Tema 9: Iniciación ao cálculo de derivadas. Aplicacións

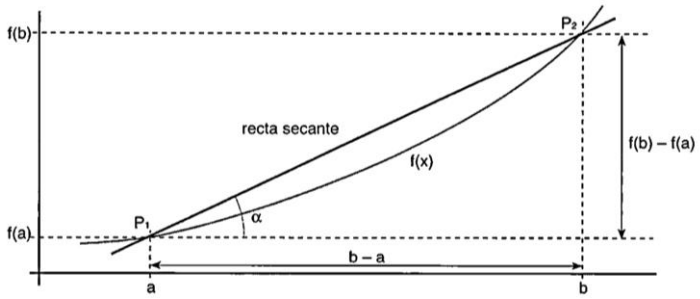
DERIVADA DUNHA FUNCIÓN

1. Taxa de variación media, Interpretación xeométrica. Taxa de variación instantánea.

Definición: Chamamos taxa de variación media da función f entre a e b con $a < b$, e o denotamos por $TVM[a,b]$, ao cociente entre a variación de $f(x)$ e a de x no intervalo $[a,b]$, é dicir, $TVM[a,b] = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Interpretación xeométrica:

Consideremos a función f cuxa gráfica é a da figura, e os puntos $P_1 - (a, f(a))$ e $P_2 - (b, f(b))$



A taxa de variación media da función entre a e b é : $TVM[a,b] = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ que non é mais que a tanxente trigonométrica do ángulo $\propto$,que é, a súa vez, a pendente da recta secante á curva polo puntos P_1 e P_2. Polo tanto, podemos afirmar que a taxa de variación media dunha función f no intervalo $[a,b]$ coincide coa pendente da recta secante á gráfica da función polos puntos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Taxa de variación instantánea . Definición de derivada dunha función nun punto.

Se ben a taxa de variación media dunha función nun intervalo $[a, a+h]$ permite calcular a variación que experimentou a función nese intervalo por termino medio, esta taxa non informa acerca do comportamento en cada punto.

En ocasións resulta interesante coñecer a magnitude da variación en cada punto, o que chamamos taxa de variación instantánea (TVI).

Así, cando circulamos cun vehículo, o velocímetro nos indica a velocidade en cada instante.

Como podemos calcular esta taxa de variación instantánea dunha función nun punto determinado?

Consideremos a función $f(x) = x^2 - 4x$-6 e calculemos a TVM nos intervalos do tipo $[1, b]$ con b cada vez máis próximo a 1. O valor obtido daranos, cada vez, unha información máis precisa sobre como varía a función en $x = 1$.

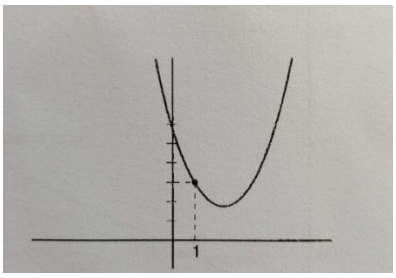
$\text{TVM}[1,\ 1{,}5] = \frac{f(1{,}5)-f(1)}{1{,}5-1} = \frac{2{,}25-3}{1{,}5-1} = \frac{-0{,}75}{0{,}5} = -1{,}5$

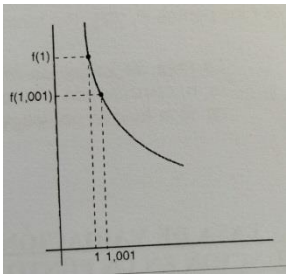
$\text{TVM}[1,\ 1{,}1] = \frac{f(1{,}1)-f(1)}{1{,}1-1} = \frac{2{,}81-3}{1{,}1-1} = \frac{-0{,}19}{0{,}1} = -1{,}9$

$\text{TVM}[1,\ 1{,}01] = \frac{f(1{,}01)-f(1)}{1{,}01-1} = \frac{2{,}9801-3}{1{,}01-1} = \frac{-0{,}0199}{0{,}01} = -1{,}99$

Vemos que estas TVM acércanse cada vez máis a -2. Este valor é o límite das TVM nos intervalos $[1, b]$ cando b tende a 1. Este límite é o que se coñece como tasa de variación instantánea de f no punto de abscisa $x = 1$.

Nestas gráficas podemos ver a interpretación da taxa de variación instantánea dunha función nun punto para a función $f(x) = x^2 - 4x + 6$. Como poder ver, esta función é decrecente no entorno de x=1. O valor -2, obtido ao calcular a taxa de variación instantánea de f en x=1, indícanos que , para valores de x moi próximos a 1, un pequeno aumento de x proporciona unha disminución de $f(x)$ aproximadamente 2 veces maior





A taxa de variación instantánea nun punto ten gran importancia no estudo local dunha función e coñécese matematicamente co nome de derivada da función nun punto. Así en xeral:

A derivada da función f no punto de abscisa $x = a$ é o límite, se existe, dado por $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Se o límite existe, dise que a función f é derivable no punto a.

2. Derivada dunha función nun punto. Derivadas laterais. Interpretación xeométrica e física.

Definición: Sexa X un intervalo aberto e $f: X \to \mathbb{R}$ unha función e $a \epsilon X$, diremos que f é derivable en a se existe o límite: $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ e é un número real (é dicir , non é infinito). O valor do límite denomínase derivada de f en $x = a$, e o representamos por $f'(a),\ Df(a)$ ou por $\frac{df}{dx}(a)$. É dicir:

$$f'(a) = Df(a) = \frac{df}{dx}(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Tema 9: Iniciación ao cálculo de derivadas. Aplicacións

Definición: Sexa X un intervalo aberto e $f: X \to \mathbb{R}$ unha función e $a \epsilon X$, dise que f é derivable en a pola dereita se existe o límite: $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ e é finito. Ao valor do límite o chamamos derivada pola dereita de f en $x = a$, e o representamos por $f´(a^+)$.

Definición: Sexa X un intervalo aberto e $f: X \to \mathbb{R}$ unha función e $a \epsilon X$, dise que f é derivable en a pola esquerda se existe o límite: $\lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ e é finito. Ao valor do límite o chamamos derivada pola esquerda de f en $x = a$, e o representamos por $f´(a^-)$.

Nota: Para que exista a derivada da función nun punto $(a, f(a))$, ten que existir o límite $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ polo que deben existir os dous límites laterais, é dicir , a derivada pola dereita e pola esquerda nese punto, e os seus valores deben coincidir.

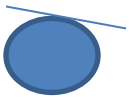
Definición: Sexa X un intervalo aberto e $f: X \to \mathbb{R}$ unha función. Diremos que f é derivable en X se o é en todos os puntos de X.

Definición: Sexa o intervalo pechado $[a, b]$ e $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ unha función. Diremos que f é derivable no intervalo pechado $[a, b]$, se é derivable no intervalo aberto (a, b) e derivable no punto a pola dereita e no punto b pola esquerda.

O problema da tanxente. Interpretación xeométrica da derivada dunha función nun punto.

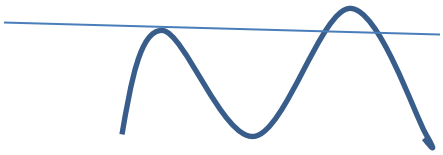
Para dar unha interpretación xeométrica do concepto de derivada necesitamos utilizar a tanxente a unha curva nun punto.

A definición intuitiva de que a tanxente a unha curva nun punto é a recta que toca á curva en un só punto é válida para a circunferencia e curvas similares: pechadas e convexas(“sen fochancas”) como se pode ver nas figuras



Recta tanxente nun punto

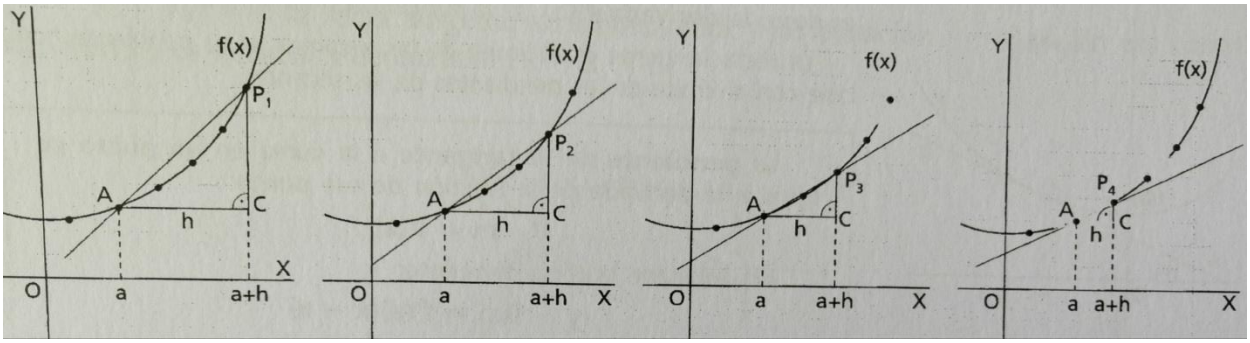
Recta que corta á curva nun punto

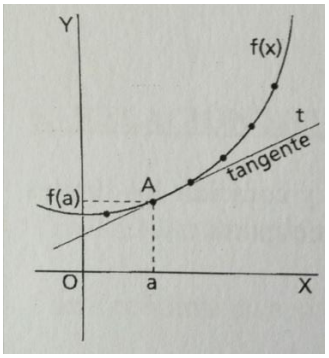


Recta tanxente a unha curva nun punto e a corta en tres puntos

Para o caso xeral fai falta unha nova definición que sexa válida sempre e que corresponda á idea intuitiva nos casos nos que esta se poda aplicar.

Tema 9: Iniciación ao cálculo de derivadas. Aplicacións

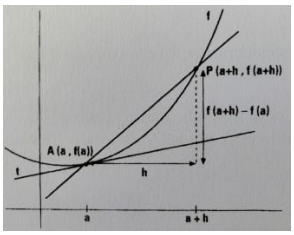




Trátase de definir a tanxente á curva no punto A. Para iso, consideramos o conxunto de puntos $P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots$ aproximándose ao punto A. Observando as figuras dedúcese que se os puntos $P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots$aproxímanse a A, as rectas secantes $AP_1, AP_2, AP_3, AP_4, \ldots$aproxímase a unha recta t que coincide coa idea intuitiva de recta tanxente no punto A. Polo tanto pódese dar a seguinte definición:

A recta tanxente a unha curva no punto A é a posición límite, t, se existe, das rectas secantes $AP_1, AP_2, AP_3, AP_4, \ldots$ cando os puntos $P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots$ aproxímanse ao punto A.

Para poder achar a ecuación desa recta tanxente no punto de coordenadas $(a, f(a))$, se a escribimos en forma punto-pendente: $y - f(a) = m(x - a)$ necesitamos saber o valor da pendente m. Se a recta tanxente é a posición límite das secantes, a súa pendente será o límite das pendentes das secantes, co que:



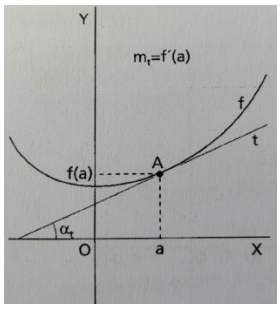
Usando o punto A e P_1 temos que $m_1 = tanx \ \propto_1 = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Usando o punto A e P_2 temos que $m_2 = tanx \ \propto_2 = \frac{f(a+k)-f(a)}{k}$

E así sucesivamente, de maneira que cando o punto P_i variable chegue a coincidir con P teremos a recta tanxente, cuxa pendente será: $m = tanx \propto= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(A)$.

A pendente, m_t, da recta tanxente no punto A é a tasa de variación instantánea no punto A, dada por $m_t = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, é dicir a derivada $f'(a)$ da función $f(x)$ en $x = a$.

Así podemos concluír que a pendente da recta tanxente á curva nun punto é igual á derivada da función nese punto.

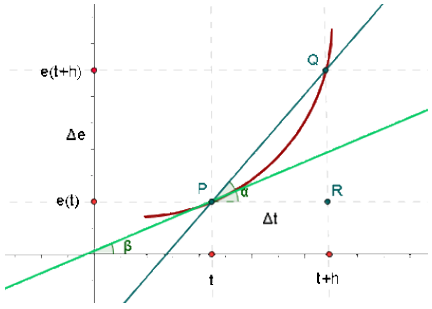


Interpretación física da derivada

Velocidade media

A velocidade media é o cociente entre o espazo recorrido (Δe) e o tempo transcorrido (Δt).

$$v_m(t) = \frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{e(t+\Delta t)-e(t)}{\Delta t}$$

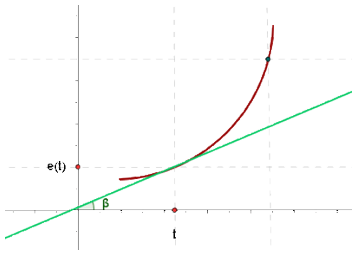


Tema 9: Iniciación ao cálculo de derivadas. Aplicacións

Velocidade instantánea

A velocidade instantánea é o límite da velocidade media cando Δt tende a cero, é dicir, a derivada do espazo respecto ao tempo

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e(t+\Delta t) - e(t)}{\Delta t}$$



Exemplo:

A relación entre a distancia recorrida en metros por un móbil e o tempo en segundos é $e(t) = 6t^2$. Calcular :

- A velocidade media entre t=1 e t=4

A velocidade media é o cociente incremental no intervalo $[1,4]$

$$v_m = \frac{e(4)-e(1)}{4-1} = \frac{6\cdot 4^2 - 6\cdot 1^2}{3} = \frac{96-6}{3} = 30\ m/s$$

- A velocidade instantánea en t=1

A velocidade instantánea é a derivada en t=1

$$v_i = e'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{6(t+h)^2 - 6t^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{6(t^2+2ht+h^2) - 6t^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{6t^2+12ht+6h^2-6t^2}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{12ht+6h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(12t+6h)}{h} = \lim_{h\to 0}(12t+6h) = 12\ m/s$$

Aceleración instantánea:

A aceleración instantánea é a derivada da velocidade respecto ao tempo, é dicir: $a = v'(t)$. Polo tanto, a aceleración é a derivada segunda do espazo respecto ao tempo. $a = e''(t)$

Exercicio:

O espazo percorrido por un móbil ven dado pola función $e(t) = 3t^2 - t + 1$. O espazo mídese en metros e o tempo en segundos.

a) Achar a ecuación da velocidade
   $v(t) = e'(t) = 6t - 1$
b) Achar a velocidade instantánea no instante $t = 0$.
   $v(0) = 6\cdot 0 - 1 = -1\ m/s$
c) Achar a ecuación da aceleración

$$a(t) = v'(t) = e''(t) = 6\ m/s^2$$

3. Ecuación da tanxente a unha función nun punto. Ecuación da normal.

Como vimos na interpretación xeométrica da derivada, esta é a pendente da recta tanxente á función (realmente á gráfica da función) no punto de coordenadas $(a, f(a))$, polo que a ecuación desa recta tanxente será:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Chámase recta normal á función no punto $(a, f(a))$ á perpendicular á recta tanxente nese punto. Polo tanto, tendo en conta que se dúas rectas son perpendiculares o produto das súas pendentes vale -1 , a pendente da recta normal será $\frac{-1}{f'(a)}$ (se $f'(a) \neq 0$), e a ecuación da normal será:

$$y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x - a)$$

Se $f'(a) = 0$ a recta tanxente será horizontal e de ecuación $y = f(a)$. Nese caso a recta normal é vertical e de ecuación $x = a$

4. Derivación e continuidade.

Teorema:

Se unha función é derivable nun punto a entón a función é continua nese punto

O recíproco non se verifica, por exemplo a función $f(x) = |x|$ é continua en todo $\mathbb{R}$ pero non é derivable no 0.

Tema 9: Iniciación ao cálculo de derivadas. Aplicacións

5. Función derivada. Derivadas sucesivas.

Función derivada

Se f é unha función derivable en todos os puntos dun conxunto D, pódese definir en D unha nova función f', que asocia a cada $x \in D$ o valor $f'(x)$ da derivada de f en x. A función f' denomínase función derivada ou derivada primeira.

Unha vez que se coñece a función derivada $f'(x)$ dunha función $f(x)$ pódese considerar, se existe, a súa derivada, que se chama derivada segunda de f, e escríbese $f''(x)$.Tamén se poden utilizar os seguintes símbolos $D^2 f(x)$ e $\frac{d^2 f}{dx^2}(x)$.

O proceso pode continuarse para achar as derivadas terceira, cuarta, quinta, ..., eneísima dunha función , se existe. Cada unha destas funcións obtense achando a función derivada da anterior. En vez de escribir varias til na parte superior dereita da función utilízanse os símbolos $f^{3)}(x)$,...$f^{n)}(x)$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $f': \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to f(x)$ $\qquad$ $x \to f'(x)$

A partir da definición da derivada da función $f(x)$ obtense aplicando a definición de derivada para unha x xenérica:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

En todos os puntos do dominio de $f'(x)$ (onde $f(x)$ é derivable) podemos considerar outra función $f''(x)$, que asigna a cada punto de x o valor da derivada de $f'(x)$ neste punto.

$f'': \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$

$x \to f''(x)$

6. Regras de derivación.

Obter a expresión da función derivada dunha función dada implica calcular o límite que define a esa función derivada nun punto xenérico usando a expresión que define á función orixinal; é dicir, calcular : $y' = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Pero calcular ese límite cada vez que desexemos obter a derivada dunha función resulta bastante engorroso e, por iso, obtense (aínda que non as demostraremos) unhas expresións ou fórmulas xerais que permiten obter facilmente a derivada de calquera función. Esas fórmulas ou regras de derivación son as seguintes.

Tema 9: Iniciación ao cálculo de derivadas. Aplicacións

Táboa das Derivadas das funcións elementais:

	Función y , $f(x)$		Función Derivada y' , $f'(x)$	
Función Constante	$y = k$		$y' = 0$	
Función Identidade	$y = x$		$y' = 1$	
Funcións Potencia	$y = x^n$ $y = [f(x)]^n$		$y' = n \cdot x^{n-1}$ $y' = n \cdot [f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$	
	$y = \sqrt{x}$	$y = \sqrt{f(x)}$	$y' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$	$y' = \frac{f'(x)}{2 \cdot \sqrt{f(x)}}$
	$y = \sqrt[n]{x}$	$y = \sqrt[n]{f(x)}$	$y' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$y' = \frac{f'(x)}{n \cdot \sqrt[n]{[f(x)]^{n-1}}}$
Funcións Exponenciais	$y = e^x$	$y = e^{f(x)}$	$y' = e^x$	$y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$
	$y = a^x$	$y = a^{f(x)}$	$y' = a^x \cdot \ln a$	$y' = a^{f(x)} \cdot \ln a \cdot f'(x)$
Funcións Logarítmicas	$y = \ln x$ $y = \ln f(x)$		$y' = \frac{1}{x}$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$
	$y = \log_a x$ $y = \log_a f(x)$		$y' = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \log_a e$
Funcións Trigonométricas	$y = Sen\ x$ $y = Sen\ f(x)$		$y' = Cos\ x$ $y' = Cos\ f(x) \cdot f'(x)$	
	$y = Cos\ x$ $y = Cos\ f(x)$		$y' = -Sen\ x$ $y' = -Sen\ f(x) \cdot f'(x)$	
	$y = Tx\ x$ $y = Tx\ f(x)$		$y' = \frac{1}{cos^2 x}$ $y' = \frac{f'(x)}{cos^2 f(x)}$	

Tema 9: Iniciación ao cálculo de derivadas. Aplicacións

Derivación logarítmica:

É un método que permite calcular facilmente moitas derivadas e que consiste en tomar logaritmos neperianos nos dous membros da función e derivar a continuación.

Exemplo: $y = x^{sen\,x}$ entón derivando a ambos lados da igualdade :

$y = x^{sen\,x}$ $\qquad$ $\frac{1}{y}y' = \cos x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot sen\,x$

$Ln\,(y) = \ln(x^{sen\,x})$ $\qquad$ $y' = (\cos x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot sen\,x) \cdot y$

$Ln\,(y) = sen\,x\ \cdot \ln x$ $\qquad$ $y' = \left[cos \cdot lnx + \frac{1}{x} \cdot sen\,x\right] x^{senx}$

Derivación implícita:

Unha correspondencia ou unha función está definida en forma implícita cando non aparece despexada a y se non que a relación entre a x e a y ven dada por unha ecuación con dúas incógnitas onde o segungo membro é cero.

Para achar a derivada en forma implícita non é necesario despexar y, basta con derivar membro a membro, utilizando as regras vistas ata agora e tendo presente que:

$x' = 1$ e en xera $y \neq {}'1$, polo que omitiremos x'e deixaremos y'.

Exemplos:

- $6x - 2y = 0 \rightarrow 6 - 2y' = 0 \rightarrow y' = 3$
- $x^2 + y^2 - 7 = 0 \rightarrow 2x + 2yy' = 0 \rightarrow y' = -\frac{x}{y}$

Recorda as seguintes fórmulas de trigonometría e potencias:

$$\boldsymbol{Sen^2\,x + Cos^2\,x = 1} \quad ; \quad \boldsymbol{Tg\,x = \frac{Sen\,x}{Cos\,x}} \quad ; \quad \boldsymbol{Cotg\,x = \frac{Cos\,x}{Sen\,x}}$$

$$\boldsymbol{Sec\,x = \frac{1}{Cos\,x}} \quad ; \quad \boldsymbol{Cosec\,x = \frac{1}{Sen\,x}} \quad ; \quad \boldsymbol{a^{-n} = \frac{1}{a^n}} \quad ; \quad \boldsymbol{\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}}$$

Derivadas de operacións con funcións:

- ***Derivada da suma ou resta de funcións:*** é a suma ou resta das derivadas das funcións:

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

- ***Derivada do produto dun número por unha función:*** é o produto do número pola derivada da función: $(k \cdot f)' = k \cdot f'$

- ***Derivada do produto de funcións:*** é a derivada da primeira función pola segunda sen derivar, maila primeira sen derivar pola derivada da segunda.

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

- ***Derivada do cociente de funcións:*** é a derivada do numerador polo denominador sen derivar, menos o numerador sen derivar pola derivada do denominador, todo elo dividido polo cadrado do denominador.

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

- ***Derivada da composición de funcións:*** $\left[g(f(x))\right]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

APLICACIÓNS DA DERIVADA AO ESTUDO DAS PROPIEDADES LOCAIS E GLOBAIS DUNHA FUNCIÓN.

1. Definición de función crecente e decrecente. Determinación dos intervalos de crecemento e decrecemento dunha función.

Definición:

Sexa $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ unha función dada, diremos que f é crecente no intervalo $[a, b]$ se para calquera puntos x_1 e x_2 do intervalo $[a, b]$, tal que $\mathrm{x}_1 < \mathrm{x}_2$, verifícase que $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Diremos que é estritamente crecente se para calquera puntos x_1 e x_2 do intervalo $[a, b]$, tal que $x_1 < x_2$, verifícase que $f(x_1) < f(x_2)$, é dicir:

$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$

Definición: Sexa $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ unha función dada, diremos que f é decrecente no intervalo $[a, b]$ se para calesquera puntos x_1 e x_2 do intervalo $[a, b]$, tal que $x_1 < x_2$, verifícase que $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Diremos que é estritamente decrecente no intervalo $[a, b]$ se para calquera puntos x_1 e x_2 do intervalo $[a, b]$, tal que $x_1 < x_2$, verifícase que $f(x_1) > f(x_2)$, é dicir: $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < 0$.

Definición:

- Unha función f diremos que é estritamente crecente nun punto $x = a$ se existe algún número h positivo tal que f é estricamente crecente no intervalo $(x - h, x + h)$.
- Unha función f é estritamente decrecente no punto x=a se existe algún número positivo h tal que f é estritamente decrecente no intervalo $(x - h, x + h)$.
- Destas definicións podemos concluír que se a función f é derivable en a entón:
    - A función f é estritamente crecente en a se $f'(a) > 0$, é dicir: é crecente en a se a derivada é positiva.
    - A función f é estritamente decrecente en a se $f'(a) < 0$, é dicir, é decrecente en a se a derivada é negativa.

- A función é constante en a se $f'(a) = 0$ e además a derivada é nula nos puntos próximo a a. E dicir é constante se a derivada é nula en a e nun entorno de a.

Determinación dos intervalos de crecemento e decrecemento dunha función derivable :

- Derivar a función
- Obter as raíces da derivada primeira, para iso facemos $f'(x) = 0$
- Formamos intervalos abertos cos ceros(raíces) da primeira derivada e os puntos de descontinuidade da función orixinal (se os houbese).
- Tomamos un valor de cada intervalo, e achamos o signo que ten a primeira derivada.
  - Se $f'(x_0) > 0$, entón f é crecente en todos os puntos do intervalo ao que pertence x_o.
  - Se $f'(x_0) < 0$, entón f é decrecente en todos os puntos do intervalo ao que pertence x_0.
- Escribimos os intervalos de crecemento e decrecemento.

2. Definición de extremos relativos e absolutos. Criterios para a determinación de extremos relativos.

Definición:

- Sexa $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ unha función dada, diremos que f ten un máximo relativo no punto c∈ (a, b) se existe un entorno do punto c contido $[a, b]$ en tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo x pertencente a ese entorno.
- Sexa $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ unha función dada, diremos que f ten un mínimo relativo no punto c∈ $[a, b]$ se existe un entorno do punto c contido $[a, b]$ tal que $f(c) \leq f(x)$ para todo x pertencente a ese entorno.
- Diremos que f ten un extremo relativo en c se ten un máximo ou mínimo relativo en c.
- Sexa $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ unha función dada, diremos que f ten un máximo absoluto no punto c∈ $[a, b]$ se $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in [a, b]$
- Sexa $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ unha función dada, diremos que f ten un mínimo absoluto no punto c∈ (a, b) se $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in [a, b]$

Definición: Chamaremos punto crítico dunha función f a todos os puntos do dominio de f onde a primeira derivada vale cero, é dicir, a é un punto crítico de f se $a \in Dom(f)$ e $f'(a) = 0$.

Criterios para a determinación de extremos relativos.

- Criterio da primeira derivada
  Teorema: Sexa c un punto crítico dunha función f que é continua nun intervalo aberto I que contén a c. Se f é derivable no intervalo, excepto posiblemente en c, entón $f(c)$ pódese clasificar da seguinte maneira.
  - Se $f'(x) > 0$ para todo $x < c$, e $f'(x) < 0$ para todo $x > c$ entón $f(c)$ é un máximo relativo da función f.
  - Se $f'(x) < 0$ para todo $x < c$, e $f'(x) > 0$ para todo $x > c$ entón $f(c)$ é un mínimo relativo da función f.
  - Se $f'(x) > 0$ para todo $x < c$, e $f'(x) > 0$ para todo $x > c$ entón $f(c)$ é un máximo relativo da función f ou Se $f'(x) < 0$ para todo $x < c$, e $f'(x) < 0$ para todo $x > c$ entón $f(c)$ non é un máximo nin mínimo relativo da función f
- Criterio da segunda derivada:
  Se f é unha función dúas veces derivable nun entorno aberto que contén a un punto c tal que $f'(c) = 0$ entón verifícse
  - Se $f''(c) < 0$, entón f ten un máximo relativo en $(c, f(c))$
  - Se $f''(c) > 0$, entón f ten un mínimo relativo en $(c, f(c))$
  - Se $f''(c) = 0$, entón o criterio non decide.

3. Definición de función cóncava e convexa. Determinación dos intervalos de concavidade e convexidade dunha función.

Definición: Diremos que unha función é cóncava nun intervalo do seu dominio se dados dous puntos calquera do intervalo x_1 e x_2, o segmento que une os puntos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2)$ sempre queda por debaixo da gráfica.

Definición: Diremos que unha función é cóncava nun punto x_0 se o é nun entorno de dito punto

Definición: Diremos que unha función é convexa nun intervalo do seu dominio se dados dous puntos calquera do intervalo x_1 e x_2, o segmento que une os puntos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ sempre queda por enriba da gráfica.

Definición: Diremos que unha función é convexa nun punto x_0 se o é nun entorno de dito punto

Determinación dos intervalos de concavidade e convexidade dunha función.

- Unha función $f(x)$ non lineal dise que é cóncava nun intervalo se $f''(x) < 0$ en todo punto de dito intervalo. Isto significa que $f'(x)$ é unha función decrecente nese intervalo.

- Unha función $f(x)$ non lineal dise que é convexa nun intervalo se $f''(x) > 0$ en todo punto de dito intervalo. Isto significa que $f'(x)$ é unha función crecente nese intervalo. (Nestas función as tanxentes á curva quedan por enriba da mesma)

4. Punto de inflexión. Criterio para a determinación de puntos de inflexión

Definición: Sexa f unha función continua nun punto c, diremos que $(c, f(c))$ é un punto de inflexión se existe un intervalo aberto (a, b) que contén a c de tal maneira que a gráfica de f é:

- Cóncava cara arriba en (a, c) e cóncava cara abaixo en (c, b) ou
- Cóncava cara abaixo en (a, c) e cóncava cara arriba en (c, b)

Criterio para a determinación de puntos de inflexión

Criterio da terceira derivada

O criterio da terceira derivada é un método no que se utiliza a terceira derivada dunha función para confirmar ou comprobar os puntos de inflexión obtidos a partir da segunda derivada.

- Calcular a derivada segunda e terceira da función f
- Achar os puntos que cumpran $f''(c) = 0$.
- Avaliar $f'''(c)$ cos valores obtidos no paso anterior. Se é diferente de 0, entón, é un punto de inflexión. No caso contrario, débese usar o criterio da derivada de maior orde, de maneira que se o menor orde das derivadas superiores que fan ao punto c distintos de cero é impar entón teremos un punto de inflexión no punto c.

Tema 9: Iniciación ao cálculo de derivadas. Aplicacións

5. Problemas de optimización

Problemas de Optimización. Chámanse así a un problema que busca minimizar ou maximizar o valor dunha variable, Dito en outras palabras, é un problema que trata de calcular o valor máximo ou mínimo dunha función, no noso caso , dunha variable.

Exercicio 1: Se se quere valar un campo rectangular que está xunto a un camiño. Se a valla o lado do camiño costa 80 euros/m e a dos outros lados 10 euros/metro, achar a área do maior campo que se pode cercar con 28880 euros.

Exercicio 2: As páxinas dun libro deben medir cada unha 60 cm^2 de área. As súas marxe laterais e inferior miden 2 cm e a superior mide 3 cm . Calcular as dimensións da páxina que permitan obter a maior área de impresión posible.
Exercicio 3:Entre todos os rectángulos inscritos nunha circunferencia de radio 10 cm, calcula as dimensións do que teña área máxima.

Exercicio 4: Quérese construír un depósito aberto de base cadrada e paredes verticais con capacidade para 13,5 metros cúbicos Para iso disponse dunha chapa de aceiro de grosor uniforme. Calcular as dimensións do depósito para que o gasto en chapa sexa o menor posible

Exercicio 5: O propietario dun edificio ten alugados os 40 pisos polo mesmo prezo de 600 euros cada un. Por cada 60 euros que o propietario aumenta o prezo observa que perde un inquilino. A que prezo lle convén alugar os pisos para obter a maior ganancia posible?

Exercicio 6: O consumo dun barco navegando a unha velocidade de x nós (millas/hora) ven dada pola seguinte expresión $C(x) = \frac{x^2}{60} + \frac{450}{x}$. Calcular a velocidade máis económica e o coste equivalente

Exercicio 7: A partir dunha cartolina cadrada de 60 cm de lado vaise construír unha caixa de base cadrada, sen tapa, a base de recortar catro cadrados iguais nas esquinas da cartolina e dobrando despois da maneira adecuada. Un observador indica que a caixa de mais capacidade obterase se os cadrados eliminados teñen 10 Cm de lado.. Decidir se a observación é correcta ou non

Exercicio 8: Quérese construír depósito cilíndricos coa condición de que a altura máis o perímetro da circunferencia vallan 100m. Comprobar que o volume dos depósitos ven dado pola expresión V=$q00\pi r^2 - 2\pi^2 r^3$ e determinar do que ten volume máximo

Tema 9: Iniciación ao cálculo de derivadas. Aplicacións

Criterios de avaliación:

1. Coñecer a definición de derivada dunha función nun punto, interpretala graficamente e aplicala para o cálculo de casos concretos
2. Coñecer as regras de derivación e utilizalas para achar a función derivada doutra
3. Utiliza a derivación para achar a recta tanxente a unha curva nun punto, os máximos e os mínimos dunha función , os intervalos de crecemento…
4. Coñecer o papel que desempeñan as ferramentas básicas de análise (límites, derivadas...) na representación de funcións e dominar a representacións sistemática de funcións polinómicas e racionais

Estándares de aprendizaxe avaliables

1.1. Acha a taxa de variación media dunha función nun intervalo e interprétaa
1.2. Calcula a derivada dunha función nun punto a partir da definición
1.3. Aplicando a definición de derivada acha a función derivada de outra
2.1. Acha a derivada dunha función sinxela
2.2. Acha a derivada dunha función na que interveñen potencias non enteiras, produtos e cocientes
2.3. Acha a derivada dunha función composta
3.1. Acha a ecuación da recta tanxente a unha curva
3.2. Localiza os puntos singulares dunha función polinómica ou racional e represéntaos
3.3. Determina os tramos onde unha función crece ou decrece
4.1. Representa unha función da que se coñecen os datos máis relevantes(ramas infinitas e puntos singulares)
4.2. Describe con corrección todos os datos relevantes dunha función dada graficamente
4.3. Representa unha función polinómica de grao superior a dous
4.4. Representa unha función racional con denominador de primeiro grao e unha rama asintótica
4.5 Representa unha función racional con denominador de primeiro grao e unha rama parabólica
4.6. Representa unha función racional con denominador de segundo grao e unha asíntota horizontal
4.7. Representa unha función racional con denominador de segundo grao e unha asíntota oblicua
4.8. Representa unha función racional co denominador de segundo grao e unha rama parabólica