sqrt[5]{243}$ tiene a 3 como raíz.

Para averiguar cuántas raíces tiene un radical, debemos tener en cuenta el índice y el signo del radicando.

	Radicando	Índice	Número de raíces
	$a > 0$	n impar	1 raíz positiva
		n par	2 raíces, una positiva y su opuesta
$\sqrt[n]{a}$	$a = 0$	n par o impar	1 raíz $\sqrt[n]{0} = 0$
	$a < 0$	n impar	1 raíz negativa
		n par	No tiene raíz real

Aunque haya dos raíces,
al realizar operaciones siempre
consideramos la raíz positiva.

$\sqrt{9} - 2 = +3 - 2 = 1$

6. Radicales.

32 Indica el índice y el radicando de estos radicales.

a) $\sqrt[3]{-15}$
b) $\sqrt[6]{73}$
c) $\sqrt{45}$
d) $\sqrt[4]{152}$
e) $\sqrt[7]{-56}$
f) $\sqrt[5]{24}$
g) $\sqrt[4]{-331}$
h) $\sqrt[7]{28}$
i) $\sqrt[5]{-200}$
j) $\sqrt[6]{121}$

a) Índice: 3 Radicando: -15
b) Índice: 6 Radicando: 73
c) Índice: 2 Radicando: 45
d) Índice: 4 Radicando: 152
e) Índice: 7 Radicando: -56
f) Índice: 5 Radicando: 24
g) Índice: 4 Radicando: -331
h) Índice: 7 Radicando: 28
i) Índice: 5 Radicando: -200
j) Índice: 6 Radicando: 121

33 Estudia si -5 y 5 son raíces de los siguientes radicales.

a) $\sqrt[3]{-125}$
b) $\sqrt[5]{3125}$
c) $\sqrt[4]{625}$
d) $\sqrt[5]{-3125}$

a) 5 no y -5 sí, porque $(-5)^3 = -125$.
b) -5 no y 5 sí, porque $5^5 = 3125$.
c) Sí, porque $(-5)^4 = 5^4 = 625$.
d) 5 no y -5 sí, porque $(-5)^5 = 3125$.

34 **REFLEXIONA.** Se sabe que 4 es una raíz de un radical de índice 4. ¿Cuál es el radicando?

Como $4^4 = 256$, el radicando es 256.

6. Radicales.

35 Indica el índice y el radicando de los siguientes radicales y decide, en función de ellos, cuántas raíces tiene cada uno.

a) $\sqrt{7}$
b) $\sqrt[3]{-18}$
c) $\sqrt[4]{-52}$
d) $\sqrt[5]{100}$
e) $\sqrt[6]{152}$
f) $\sqrt[7]{-300}$
g) $\sqrt[8]{500}$
h) $\sqrt[9]{615}$

a) Índice: 2 Radicando: 7
Tiene dos raíces: una positiva y su opuesta.

b) Índice: 3 Radicando: −18
Tiene una única raíz negativa.

c) Índice: 4 Radicando: −52
No existe raíz real.

d) Índice: 5 Radicando: 100
Tiene una única raíz positiva.

e) Índice: 6 Radicando: 152
Tiene dos raíces: una positiva y su opuesta.

f) Índice: 7 Radicando: −300
Tiene una única raíz negativa.

g) Índice: 8 Radicando: 500
Tiene dos raíces: una positiva y su opuesta.

h) Índice: 9 Radicando: 615
Tiene una única raíz positiva.

36 Decide cuántas raíces reales tienen estos radicales y si son positivas o negativas.

a) $\sqrt[7]{-34}$
b) $\sqrt[6]{84}$
c) $\sqrt[3]{57}$
d) $\sqrt[10]{-10}$
e) $\sqrt[3]{0}$
f) $\sqrt[4]{0}$
g) $\sqrt[7]{65}$
h) $\sqrt[5]{3\,200}$

a) Una única raíz negativa.
b) Dos raíces: una positiva y su opuesta.
c) Una única raíz positiva.
d) No existe raíz real.
e) Una única raíz: 0.
f) Una única raíz: 0.
g) Una única raíz positiva.
h) Una única raíz positiva.

6. Radicales.

37 Estudia cuántas raíces reales tienen estos radicales y calcúlalas.

a) $\sqrt[4]{-80}$
b) $\sqrt[3]{-27}$
c) $\sqrt[6]{0}$
d) $\sqrt[8]{256}$
e) $\sqrt[5]{-32}$
f) $\sqrt[6]{1}$
g) $\sqrt[3]{125}$
h) $\sqrt[3]{-216}$

a) No existe raíz real.
b) Una única raíz: -3.
c) Una única raíz: 0.
d) Dos raíces: 2 y -2.
e) Una única raíz: -2.
f) Dos raíces: 1 y -1.
g) Una única raíz: 5.
h) Una única raíz: -6.

38 Observa el índice y el radicando de estos radicales. Después, indica el número de raíces que tienen y calcúlalas.

a) $\sqrt[7]{128}$
b) $\sqrt[3]{343}$
c) $\sqrt[8]{-1\,260}$
d) $\sqrt[5]{-1\,024}$
e) $\sqrt[4]{-81}$
f) $\sqrt[5]{243}$
g) $\sqrt[5]{0}$
h) $\sqrt[6]{729}$

a) Índice: impar Radicando: positivo
Una única raíz positiva: 2.

b) Índice: impar Radicando: positivo
Una única raíz positiva: 7.

c) Índice: par Radicando: negativo
No existe raíz real.

d) Índice: impar Radicando: negativo
Una única raíz negativa: -4.

e) Índice: par Radicando: negativo
No existe raíz real.

f) Índice: impar Radicando: positivo
Una única raíz positiva: 3.

g) Índice: impar Radicando: 0
Una única raíz: 0.

h) Índice: par Radicando: positivo
Dos raíces: una positiva y su opuesta, 3 y -3.

6. Radicales.

39 **Escribe un radical en cada caso que cumpla las siguientes condiciones.**

a) No tiene raíces reales.

b) Solo tiene una raíz real positiva.

c) Solo tiene una raíz real negativa.

d) Su única raíz real es 2. ¿Cuántos radicales cumplen esta condición?

e) Tiene dos raíces reales y una de ellas es 3. ¿Sabrías decir cuál es la otra raíz? ¿Existen varios radicales que cumplan esta condición?

f) Su única raíz real es -3. ¿Puedes escribir dos radicales de distinto índice cuya única raíz real sea -3?

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $\sqrt[6]{-729}$

b) $\sqrt[3]{343}$

c) $\sqrt[3]{-343}$

d) $\sqrt[3]{8}$

Cumplen esta condición todos los radicales con radicando positivo e índice impar cuya raíz es 2.

e) $\sqrt{9}$

La otra raíz es -3.

Cumplen esta condición los radicales con radicando positivo e índice par cuyas raíces son 3 y -3.

f) $\sqrt[3]{-27}$

Otro radical cuya única raíz real es -3 es $\sqrt[5]{-243}$

7. Operaciones con radicales

7.1. Suma y resta de radicales

Para poder sumar o restar dos radicales es necesario que el índice y el radicando sean el mismo. Cuando esto ocurre, se suman o restan los números que acompañan a las raíces, manteniendo la misma raíz.

EJEMPLO

15. Realiza esta operación de radicales.

$$6\sqrt[3]{7}+2\sqrt[3]{7}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{7}=\left(6+2+\frac{1}{3}\right)\sqrt[3]{7}=\frac{25}{3}\sqrt[3]{7}$$

16. Resuelve estas operaciones.

$$5\sqrt[4]{8}-\frac{2}{3}\sqrt[4]{8}=\left(5-\frac{2}{3}\right)\sqrt[4]{8}=\frac{13}{3}\sqrt[4]{8}$$

7.2. Producto y cociente de radicales

Para poder multiplicar o dividir dos radicales es necesario que el índice sea el mismo.

Cuando esto ocurre, multiplicamos o dividimos los coeficientes por un lado y los radicandos por otro, dejando la raíz con el mismo índice.

7. Operaciones con radicales.

EJEMPLO

17. Opera estos radicales.

a) $5\sqrt{7}\cdot\left(3\sqrt{2}\right)=(5\cdot 3)\cdot\left(\sqrt{7\cdot 2}\right)=15\sqrt{14}$

b) $2\sqrt[3]{25}\cdot\left(4\sqrt[3]{5}\right)=(2\cdot 4)\cdot\left(\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt[3]{5}\right)=$
$=8\sqrt[3]{25\cdot 5}=8\sqrt[3]{125}=8\cdot 5=40$

c) $16\sqrt[3]{12}:\left(8\sqrt[3]{3}\right)=(16:8)\cdot\left(\sqrt[3]{12:3}\right)=2\sqrt[3]{4}$

d) $6\sqrt[4]{64}:\left(2\sqrt[4]{4}\right)=(6:2)\cdot\left(\sqrt[4]{64}:\sqrt[4]{4}\right)=$
$=3\sqrt[4]{64:4}=3\sqrt[4]{16}=3\cdot 2=6$

7.3. Extracción de factores

Podemos extraer factores de un radical para obtener expresiones más simples.

EJEMPLO

18. Extrae los factores que puedas de este radical: $\sqrt{12}$.

$$\sqrt{12}=\sqrt{2^2\cdot 3}=\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{3}=2\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

Observa que la propiedad del producto se puede aplicar de dos formas:

$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$ $\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$

7. Operaciones con radicales.

40 Efectúa estas operaciones con radicales.

a) $5\sqrt[7]{2}+\frac{2}{3}\sqrt[7]{2}$

b) $3\sqrt[4]{5}-\frac{1}{3}\sqrt[4]{5}$

c) $3\sqrt[6]{2}\cdot\left(5\sqrt[6]{10}\right)$

d) $20\sqrt[3]{24}:\left(4\sqrt[3]{6}\right)$

e) $2\sqrt[6]{3}+\frac{2}{5}\sqrt[6]{3}-\frac{5}{3}\sqrt[6]{3}$

f) $\frac{4}{3}\sqrt[5]{9}-\frac{2}{5}\sqrt[5]{9}+\sqrt[5]{9}$

g) $5\sqrt[3]{9}\cdot\left(2\sqrt[3]{3}\right)$

h) $14\sqrt{12}:\left(7\sqrt{3}\right)$

a) $\frac{17}{3}\sqrt[7]{2}$

b) $\frac{8}{3}\sqrt[4]{5}$

c) $15\sqrt[6]{20}$

d) $5\sqrt[3]{4}$

e) $\frac{11}{15}\sqrt[6]{3}$

f) $\frac{29}{15}\sqrt[5]{9}$

g) $10\sqrt[3]{27}=10\cdot 3=30$

h) $2\sqrt{4}=2\cdot 2=4$

41 Calcula.

a) $2\sqrt{6}\cdot\sqrt{24}-\sqrt{18}\cdot\sqrt{8}$

b) $3\sqrt[3]{90}:\sqrt[3]{5}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{2}$

a) $2\sqrt{144}-\sqrt{144}=\sqrt{144}=\pm 12$

b) $3\sqrt[3]{18}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{18}=\frac{7}{2}\sqrt[3]{18}$

43 Extrae los factores que sea posible de las siguientes raíces.

a) $\sqrt{48}$

b) $\sqrt{54}$

c) $\sqrt{72}$

d) $\sqrt{100}$

e) $\sqrt{216}$

f) $\sqrt{864}$

g) $\sqrt{1800}$

h) $\sqrt{2304}$

i) $\sqrt{2450}$

j) $\sqrt{4375}$

a) $\sqrt{2^4\cdot 3}=2^2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

b) $\sqrt{2\cdot 3^3}=3\sqrt{3\cdot 2}=3\sqrt{6}$

c) $\sqrt{2^3\cdot 3^2}=2\cdot 3\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

d) $\sqrt{2^2\cdot 5^2}=2\cdot 5=10$

e) $\sqrt{2^3\cdot 3^3}=2\cdot 3\sqrt{2\cdot 3}=6\sqrt{6}$

f) $\sqrt{2^5\cdot 3^3}=2^2\cdot 3\sqrt{2\cdot 3}=12\sqrt{6}$

g) $\sqrt{2^3\cdot 3^2\cdot 5^2}=2\cdot 3\cdot 5\sqrt{2}=30\sqrt{2}$

h) $\sqrt{2^8\cdot 3^2}=2^4\cdot 3=48$

i) $\sqrt{2\cdot 5^2\cdot 7^2}=5\cdot 7\sqrt{2}=35\sqrt{2}$

j) $\sqrt{5^4\cdot 7}=5^2\cdot\sqrt{7}=25\sqrt{7}$

7. Operaciones con radicales.

44 Completa en tu cuaderno.

a) $\sqrt{5^{\square}} = 5^3$

b) $\sqrt{7^{\square}} = 7^4$

c) $\sqrt{2^{\square} \cdot 3^{\square}} = 2 \cdot 3^2$

d) $\sqrt{5^{\square} \cdot 7^{\square}} = 5^3 \cdot 7^2$

e) $\sqrt{11^{\square} \cdot 3^{\square}} = 11^5 \cdot 3$

f) $\sqrt{2^{\square} \cdot 7^{\square} \cdot 13^{\square}} = 2 \cdot 7^4 \cdot 13$

a) $\sqrt{5^6} = 5^3$

b) $\sqrt{7^8} = 7^4$

c) $\sqrt{2^2 \cdot 3^4} = 2 \cdot 3^2$

d) $\sqrt{5^6 \cdot 7^4} = 5^3 \cdot 7^2$

e) $\sqrt{11^{10} \cdot 3^2} = 11^5 \cdot 3$

f) $\sqrt{2^2 \cdot 7^8 \cdot 13^2} = 2 \cdot 7^4 \cdot 13$

45 Saca todos los factores que puedas de los radicales.

a) $\sqrt[3]{48}$

b) $\sqrt[3]{56}$

c) $\sqrt[3]{135}$

d) $\sqrt[3]{392}$

e) $\sqrt[3]{864}$

f) $\sqrt[3]{2\,000}$

g) $\sqrt[4]{512}$

h) $\sqrt[4]{2\,835}$

i) $\sqrt[4]{12\,960}$

j) $\sqrt[5]{64}$

k) $\sqrt[5]{486}$

l) $\sqrt[5]{31\,250}$

a) $\sqrt[3]{2^4 \cdot 3} = 2\sqrt[3]{2 \cdot 3} = 2\sqrt[3]{6}$

b) $\sqrt[3]{2^3 \cdot 7} = 2\sqrt[3]{7}$

c) $\sqrt[3]{3^3 \cdot 5} = 3\sqrt[3]{5}$

d) $\sqrt[3]{2^3 \cdot 7^2} = 2\sqrt[3]{7^2}$

e) $\sqrt[3]{2^5 \cdot 3^3} = 2 \cdot 3\sqrt[3]{2^2} = 6\sqrt[3]{2^2}$

f) $\sqrt[3]{2^4 \cdot 5^3} = 2 \cdot 5\sqrt[3]{2} = 10\sqrt[3]{2}$

g) $\sqrt[4]{2^9} = 2^2\sqrt[4]{2} = 4\sqrt[4]{2}$

h) $\sqrt[4]{3^4 \cdot 5 \cdot 7} = 3\sqrt[4]{5 \cdot 7} = 3\sqrt[4]{35}$

i) $\sqrt[4]{2^5 \cdot 3^4 \cdot 5} = 2 \cdot 3\sqrt[4]{2 \cdot 5} = 6\sqrt[4]{10}$

j) $\sqrt[5]{2^6} = 2\sqrt[5]{2}$

k) $\sqrt[5]{2 \cdot 3^5} = 3\sqrt[5]{2}$

l) $\sqrt[5]{2 \cdot 5^6} = 5\sqrt[5]{2 \cdot 5} = 5\sqrt[5]{10}$

7. Operaciones con radicales.

46 Copia y completa en tu cuaderno.

a) $\sqrt[3]{2^{\square} \cdot 5^{\square}} = 2^2 \cdot 5^3$

b) $\sqrt[3]{3^{\square} \cdot 5^{\square}} = 3 \cdot 5^2 \cdot \sqrt[3]{5}$

c) $\sqrt[3]{7^{\square} \cdot 11^{\square}} = 7^3 \cdot 11 \cdot \sqrt[3]{11}$

d) $\sqrt[3]{2^{\square} \cdot 3^{\square} \cdot 11^{\square}} = 2^2 \cdot 11 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 3}$

e) $\sqrt[4]{2^{\square} \cdot 5^{\square}} = 2 \cdot 5^2$

f) $\sqrt[4]{3^{\square} \cdot 7^{\square}} = 7 \cdot \sqrt[4]{3^2 \cdot 7^3}$

a) $\sqrt[3]{2^6 \cdot 5^9} = 2^2 \cdot 5^3$

b) $\sqrt[3]{3^3 \cdot 5^7} = 3 \cdot 5^2 \cdot \sqrt[3]{5}$

c) $\sqrt[3]{7^9 \cdot 11^4} = 7^3 \cdot 11 \cdot \sqrt[3]{11}$

d) $\sqrt[3]{2^7 \cdot 3 \cdot 11^3} = 2^2 \cdot 11 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 3}$

e) $\sqrt[4]{2^4 \cdot 5^8} = 2 \cdot 5^2$

f) $\sqrt[4]{3^2 \cdot 7^7} = 7 \cdot \sqrt[4]{3^2 \cdot 7^3}$

47 Extrae de los radicales los factores que puedas y calcula.

a) $\sqrt{12} + \sqrt{27}$

b) $\sqrt{45} - \sqrt{20}$

c) $\sqrt{147} - \sqrt{75} + \sqrt{12}$

d) $\sqrt{50} - \sqrt{98} + \sqrt{242}$

e) $-\sqrt{5} + \sqrt{80} - \sqrt{20} + \sqrt{45}$

f) $\sqrt{28} - \sqrt{63} - \sqrt{175} + \sqrt{112}$

a) $(2 + 3)\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

b) $(3 - 2)\sqrt{5} = \sqrt{5}$

c) $(7 - 5 + 2)\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

d) $(5 - 7 + 11)\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$

e) $(-1 + 4 - 2 + 3)\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

f) $(2 - 3 - 5 + 4)\sqrt{7} = -2\sqrt{7}$

7. Operaciones con radicales.

48 Resuelve estas operaciones con radicales extrayendo factores de las raíces.

a) $-\sqrt[3]{40} - \sqrt[3]{135} + \sqrt[3]{625}$

b) $\sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16}$

c) $\sqrt[3]{2\,401} - \sqrt[3]{56} - \sqrt[3]{448}$

d) $\sqrt[4]{96} + \sqrt[4]{486}$

e) $\sqrt[4]{2\,592} - \sqrt[4]{1\,250}$

a) $(-2 - 3 + 5)\sqrt[3]{5} = 0$

b) $(5 - 3 - 2)\sqrt[3]{2} = 0$

c) $(7 - 2 - 4)\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{7}$

d) $(2 + 3)\sqrt[4]{6} = 5\sqrt[4]{6}$

e) $(6 - 5)\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{2}$

49 Saca los factores necesarios de los radicales y opera.

a) $2\sqrt{27} - 2\sqrt{243} + \sqrt{2\,187}$

b) $5\sqrt{2} - 2\sqrt{18} + \sqrt{8} - 2\sqrt{50}$

c) $-3\sqrt[3]{2\,187} + 5\sqrt[3]{24} - 7\sqrt[3]{375}$

a) $(6 - 18 + 27)\sqrt{3} = 15\sqrt{3}$

b) $(5 - 6 + 2 - 10)\sqrt{2} = -9\sqrt{2}$

c) $(-27 + 10 - 35)\sqrt[3]{3} = -52\sqrt[3]{3}$

7. Operaciones con radicales.

50 Opera y simplifica.

a) $-\frac{1}{2}\sqrt{125}-\frac{3}{5}\sqrt{45}+6\sqrt{20}-2\sqrt{80}$

b) $-\frac{1}{5}\sqrt[3]{40}+\frac{2}{3}\sqrt[3]{135}-3\sqrt[3]{5}$

c) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{32}-\frac{4}{5}\sqrt[3]{500}+\frac{5}{3}\sqrt[3]{108}$

d) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{72}-\frac{1}{4}\sqrt[3]{1125}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{3\,087}$

e) $\frac{4}{5}\sqrt[3]{80}-\frac{2}{5}\sqrt[3]{40}-\frac{2}{3}\sqrt[3]{270}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{135}$

f) $\frac{4}{3}\sqrt{48}-3\sqrt{125}+\frac{7}{4}\sqrt{180}-\frac{1}{3}\sqrt{300}$

a) $-\frac{5\sqrt{5}}{2}-\frac{9\sqrt{5}}{5}+12\sqrt{5}-8\sqrt{5}=$

$=-\frac{3\sqrt{5}}{10}$

b) $-\frac{2\sqrt[3]{5}}{5}+2\sqrt[3]{5}-3\sqrt[3]{5}=-\frac{7\sqrt[3]{5}}{5}$

c) $3\sqrt[3]{4}-4\sqrt[3]{4}+5\sqrt[3]{4}=4\sqrt[3]{4}$

d) $\frac{4\sqrt[3]{9}}{3}-\frac{5\sqrt[3]{9}}{4}-\frac{7\sqrt[3]{9}}{2}=-\frac{41\sqrt[3]{9}}{12}$

e) $\frac{8\sqrt[3]{10}}{5}-\frac{4\sqrt[3]{5}}{5}-2\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{5}=$

$=\frac{-2\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{5}}{5}$

f) $\frac{16\sqrt{3}}{3}-15\sqrt{5}+\frac{21\sqrt{5}}{2}-\frac{10\sqrt{3}}{3}=$

$=2\sqrt{3}-\frac{9\sqrt{5}}{2}$

8. Números reales

8.1. Números irracionales

Los **números irracionales** son los números que no se pueden expresar en forma de fracción. Su expresión decimal tiene un número ilimitado de cifras decimales no periódicas.

Existen infinitos números irracionales, por ejemplo:

- Cualquier raíz no exacta: $\sqrt{5}$, $-\sqrt{7}$, $\sqrt{24}$, ...
- Algunos números *especiales*: π, e, Φ, ...
- Otros números, por ejemplo: 2,24224222...; 0,12345678910...; ...

EJEMPLO

19. Clasifica los siguientes números según sean racionales o irracionales.

$\sqrt{5}$ 0,50505050505... 0,5050050005...

Son irracionales $\sqrt{5} = 2{,}23606797\ldots$ y 0,5050050005... porque su expresión decimal tiene infinitas cifras decimales no periódicas.

Es racional $0{,}50505050505\ldots = 0{,}\widehat{50}$ porque es un número decimal periódico y se puede expresar mediante una fracción.

8. Números reales.

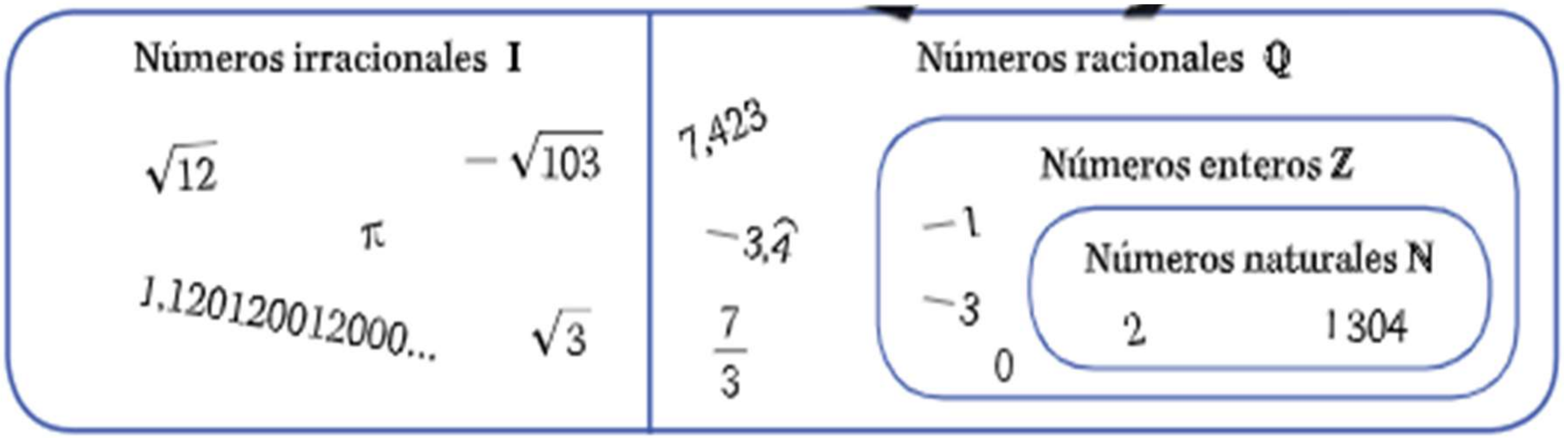
8.2. Números reales

Los **números reales** se representan como $\mathbb{R}$, y son el conjunto formado por los números racionales y los números irracionales.

Los números decimales pueden ser racionales o irracionales.

Todos los números decimales son reales.

Números reales $\mathbb{R}$



8. Números reales.

51 Clasifica estos números indicando todos los conjuntos numéricos a los que pertenecen.

a) $1,2\widehat{5}$ e) $\sqrt[3]{-8}$ i) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

b) $3\sqrt{4}$ f) $\sqrt{1,44}$ j) $\sqrt{75}\cdot\sqrt{3}$

c) $1-\sqrt{5}$ g) $-(\sqrt{5})^2$ k) $-2\sqrt{6}$

d) $\frac{37}{5}$ h) $\frac{1}{9}-\frac{\sqrt{4}}{6}$ l) $\sqrt{\frac{32}{50}}$

a) Número real y racional.

b) Número real, racional, entero y natural.

c) Número real e irracional.

d) Número real y racional.

e) Número real, racional y entero.

f) Número real y racional.

g) Número real, racional y entero.

h) Número real y racional.

i) Número real e irracional.

j) Número real, racional, entero y natural.

k) Número real e irracional.

l) Número real y racional.

52 Con las cifras 1, 2 y 3, escribe un número:

a) Irracional.

b) Decimal exacto.

c) Decimal periódico puro.

d) Decimal periódico mixto.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $\sqrt{123}$ c) 1,123123123…

b) $\frac{3}{12}$ d) 1,3121212…

8. Números reales.

53 **REFLEXIONA.** Escribe un radical que tenga una raíz:

a) Natural.

b) Entera no natural.

c) Racional no entera.

d) Irracional.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $\sqrt{25}$

b) $\sqrt[3]{-8}$

c) $\sqrt{\frac{4}{9}}$

d) $\sqrt{2}$

9. Aproximaciones y errores

9.1. Redondeo y truncamiento

Para **truncar** un número decimal hasta un cierto orden, hay que eliminar del número las cifras decimales siguientes a la cifra que indica ese orden.

Para **redondear** hasta un cierto orden, hay que truncar el número. Si la cifra siguiente al orden es mayor o igual que 5, se aumenta una unidad la última cifra decimal. Si es menor que 5, se deja como está.

EJEMPLO

20. Redondea y trunca a las décimas y a las centésimas $\sqrt{5} = 2{,}2360$.

A las décimas:

Truncamiento $\rightarrow$ 2,2

Redondeo $\xrightarrow{3<5}$ 2,2

A las centésimas:

Truncamiento $\rightarrow$ 2,23

Redondeo $\xrightarrow{6>5}$ 2,24

Los números irracionales tienen infinitas cifras decimales no periódicas. Por eso, para trabajar con ellos utilizamos aproximaciones.

Al número de cifras resultante de aproximar un número lo llamamos cifras significativas.

4,846

Redondeo a la centésima $\downarrow$

Tres cifras significativas $\rightarrow$ 4,85

9. Aproximaciones y errores.

Cuando la aproximación es mayor que el número, decimos que se ha realizado una **aproximación por exceso.** Cuando es menor, la **aproximación** es **por defecto.**

9.2. Error absoluto y error relativo

- **Error absoluto,** E_a, de una aproximación es el valor absoluto de la diferencia entre el número y su aproximación.
- **Error relativo,** E_r, de una aproximación es el valor absoluto del cociente entre el error absoluto y el número.

EJEMPLO

21. Halla los errores cometidos al redondear 5,1827 a las milésimas.

$5{,}1827 \xrightarrow{7 > 5} 5{,}183$

Error absoluto: $E_a = |5{,}1827 - 5{,}183| = 0{,}0003$

Error relativo: $E_r = \left|\dfrac{0{,}0003}{5{,}1827}\right| = 0{,}000058$

Valor absoluto:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

$|3| = 3 \qquad |-3| = 3$

9. Aproximaciones y errores.

54 Trunca y redondea estos números a las décimas y a las centésimas.

a) 5,264
b) $3,2\widehat{4}$
c) $\sqrt[3]{10}$
d) $\dfrac{7}{3}$
e) 9,864
f) $0,\widehat{28}$
g) $\sqrt[4]{25}$
h) $\dfrac{1}{8}$
i) $-12,418$
j) $71,\widehat{09}$
k) $\sqrt[5]{2}$
l) $-\dfrac{\sqrt{4}}{12}$

Truncamiento:

a) 5,2 y 5,26
b) 3,2 y 3,24
c) 2,1 y 2,15
d) 2,3 y 2,33
e) 9,8 y 9,86
f) 0,2 y 0,28
g) 2,2 y 2,23
h) 0,1 y 0,12
i) $-12,4$ y $-12,41$
j) 71,0 y 71,09
k) 1,1 y 1,14
l) $-0,1$ y $-0,16$

Redondeo:

a) 5,3 y 5,26
b) 3,2 y 3,24
c) 2,2 y 2,15
d) 2,3 y 2,33
e) 9,9 y 9,86
f) 0,3 y 0,28
g) 2,2 y 2,24
h) 0,1 y 0,13
i) $-12,4$ y $-12,42$
j) 71,1 y 71,09
k) 1,1 y 1,15
l) $-0,2$ y $-0,17$

55 Redondea a las décimas los números 25,21 y 50,42. Calcula el error absoluto y el relativo cometido en cada caso y compáralos.

Redondeo: 25,2 y 50,4

Error absoluto:

$|25,21 - 25,2| = 0,01$

$|50,42 - 50,4| = 0,02$

Error relativo:

$$\left|\frac{0,01}{25,21}\right| = 0,00039$$

$$\left|\frac{0,02}{50,42}\right| = 0,00039$$

Tienen el mismo error relativo y el error absoluto es el doble en el segundo que en el primero.

Como 50,42 es el doble de 25,21 y el error absoluto es el doble del uno que del otro, entonces el error relativo es el mismo.

9. Aproximaciones y errores.

56 **REFLEXIONA.** Escribe dos números tales que al redondearlos a las décimas se cometa el mismo error absoluto pero distinto error relativo.
¿En cuál de los dos es más acertada la aproximación?

Respuesta abierta. Por ejemplo: 1,23 y 3,53. En ambos el error absoluto es 0,03. El error relativo en uno es 0,024 y en el otro 0,0085. La aproximación es más acertada en el segundo porque el error relativo es menor.

10. Intervalos.

10. Intervalos

Un **intervalo** de extremos *a* y *b* está formado por todos los números comprendidos entre *a* y *b*.

EJEMPLO

22. Representa los puntos −5 y 2 en una recta numérica. Escribe algunos números que pertenezcan al intervalo de extremos −5 y 2.

Los números que pertenecen a este intervalo están comprendidos entre −5 y 2, por ejemplo:

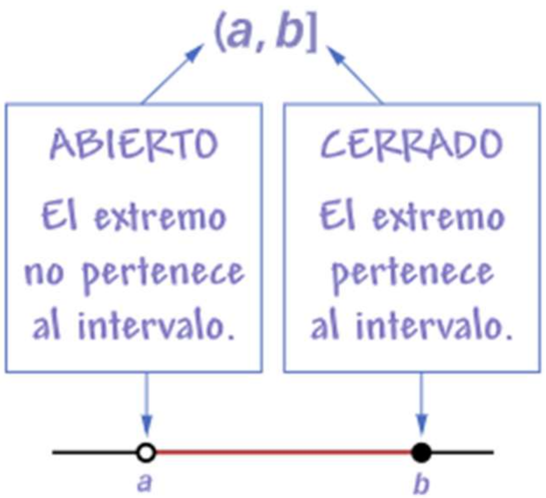
$$-4 \qquad -3{,}25 \qquad 0 \qquad 0{,}6 \qquad \sqrt{2}$$

En general, cualquier número real que sea mayor que −5 y menor que 2 pertenece al intervalo.

10. Intervalos.

Tipos de intervalo

Un intervalo puede contener los dos extremos, uno o ninguno.



- Si los dos extremos pertenecen al intervalo, se dice que es **cerrado**.

$[a, b]$

- Si los extremos del intervalo no pertenecen a él, se dice que es **abierto**.

(a, b)

- Si el extremo menor pertenece al intervalo y el mayor no, se dice que es **cerrado por la izquierda y abierto por la derecha**.

$[a, b)$

- Si el extremo menor no pertenece al intervalo y el mayor sí, se dice que es **abierto por la izquierda y cerrado por la derecha**.

$(a, b]$

10. Intervalos.

57 Representa los puntos -6 y 4 en una recta numérica. Indica un punto que pertenezca al intervalo de extremos -6 y 4 tal que sea:

a) Natural.

b) Entero negativo.

c) Decimal periódico.

d) Irracional.

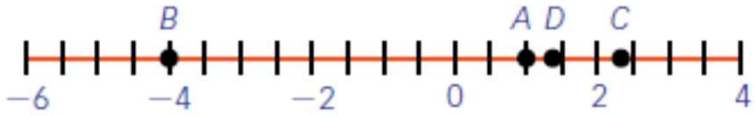
Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $A = 1$

b) $B = -4$

c) $C = \dfrac{7}{3}$

d) $D = \sqrt{2}$



58 Representa los siguientes intervalos e indica dos puntos que pertenezcan a ellos en cada caso.

a) $[2, 5]$

b) $[3; 3{,}1)$

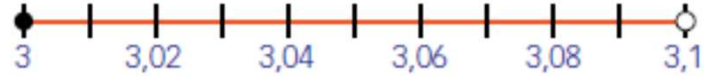
c) $(-2; 0{,}3]$

d) $[-5; -4{,}9)$

a)

Respuesta abierta. Por ejemplo: 2 y 5.

b)



Respuesta abierta. Por ejemplo: 3,02 y 3.

c)

Respuesta abierta. Por ejemplo: 0 y 0,3.

d)

Respuesta abierta. Por ejemplo: -5 y $-4{,}92$.

10. Intervalos.

59 Escribe el intervalo que se ha representado en cada caso.

a)

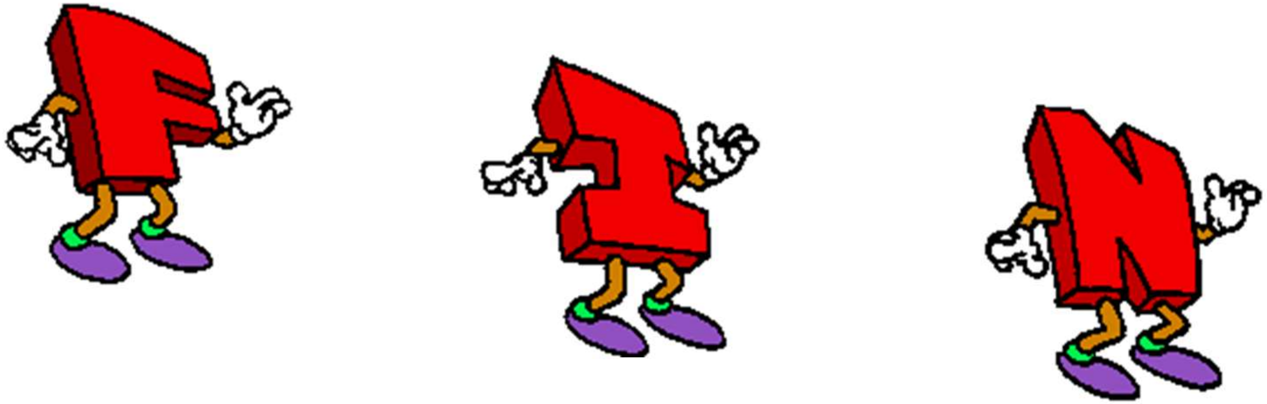
b)

a) $[-6, -1)$ b) $(-2, 3)$

60 **REFLEXIONA.** Dado un intervalo $[a, b)$, donde $a < b$:

- ¿Existe siempre un entero que pertenezca a él?
- ¿Y uno racional?
- ¿Y uno irracional?

- No. Contraejemplo: $[3{,}2; 3{,}5)$.
- Sí.
- Sí.


FIN