

Matemáticas I

SOLUCIONARIO

Este material es una obra colectiva concebida, diseñada y creada en el Departamento de Ediciones de Santillana, bajo la dirección de **Teresa Grence**.

En su elaboración han participado:

Sonia Alejo Sánchez

María Arribas Fernández

José María Fernández Díaz

Coral Victoria de la Iglesia Meleiro

Clara Inés Lavado Campos

Silvia Marín García

Natalia Polo Rodríguez

Lorena Ramos San Millán

Rocío Rubio Álvarez

María de las Mercedes Sánchez Martín

EDICIÓN

Sonia Alejo Sánchez

Clara Inés Lavado Campos

Silvia Marín García

Aída Moya Librero

EDICIÓN EJECUTIVA

Carlos Pérez Saavedra

DIRECCIÓN DEL PROYECTO

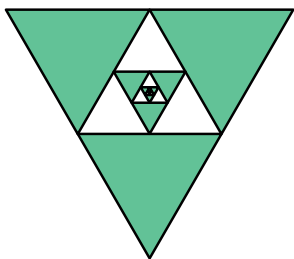
Domingo Sánchez Figueroa



DESAFÍO

Triángulos infinitos

De forma similar al triángulo de Sierpinski, los siguientes triángulos forman un patrón anidado en el que las figuras se repiten infinitas veces.



¿Cuántas veces es más grande la zona verde que la zona blanca?

Suponemos que el área del triángulo grande mide 1.

Escribimos, entonces, la siguiente ecuación.

$$1 = A_{\text{verde}} + A_{\text{blanca}}$$

Calculamos primero el área verde.

$$\begin{aligned} A_{\text{verde}} &= \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{16} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{16} + \dots = \\ &= \frac{3}{4} \left(1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{16^2} + \dots \right) = \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{16}{15} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$A_{\text{blanca}} = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

Por tanto, el área verde es 4 veces mayor que el área blanca.

PIENSA

PÁG. 227. Si el límite de la sucesión a_n es 3, ¿cuál será el límite de la sucesión $a_n + 5$? ¿Y de $2 \cdot a_n$?

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$, entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 5) = 3 + 5 = 8$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2 \cdot a_n) = 2 \cdot 3 = 6$$

ACTIVIDADES

1 Obtén el término general y calcula a_8 y a_{10} .

a) $1, 3, 5, 7, \dots$ c) $\frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{9}, \frac{-3}{16}, \dots$

b) $\frac{3}{5}, \frac{7}{15}, \frac{11}{45}, \dots$ d) $0, 2, 6, 12, 20, \dots$

a) $a_n = 2n - 1$

$a_8 = 15$ $a_{10} = 19$

b) $a_n = \frac{4n - 1}{5 \cdot 3^{n-1}}$

$a_8 = \frac{31}{5 \cdot 3^7}$ $a_{10} = \frac{39}{5 \cdot 3^9}$

c) $a_n = n(n - 1)$

$a_8 = 56$ $a_{10} = 90$

d) $a_n = \frac{-2n + 5}{n^2}$

$a_8 = \frac{-11}{64}$ $a_{10} = \frac{-15}{100}$

2 Piensa y escribe.

a) Una sucesión decreciente y acotada inferiormente.

b) Una sucesión acotada superior e inferiormente.

c) Una sucesión no acotada.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots \rightarrow$

$\rightarrow$ Sucesión decreciente y acotada inferiormente por 0.

b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots \rightarrow$

$\rightarrow$ Sucesión acotada superiormente por 0,5 e inferiormente por 0.

c) $1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots \rightarrow$

$\rightarrow$ Sucesión no acotada.

3 Usando la calculadora, halla el límite de las sucesiones.

a) $a_n = (-1)^{2n+4}$ d) $a_n = 0,2^n$

b) $a_n = n^2$ e) $a_n = \frac{n+3}{n}$

c) $a_n = n^2 - n^3$ f) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n - 7$

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ d) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
 b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ e) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$
 c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ f) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -7$

4 Escribe el término general de sucesiones con estos valores como límites.

- a) 0 d) 4 g) Sin límite
 b) $+\infty$ e) $-\infty$ h) Un número a
 c) $-\infty$ f) 0,5 i) a^2

Respuesta abierta. Por ejemplo:

- a) $a_n = \frac{4}{5n+1}$ f) $a_n = \frac{n+5}{2n}$
 b) $a_n = 3n^3 - 7$ g) $a_n = (-1)^n$
 c) $a_n = 4 - n$ h) $a_n = \frac{an^2}{(n-1)^2}$
 d) $a_n = \frac{4n-1}{n+10}$ i) $a_n = \frac{a^2n}{n-5}$
 e) $a_n = \frac{1-3n}{n}$

5 Calcula los siguientes límites.

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}$
 b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2}n^2 - 2n + 7 \right)$
 c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)^3$
 d) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3$
 e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2} \right)^n$
 f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)^2}{(n-1)^2} \right)$
 a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty$
 b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2}n^2 - 2n + 7 \right) = -\infty$
 c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)^3 = +\infty$
 d) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 = +\infty$
 e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2} \right)^n = +\infty$
 f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)^2}{(n-1)^2} \right) = 1$

6 Halla los límites de las sucesiones cuyos términos generales son los siguientes.

- a) $\frac{8n}{2n^2+3n-1}$ c) $\frac{(n-1)^{10}}{(n+2)^{10}}$
 b) $\frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}$ d) $\frac{2n-1}{n}$
 a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n}{2n^2+3n-1} = 0$
 b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2} = 1$
 c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)^{10}}{(n+2)^{10}} = 1$
 d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n} = 2$

7 Halla los siguientes límites.

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n^5 - n^2}{2n^6 + 1} - \frac{3n^2 - 1}{n^2 + 1} \right)$
 b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 - 1}{n^3} \cdot \frac{4n^4}{2n^4 + 3} \right)$
 c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3(1-n)}{2n^4 - n - 1} + \frac{4}{n^2} \right)$
 d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{3n^2 + 1}{n^2 + n + 2}}$
 e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-1} - \frac{n-1}{n+1} \right)$
 f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{n^2 + 7}{2n}$
 a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n^5 - n^2}{2n^6 + 1} - \frac{3n^2 - 1}{n^2 + 1} \right) = -3$
 b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 - 1}{n^3} \cdot \frac{4n^4}{2n^4 + 3} \right) = 0$
 c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3(1-n)}{2n^4 - n - 1} + \frac{4}{n^2} \right) = -\frac{1}{2}$
 d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{3n^2 + 1}{n^2 + n + 2}} = \sqrt{3}$
 e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-1} - \frac{n-1}{n+1} \right) = 0$
 f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{n^2 + 7}{2n} = +\infty$

8 Calcula estos límites.

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^4 + 1}{2n^4 + 1} + \frac{-n^3}{3n^3 + n + 1} \right)$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{2n^3 + 1}{2n^3 + n}$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{2}{n} \cdot \frac{(n+1)(n-1)}{(n+1)^2} \right)$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} 9^{\frac{2n^2-1}{n^2+1}}$$

$$e) \lim_{n \rightarrow \infty} 0,1^{\frac{n+1}{n^2}}$$

$$f) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 1}{n^2} \right)^{\frac{n+1}{n^2}}$$

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^4 + 1}{2n^4 + 1} + \frac{-n^3}{3n^3 + n + 1} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{2n^3 + 1}{2n^3 + n} \right) = \ln 1 = 0$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{2}{n} \cdot \frac{(n+1)(n-1)}{(n+1)^2} \right) \rightarrow \text{No existe, porque el logaritmo no está definido en 0.}$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} 9^{\frac{2n^2-1}{n^2+1}} = 9^2 = 81$$

$$e) \lim_{n \rightarrow \infty} 0,1^{\frac{n+1}{n^2}} = 0,1^0 = 1$$

$$f) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 1}{n^2} \right)^{\frac{n+1}{n^2}} = 2^0 = 1$$

9 Calcula los siguientes límites.

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{-n-5} - \frac{2n^2}{n+2} \right)$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-2n+1}{n^2-5} - \frac{n^2}{n+2} \right)$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{5}{2} \right)^n \frac{1}{3n-2} \right]$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n-3}{0,3^n}$$

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{-n-5} - \frac{2n^2}{n+2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{-n-5} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n+2} = -1 - \infty = -\infty$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-2n+1}{n^2-5} - \frac{n^2}{n+2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n+1}{n^2-5} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n+2} = 0 - \infty = -\infty$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{2} \right)^n \frac{1}{3n-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{2} \right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n-2} = +\infty \cdot 0 \rightarrow \text{Indeterminación.}$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n-3}{(0,3)^n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} -n-3}{\lim_{n \rightarrow \infty} (0,3)^n} = \frac{-\infty}{0} = -\infty$$

10 Calcula los siguientes límites.

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{n-2}}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{3n^2-6}{3n^2}$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+5} \right)^n$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-n}{n-2} \right)^n$$

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{n-2}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n-2}} = \sqrt{1} = 1$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{3n^2-6}{3n^2} = \log \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2-6}{3n^2} = \log 1 = 0$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+5} \right)^n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+5} \right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} n} = 0^{+\infty} = 0$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-n}{n-2} \right)^n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n}{n-2} \right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} n} = (-1)^{\infty} \rightarrow \rightarrow \text{No existe.}$$

11 Calcula los siguientes límites.

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3-2n^2+6}}{n-3}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+3n^2}{\sqrt{n^3-n^2-5}}$$

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 - 2n^2 + 6}}{n - 3} \rightarrow \frac{+\infty}{+\infty}$$

El mayor grado de n es $\frac{3}{2}$.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 - 2n^2 + 6}}{n - 3} &= \frac{\sqrt{n^3 - 2n^2 + 6}}{n^{\frac{3}{2}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{3}{2}}}{n - 3} = \frac{n^{\frac{3}{2}}}{n^{\frac{3}{2}}} \\ &= \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 2n^2 + 6}{n^3}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - 3}{n^{\frac{3}{2}}}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 2n^2 + 6}{n^3}} \\ &= \frac{1}{0} = +\infty \end{aligned}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 3n^2}{\sqrt{n^3 - n^2 - 5}} \rightarrow \frac{+\infty}{+\infty}$$

El mayor grado de n es 3.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 3n^2}{\sqrt{n^3 - n^2 - 5}} &= \frac{n^3 + 3n^2}{n^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{\sqrt{n^3 - n^2 - 5}} = \frac{n^3}{n^3} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 3n^2}{n^3}}{\sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - n^2 - 5}{n^6}}} = \frac{1}{0} = +\infty \end{aligned}$$

12 Calcula los siguientes límites.

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8n^4 + 3n - 1}}{3n^2 - 1}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 3}{\sqrt[3]{-3n^3 + 5n^2 - 1}}$$

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8n^4 + 3n - 1}}{3n^2 - 1} \rightarrow \frac{+\infty}{+\infty}$$

El mayor grado de n es 2.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8n^4 + 3n - 1}}{3n^2 - 1} =$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8n^4 + 3n - 1}}{\frac{n^2}{3n^2 - 1}} = 0 \end{aligned}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 3}{\sqrt[3]{-3n^3 + 5n^2 + 7n - 1}} \rightarrow \frac{+\infty}{-\infty}$$

El mayor grado de n es 1.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 3}{\sqrt[3]{-3n^3 + 5n^2 + 7n - 1}} &= \frac{n + 3}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[3]{-3n^3 + 5n^2 + 7n - 1}} = \frac{1}{\sqrt[3]{-3}} \end{aligned}$$

13 Calcula los siguientes límites.

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 1}{n} - \frac{n^2}{n + 1} \right)$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - 2n^2}{3n - 2} - \frac{-3n^2}{n - 4} \right)$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3 + 2}{4n^2 - n - 1} - \frac{n^3 + 2n + 1}{n^2 + 1} \right)$$

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 1}{n} - \frac{n^2}{n + 1} \right) \rightarrow \infty - \infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 1}{n} - \frac{n^2}{n + 1} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n} = 1 \end{aligned}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - 2n^2}{3n - 2} - \frac{-3n^2}{n - 4} \right) \rightarrow -\infty + \infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - 2n^2}{3n - 2} - \frac{-3n^2}{n - 4} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^3 + 2n^2 + n - 4}{3n^2 - 14n + 8} = +\infty \end{aligned}$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3 + 2}{4n^2 - n - 1} - \frac{n^3 + 2n + 1}{n^2 + 1} \right) \rightarrow \infty - \infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3 + 2}{4n^2 - n - 1} - \frac{n^3 + 2n + 1}{n^2 + 1} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n^5 + n^4 - 6n^3 + 3n + 3}{4n^4 - n^3 + 3n^2 - n - 1} = -\infty \end{aligned}$$

14 Halla los siguientes límites.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n-2} - \sqrt{n})$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n - \sqrt{n^2 - 1})$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3n+1} - n)$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 4n - 1} - \sqrt{n^2 + 1})$

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n-2} - \sqrt{n}) \rightarrow \infty - \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n-2} - \sqrt{n}) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2}{\sqrt{n-2} + \sqrt{n}} = 0$$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n - \sqrt{n^2 - 1}) \rightarrow \infty - \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2n - \sqrt{n^2 - 1}) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 1}{2n + \sqrt{n^2 - 1}} = +\infty$$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3n+1} - n) \rightarrow \infty - \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3n+1} - n) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2 + 3n + 1}{\sqrt{3n+1} + n} = -\infty$$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 4n - 1} - \sqrt{n^2 + 1}) \rightarrow$
 $\rightarrow \infty - \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 4n - 1} - \sqrt{n^2 + 1}) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n - 2}{\sqrt{n^2 + 4n - 1} + \sqrt{n^2 + 1}} = 2$$

15 Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{5}}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{2n}{3}}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n-1}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{\frac{n-1}{3}}$

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{5}} \rightarrow 1^\infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{1}{5}} = e^{\frac{1}{5}}$$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n-1} \rightarrow 1^\infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3}}\right]^{\frac{3}{n} \cdot (n-1)}$$

$$= e^3$$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{2n}{3}} \rightarrow 1^\infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{2n}{3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-n}\right)^{-n}\right]^{\frac{2}{3}} =$$

$$= e^{-\frac{2}{3}}$$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{\frac{n-1}{3}} \rightarrow 1^\infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{\frac{n-1}{3}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-2n}\right)^{-2n}\right]^{-\frac{1}{2n} \cdot \frac{n-1}{3}} = e^{-\frac{1}{6}}$$

16 Halla estos límites.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{n}\right)^n$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^n$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{2n}\right)^{3n-2}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n}{n^2 + 1}\right)^{2n}$

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{n}\right)^n \rightarrow 1^\infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{5}}\right)^{\frac{n}{5}}\right]^5 = e^5$$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^n \rightarrow 1^\infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^n =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-\frac{n+1}{2}}\right)^{-\frac{n+1}{2}}\right]^{-\frac{2n}{n+1}} = e^{-2}$$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{2n}\right)^{3n-2} \rightarrow 1^\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{2n}\right)^{3n-2} &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{2n}{3}}\right)^{\frac{2n}{3}} \right]^{\frac{3(3n-2)}{2n}} = e^{\frac{9}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n}{n^2 + 1}\right)^{2n} &\rightarrow 1^\infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n}{n^2 + 1}\right)^{2n} &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n^2 + 1}{n}}\right)^{\frac{n^2 + 1}{n}} \right]^{\frac{2n^2}{n^2 + 1}} = e^2 \end{aligned}$$

17 Calcula estos límites.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x - 2 - 6x^2}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x(x^2 - 1)}{2 - x^2}$$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x - 2 - 6x^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x(x^2 - 1)}{2 - x^2} &= \\ &= \frac{3x^3 - 3x}{2 - x^2} = -\infty \end{aligned}$$

18 Halla los siguientes límites.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x-1} - x)$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x-1}{2+3x} \right)^{3x^2}$$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x-1} - x) = -\infty$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x-1}{2+3x} \right)^{3x^2} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-\frac{3x+2}{3}}\right)^{\left(-\frac{3x+2}{3}\right)} \right]^{\left(\frac{-3}{3x+2}\right) \cdot 3x^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

19 Halla los límites laterales de las siguientes funciones en los puntos indicados.

$$\text{a) } \frac{-2x+1}{x-1} \text{ en } x=1 \quad \text{b) } \frac{x}{|x|} \text{ en } x=0$$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2x+1}{x-1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-2x+1}{x-1} = +\infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = -1$$

20 Indica cuáles son los límites laterales en $x = -2$ de la siguiente función.

$$f(x) = \begin{cases} 3x+4 & \text{si } x < -2 \\ 1-x^2 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (3x+4) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (1-x^2) = -3$$

21 Halla los límites de las funciones en los puntos indicados.

$$\text{a) } f(x) = \frac{3x-1}{x^2-2x+3} \text{ en } x=1$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{2-x}{x+1} \text{ en } x=-1$$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-1}{x^2-2x+3} = 1$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2-x}{x+1}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2-x}{x+1} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2-x}{x+1} &= +\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

→ No existe $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

22 Razona si existe o no el límite de la función

$$f(x) = \frac{x-2}{x+3} + \frac{x+3}{x-2} \text{ en los puntos:}$$

- | | |
|-----------|-----------|
| a) $x=2$ | d) $x=4$ |
| b) $x=3$ | e) $x=-2$ |
| c) $x=-3$ | f) $x=-4$ |

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \rightarrow \frac{5}{0}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= +\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 2} f(x).$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{37}{6}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{c) } \lim_{x \rightarrow -3} f(x) &= \frac{-5}{0} \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) &= +\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -3} f(x).$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \frac{53}{14}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \frac{-4}{1} + \frac{1}{-4} = -\frac{17}{4}$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow -4} f(x) = \frac{-6}{-1} + \frac{-1}{-6} = 6 + \frac{1}{6} = \frac{37}{6}$$

23 Calcula el límite de $f(x)$ en $x = 0$ y en $x = 3$.

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x-2}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (3 - x) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-2}{x+1} = -2 \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$\rightarrow$ No existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2}{x+1} = \frac{1}{4}$$

24 Halla el valor de los límites que aparecen a continuación.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 3x + 2} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 8}$$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 3x + 2} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 3x + 2} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)^2}{(x-1)(x-2)} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 8} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 8} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)}{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)} = -\frac{8}{3} \end{aligned}$$

25 Pon un ejemplo de una función que cumpla que:

- Tiene una asíntota horizontal en $y = 1$.
- Tiene una asíntota horizontal en $y = 2$.

- Tiene una asíntota horizontal en $y = -1$.
- No tiene asíntotas horizontales.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\text{a) } f(x) = \frac{2x - 1}{2x + 8}$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{2x^2}{(x + 1)^2}$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{3x^2 - 5}{x^2 + 7x - 3}$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{-3x + 3}{3x - 2}$$

26 ¿Una función puede tener dos asíntotas horizontales diferentes? ¿Y tres?

- Sí, basta con que el límite cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$ sean distintos de $+\infty$ o $-\infty$ y distintos entre sí.
- No puede tener tres asíntotas.

27 Halla las asíntotas horizontales de las funciones que aparecen a continuación.

$$\text{a) } f(x) = \frac{3x^2 - 1}{2x^2 - 1}$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{1 - 2x^3}{4x^3 - 2x}$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 3x + 5}$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{2x - 1}{x}$$

$$\text{e) } f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x - 3}$$

$$\text{f) } f(x) = \frac{5 - x}{2x - x^4 + 1}$$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 1}{2x^2 - 1} = \frac{3}{2} \rightarrow f(x) \text{ tiene una asíntota horizontal en } y = \frac{3}{2}.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 2x^3}{4x^3 - 2x} = -\frac{1}{2} \rightarrow f(x) \text{ tiene una asíntota horizontal en } y = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2}{x^2 - 3x + 5} = 0 \rightarrow f(x) \text{ tiene una asíntota horizontal en } y = 0.$$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{x} = 2 \rightarrow f(x)$ tiene una
asíntota horizontal en $y = 2$.

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x^2-2x-3} = 1 \rightarrow f(x)$ tiene
una asíntota horizontal en $y = 1$.

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5-x}{2x-x^4+1} = 0 \rightarrow f(x)$ tiene
una asíntota horizontal en $y = 0$.

28 Halla las asíntotas verticales de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \frac{2}{x^2+1}$

b) $f(x) = \frac{3x-1}{x+2}$

c) $f(x) = \frac{x^2-9}{x^2-1}$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} \rightarrow f(x)$ no tiene asíntotas
verticales.

b) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2\}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ tiene una asíntota vertical
en $x = -2$.

c) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = -1$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = 1$.

29 Halla, si es que tienen, las asíntotas oblicuas de estas funciones.

a) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

b) $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$

c) $f(x) = \frac{3x^3+2x}{x^2-9}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2-x} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} = 1$$

$f(x)$ tiene la asíntota oblicua $y = x + 1$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x-x^3} = 0 \rightarrow$

$\rightarrow f(x)$ tiene una asíntota horizontal en
 $y = 0$. Por tanto, no tiene asíntota oblicua.

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3+2x}{x^3-9x} = 3$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3+2x-3x^3+9x}{x^2-9} = 0$$

$f(x)$ tiene la asíntota oblicua $y = 3x$.

30 Estudia la continuidad de las funciones que aparecen a continuación.

a) $f(x) = x^{-2}$

b) $f(x) = \sqrt{x-4}$

c) $f(x) = \ln(1-x^2)$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow$
 $\rightarrow f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

b) $\text{Dom } f = [4, +\infty) \rightarrow$
 $\rightarrow f(x)$ es continua en $[4, +\infty)$.

c) $\text{Dom } f = (-1, 1) \rightarrow$
 $\rightarrow f(x)$ es continua en $(-1, 1)$.

31 Estudia la continuidad de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$

b) $f(x) = e^{x+1}$

c) $f(x) = \sin x^2 - 1$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-3\} \rightarrow$
 $\rightarrow f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-3\}$.

b) $\text{Dom } f = \mathbb{R} \rightarrow f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

c) $\text{Dom } f = \mathbb{R} \rightarrow f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

32 Estudia la continuidad de estas funciones.

a) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \leq 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{2\}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

y $f(x)$ no es continua en $x = 2$.

La discontinuidad es inevitable de salto infinito. La función tiene una asíntota vertical en $x = 2$.

b) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

y $f(x)$ no es continua en $x = 0$.

La discontinuidad es inevitable de salto infinito. La función tiene una asíntota vertical en $x = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

Como $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, la función es continua en $x = 1$.

33 Indica los tipos de discontinuidad que presenta $f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1} & \text{si } x < 2 \\ 2x-3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$\text{Dom } f = \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1 \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

y $f(x)$ no es continua en $x = 1$.

La discontinuidad es de salto infinito. La función tiene una asíntota vertical en $x = 1$.

PRACTICA

34 Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{2n^3 + 3n - 1}}{\sqrt{1 + 2n^2}}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 - 6n + 1}}{7n^3 - 7}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{2n^2 + n + 7}}{8n - 1}$

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{2n^3 + 3n - 1}}{\sqrt{1 + 2n^2}} \rightarrow \frac{+\infty}{+\infty}$

El mayor grado de n es 1.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{2n^3 + 3n - 1}}{\sqrt{1 + 2n^2}} &= \frac{\sqrt[3]{2n^3 + 3n - 1}}{\sqrt{1 + 2n^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{1 + 2n^2}} = \frac{\sqrt[3]{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 3n - 1}{n^3}}}{\sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2n^2}{n^2}}} = \\ &= \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}} \end{aligned}$$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 - 6n + 1}}{7n^3 - 7} \rightarrow \frac{+\infty}{+\infty}$

El mayor grado de n es 3.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 - 6n + 1}}{7n^3 - 7} &= \frac{\sqrt{n^2 - 6n + 1}}{7n^3 - 7} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{7n^3 - 7} = \frac{\sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 6n + 1}{n^6}}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^3 - 7}{n^3}} = \frac{0}{7} = 0 \end{aligned}$$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{2n^2 + n + 7}}{8n - 1} \rightarrow \frac{+\infty}{+\infty}$

El mayor grado de n es 1.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{2n^2 + n + 7}}{8n - 1} &= \frac{\sqrt[3]{2n^2 + n + 7}}{8n - 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{8n - 1} = \frac{\sqrt[3]{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n + 7}{n^3}}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n - 1}{n}} = \frac{0}{8} = 0 \end{aligned}$$

35 Halla el valor de los siguientes límites.

a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 + 16}$

b) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{5x - 9}{2x^2 + 6x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{3x^2 + x}$

a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 + 16} = 0$

b) $\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{5x - 9}{2x^2 + 6x} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{5x - 9}{2x^2 + 6x} &= +\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow$
 $\rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{5x - 9}{2x^2 + 6x}.$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{3x^2 + x} = \sqrt{14}$

36 Determina los siguientes límites.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x - 2}$

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} \rightarrow \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} = 0$$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x - 2} \rightarrow \frac{0}{0}$

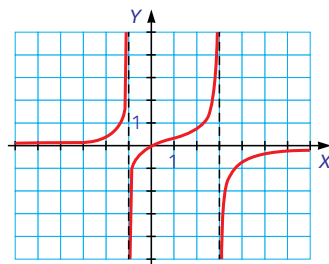
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x - 2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} = \frac{2}{3}$$

37 Representa la gráfica de una función que corta a los ejes en el origen de coordenadas, siempre es creciente, tiene asíntotas verticales en $x = -1$ y $x = 3$ y una asíntota horizontal en $y = 0$.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$f(x) = -\frac{x}{x^2 - 2x - 3}$$



38 Halla las ramas infinitas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \frac{3x^4 - 2x^2 + 5x - 1}{1 - x}$

b) $f(x) = \frac{5x + x^2 - 3}{4 + 3x}$

c) $f(x) = \frac{2x^4 + 3x}{1 - x^2}$

d) $f(x) = \frac{5 - 2x - x^3}{1 - x}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 - 2x^2 + 5x - 1}{1 - x} = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 - 2x^2 + 5x - 1}{1 - x} = +\infty$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x + x^2 - 3}{4 + 3x} = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + x^2 - 3}{4 + 3x} = -\infty$$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 + 3x}{1 - x^2} = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 + 3x}{1 - x^2} = -\infty$$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - 2x - x^3}{1 - x} = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5 - 2x - x^3}{1 - x} = +\infty$$

39 Halla las asíntotas horizontales y oblicuas de estas funciones.

a) $f(x) = \frac{2x^4 + 3x}{1 - x^2}$

b) $f(x) = \frac{x^2 - 3}{-3x}$

c) $f(x) = \frac{2x - x^3}{x^2 - 1}$

$$d) f(x) = \frac{3x-1}{x^2-5x}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 3x}{1 - x^2} = -\infty \rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ no tiene asíntotas horizontales ni oblicuas.

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3}{-3x^2} = -\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[f(x) + \frac{1}{3}x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3}{-3x} + \frac{1}{3}x = 0$$

$f(x)$ tiene la asíntota oblicua $y = -\frac{1}{3}x$.

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - x^3}{x^3 - x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - x^3}{x^2 - 1} + x = 0$$

$f(x)$ tiene la asíntota oblicua $y = -x$.

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-1}{x^2-5x} = 0 \rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.

40 Calcula estos límites.

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2x}{x^2 - 1} \right)^{3x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-1}{5+2x} \right)^{x^2-3}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1-x^2}{-x^2+2} \right)^{3x}$$

Todos son límites con la indeterminación 1^∞ .

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2x}{x^2-1} \right)^{3x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{x^2-1}{2x}} \right)^{\frac{x^2-1}{2x} \cdot 3x} \right) = e^6$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-1}{5+2x} \right)^{x^2-3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{-\frac{5+2x}{6}} \right)^{-\frac{5+2x}{6} \cdot \frac{6}{5+2x} \cdot (x^2-3)} \right) =$$

$$= e^{-\infty} = 0$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1-x^2}{-x^2+2} \right)^{3x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{x^2-2} \right)^{x^2-2} \right)^{\frac{1}{x^2-2} \cdot 3x} = e^0 = 1$$

41 Estudia la continuidad de estas funciones y determina los tipos de discontinuidad que presentan.

$$a) f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{1}{x-2} & \text{si } 2 < x < 3 \\ 2x - 5 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \leq 0 \\ 3x & \text{si } 0 < x < 2 \\ \frac{1}{x-4} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$a) \text{Dom } f = \mathbb{R}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= +\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

y $f(x)$ no es continua en $x = 2$.

La discontinuidad en $x = 2$ es de salto infinito. La función tiene una asíntota vertical en $x = 2$.

$$f(3) = 1$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow f(x) \text{ es continua en } x = 3.$$

$$b) \text{Dom } f = [0, +\infty) - \{4\}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &\rightarrow \text{No existe.} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ no es continua en $x = 0$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= 6 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

y $f(x)$ no es continua en $x = 2$.

La discontinuidad en $x = 2$ es de salto finito.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= +\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 4} f(x)$$

y $f(x)$ no es continua en $x = 4$.

La discontinuidad en $x = 4$ es de salto infinito. La función tiene una asíntota vertical en $x = 4$.

- 42 Halla el valor de k para que estas funciones sean continuas.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < 1 \\ -kx^2 + 2x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{3-k}{x-2} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

- a) $f(x)$ es continua en $x = 1$ si $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = -k + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -k + 1 \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow -k + 1 = -1 \rightarrow k = 2$$

- b) $f(x)$ es continua en $x = 0$ si $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{3-k}{-2} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1 \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{3-k}{-2} = -1 \rightarrow k = 1$$

ACTIVIDADES FINALES

1. Comprende el concepto de límite y resuelve indeterminaciones

Sucesiones. Límites



ACTIVIDADES FLASH

- 43 Halla el término general de las sucesiones.

a) $1, -1, 1, -1, \dots$

b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

c) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

d) $1, 2, 4, 8, \dots$

e) $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \dots$

f) $1, \frac{4}{3}, \frac{9}{5}, \frac{16}{7}, \dots$

a) $a_n = (-1)^{n+1}$ o también $a_n = (-1)^{n-1}$

b) $a_n = \frac{n}{n+1}$

c) $a_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$

d) $a_n = 2^{n-1}$

e) $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

f) $a_n = \frac{n^2}{2n-1}$

- 44 Con ayuda de la calculadora, halla el límite de esta sucesión definida de forma recurrente.

$$a_1 = 1 \quad a_n = \frac{3a_{n-1} + 2}{4a_{n-1} + 3}$$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = \frac{5}{7} = 0,71428\dots$$

$$a_3 = \frac{29}{41} = 0,70731\dots$$

$$a_4 = \frac{169}{239} = 0,70711\dots$$

$$a_5 = \frac{985}{1393} = 0,707106\dots$$

Los términos de la sucesión se

aproximan a: $\sqrt{\frac{1}{2}} = 0,7071\dots$

- 45 Copia y completa la siguiente tabla

siendo $a_n = \frac{3n-1}{6n+5}$.

n	1	10	100	1000	10000
a_n					

¿Cuál es $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$?

n	1	10	100	1000	10000
a_n	0,1818	0,4462	0,4942	0,4994	0,4999

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$$

46 Realiza los siguientes límites de sucesiones.

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^6 + 1}{5n^4 + 3n^3 + 2n - 1}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n^3 + 2n - 5n^2}{2n^3 - 3n^2 + 6n - 1}$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 5n^4 + 2n - 1}{3n - 2n^3 + 5 - n^4}$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^5 + n^3 - n^4}{1 - 4n - n^5}$$

$$e) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(4n^2 - 1)}{n + n^2 - 2n^3}$$

$$f) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^4 + 4n^3 + 2)n^2}{n^5 + 3n^4 + 4}$$

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^6 + 1}{5n^4 + 3n^3 + 2n - 1} = +\infty$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n^3 + 2n - 5n^2}{2n^3 - 3n^2 + 6n - 1} = -\frac{1}{2}$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 5n^4 + 2n - 1}{3n - 2n^3 + 5 - n^4} = 5$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^5 + n^3 - n^4}{1 - 4n - n^5} = -3$$

$$e) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(4n^2 - 1)}{n + n^2 - 2n^3} = -2$$

$$f) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^4 + 4n^3 + 2)n^2}{n^5 + 3n^4 + 4} = +\infty$$

47 Obtén los resultados de los siguientes límites.

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 + n - 3}}{3n + 1}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^2 + 3n + 2}{\sqrt{n^3 + 2n^4}}$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5 - 2n + 6n^3}}{n^2 - n - 6}$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 3n^2 + 1}{\sqrt{3(n^4 + n + 1)}}$$

$$e) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + \sqrt{1 + n^2}}{3n + 5}$$

$$f) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 - 3n + 2}}{n^2 + 5}$$

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 + n - 3}}{3n + 1} \rightarrow \frac{+\infty}{+\infty}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 + n - 3}}{3n + 1} = \frac{2}{3}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^2 + 3n + 2}{\sqrt{n^3 + 2n^4}} \rightarrow \frac{+\infty}{+\infty}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^2 + 3n + 2}{\sqrt{n^3 + 2n^4}} = 4\sqrt{2}$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5 - 2n + 6n^3}}{n^2 - n - 6} \rightarrow \frac{+\infty}{+\infty}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5 - 2n + 6n^3}}{n^2 - n - 6} = 0$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 3n^2 + 1}{\sqrt{3(n^4 + n + 1)}} \rightarrow \frac{+\infty}{+\infty}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 3n^2 + 1}{\sqrt{3(n^4 + n + 1)}} = \sqrt{3}$$

$$e) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + \sqrt{1 + n^2}}{3n + 5} \rightarrow \frac{+\infty}{+\infty}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + \sqrt{1 + n^2}}{3n + 5} = 1$$

$$f) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 - 3n + 2}}{n^2 + 5} \rightarrow \frac{+\infty}{+\infty}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 - 3n + 2}}{n^2 + 5} = 0$$

48 Halla los siguientes límites de estas sucesiones.

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + n}{n} - \frac{5n^2}{n + 1} \right)$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - n}{n + 1} + \frac{3 - n^2}{n} \right)$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2}{n - 5} + \frac{-2n^3}{n + 3} \right)$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^3 + 4n}{2n} - \frac{4n^2}{7n^3} \right)$$

$$e) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n^2 + 4n}{3n} - \frac{4n^3}{2n^2} \right)$$

$$f) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-7n^2 + 4}{2 - n^3} + \frac{5n^3 + n}{3 - n^4} \right)$$

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + n}{n} - \frac{5n^2}{n + 1} \right) \rightarrow \infty - \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + n}{n} - \frac{5n^2}{n+1} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4n^2 + 2n + 1}{n+1} = -\infty$$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - n}{n+1} + \frac{3 - n^2}{n} \right) \rightarrow \infty - \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - n}{n+1} + \frac{3 - n^2}{n} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^2 + 3n + 3}{n^2 + n} = -2$$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2}{n-5} + \frac{-2n^3}{n+3} \right) \rightarrow \infty - \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2}{n-5} + \frac{-2n^3}{n+3} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^4 + 13n^3 + 9n^2}{n^2 - 2n - 15} = -\infty$$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^3 + 4n}{2n} - \frac{4n^2}{7n^3} \right) \rightarrow \infty - \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^3 + 4n}{2n} - \frac{4n^2}{7n^3} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + 4n}{2n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2}{7n^3} =$$

$$= +\infty - 0 = +\infty$$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n^2 + 4n}{3n} - \frac{4n^3}{2n^2} \right) \rightarrow \infty - \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n^2 + 4n}{3n} - \frac{4n^3}{2n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-7n^2 + 4}{2 - n^3} + \frac{5n^3 + n}{3 - n^4} \right) \rightarrow \infty - \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-7n^2 + 4}{2 - n^3} + \frac{5n^3 + n}{3 - n^4} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-7n^2 + 4}{2 - n^3} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 + n}{3 - n^4} =$$

$$= 0 + 0 = 0$$

49 **INVENTA.** Escribe una sucesión que tenga este límite.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 5$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{2}{3}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $a_n = \frac{1}{n} + 5$

b) $a_n = \frac{2n}{3n}$

c) $a_n = \frac{-\sqrt{3n^2}}{2n}$

50 Determina el valor de estos límites.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 + 4n - 1})$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + n + 31} - 3n)$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (4n - \sqrt{16n^2 + 2})$

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 + 4n - 1}) \rightarrow \infty - \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 + 4n - 1}) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4n + 1}{n + \sqrt{n^2 + 4n - 1}} = -2$$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + n + 31} - 3n) \rightarrow \infty - \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + n + 31} - 3n) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-5n^2 + n + 31}{\sqrt{4n^2 + n + 31} + 3n} = -\infty$$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (4n - \sqrt{16n^2 + 2}) \rightarrow \infty - \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (4n - \sqrt{16n^2 + 2}) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2}{4n + \sqrt{16n^2 + 2}} = 0$$

51 Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n+3} \right)^{n-1}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-3}{2n+1} \right)^{n^2+1}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2+1} \right)^n$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{n}{n+1} \right)^n$

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n+3} \right)^{n-1} \rightarrow 1^\infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n+3} \right)^{n-1} = e^{\frac{1}{2}}$$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-3}{2n+1} \right)^{n^2+1} \rightarrow 1^\infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-3}{2n+1} \right)^{n^2+1} = 0$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2+1} \right)^n \rightarrow 1^\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2+1} \right)^n = 1$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{n}{n+1} \right)^n \rightarrow 1^\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{n}{n+1} \right)^n = e$$

52 INVESTIGA. Resuelve el siguiente límite.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2} (2 + 4 + \dots + 2n)$$

$$2 + 4 + \dots + 2n = 2(1 + 2 + \dots + n) =$$

$$= 2 \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1) \rightarrow$$

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2} (2 + 4 + \dots + 2n) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n(n+1)}{n^2} = 3$$



ACTIVIDADES FLASH

53 Calcula.

••• a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x^2)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 + 2x^3 + x^2 - 17x)$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^4 + 8x^3 - 3x^2 + 27x - 42)$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - 3x^3 + 5x^2 - 6x)$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (6x^3 + x^2)$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 + 4x^3 + 7x^2 - 12x + 1)$

g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^3 - 3x^2 - 16x + 3)$

h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (7 - 12x + 3x^2 + 9x^3)$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^4) = (-2) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 =$
 $= (-2) \cdot (+\infty) = -\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^3) = (-3) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 =$
 $= (-3) \cdot (+\infty) = -\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (6x^3) = 6 \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 =$
 $= 6 \cdot (-\infty) = -\infty$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4) = +\infty$

g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^3) = 5 \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) =$
 $= 5 \cdot (-\infty) = -\infty$

h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (9x^3) = 9 \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) =$
 $= 9 \cdot (-\infty) = -\infty$

54 Determina el valor de estos límites.

••• a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + x - |x|^3)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 2x^4 + |x^3|)$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x^3 - |x^4|)$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 + x - 3|x^2|)$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x - |x| + 3)$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - |x| + 3)$

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-|x|^3) = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^4) = (-2) \cdot (+\infty) = -\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-|x^4|) = (-1) \cdot (+\infty) = -\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2) = (-1) \cdot (+\infty) = -\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x - |x| + 3) = 3$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - |x| + 3) = 2 \cdot (-\infty) = -\infty$

55 Calcula los límites y comprueba el resultado con la calculadora.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 6x + 3}{x^2 - 3x + 5}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 6x^3 - x + 1}{4x^2 + 5x - 2}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 + 3x - 1}{6x^2 - 3x^3 + x}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + x - 12}{x^2 - x^3 + 2}$

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 6x + 3}{x^2 - 3x + 5} = 2$
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 6x^3 - x + 1}{4x^2 + 5x - 2} = -\infty$
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 + 3x - 1}{6x^2 - 3x^3 + x} = -\frac{5}{3}$
- d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + x - 12}{x^2 - x^3 + 2} = 0$

56 Calcula los límites siguientes.

•••

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5x + 3}{2 - x^3 + x^2}$
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(x^3 - 4 + x)}{-7 + 4x^4 + x^3}$
- c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(7 + 7x + 7x^3)x^2}{x^2(x^2 - 4x^3) - 2x^5}$
- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5x + 3}{2 - x^3 + x^2} = 0$
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(x^3 - 4 + x)}{-7 + 4x^4 + x^3} = \frac{1}{4}$
- c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(7 + 7x + 7x^3)x^2}{x^2(x^2 - 4x^3) - 2x^5} = \frac{-7}{6}$

57 Determina el valor de los siguientes límites.

•••

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 3}}{5x - 1}$
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 2x - 1}{\sqrt{3x^4 - 3x^3 + 1}}$
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 - 2}{\sqrt{3x^2 + 2}}$
- d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2}{\sqrt{x^5 - 7x + 1}}$
- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 3}}{5x - 1} = \frac{\sqrt{2}}{5}$
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 2x - 1}{\sqrt{3x^4 - 3x^3 + 1}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 - 2}{\sqrt{3x^2 + 2}} = +\infty$
- d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2}{\sqrt{x^5 - 7x + 1}} = 0$

58 Obtén los resultados de estos límites.

•••

- a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{-3x + 6x^2}}{x^2 + 2}$
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^4 + 5x^3 - 2x^2}}{3x - 1}$
- a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{-3x + 6x^2}}{x^2 + 2} = 0$
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^4 + 5x^3 - 2x^2}}{3x - 1} = -\infty$

59 Calcula el valor de los siguientes límites.

•••

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2}{2x + 1} - \frac{x^3}{x^2 + 1} \right)$
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5x^2 + 1}{x} + \frac{3 - x^2}{x + 2} \right)$
- c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 2x} - \frac{2x^2 + 1}{2x - 4} \right)$
- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2}{2x + 1} - \frac{x^3}{x^2 + 1} \right) \rightarrow \infty - \infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2}{2x + 1} - \frac{x^3}{x^2 + 1} \right) = -\frac{1}{2}$
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5x^2 + 1}{x} + \frac{3 - x^2}{x^2 + 2} \right) \rightarrow \infty - \infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5x^2 + 1}{x} + \frac{3 - x^2}{x^2 + 2} \right) = -\infty$
- c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 2x} - \frac{2x^2 + 1}{2x - 4} \right) \rightarrow \infty - \infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 2x} - \frac{2x^2 + 1}{2x - 4} \right) = 0$

60 Halla los siguientes límites.

•••

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - 1}{3x + 2} \right)^{x^2}$
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x + 2}{x} \right)^{3x - 2}$
- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - 1}{3x + 2} \right)^{x^2} = 0$
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x + 2}{x} \right)^{3x - 2} \rightarrow 1^\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x + 2}{x} \right)^{3x - 2} = e^6$

- 61 **INVENTA.** Escribe, en cada caso, un polinomio, $P(x)$, para obtener los resultados indicados para este límite.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^2 + 6x - 1}{P(x)}$$

- a) 4 b) 0 c) $+\infty$ d) $-\infty$ e) 1

Respuesta abierta. Por ejemplo:

- a) $P(x) = 2x^2$
 b) $P(x) = x^3$
 c) $P(x) = 2x$
 d) $P(x) = -x$
 e) $P(x) = 8x^2$

- 62 Calcula el valor de los siguientes límites.

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 4x})$
 b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 6} - x)$
 c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 - x})$
 d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2 - 3})$
 e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x + 4})$

Todos son límites con la indeterminación $\infty - \infty$.

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - (x^2 + 4x)}{x + \sqrt{x^2 + 4x}} =$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x}{x + \sqrt{x^2 + 4x}} = -2$
 b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{\sqrt{x^2 + 6} + x} = 0$
 c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - (x^2 - x)}{x + \sqrt{x^2 - x}} =$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x + \sqrt{x^2 + 4x}} = \frac{1}{2}$
 d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7}{\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 - 3}} = 0$
 e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3}{\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 2x + 4}} =$
 $= 0$

- 63 **RETO.** ¿Cuál es el resultado de esta operación?

$$\frac{2}{2 - \frac{2}{2 - \frac{2}{2 - \frac{2}{2 - \dots}}}}$$

Se trata de resolver esta ecuación de segundo grado.

$$\frac{2}{2 - x} = x \rightarrow -x^2 + 2x - 2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + i \\ x_2 = 1 - i \end{cases}$$

- 64 **INVENTA.** Sean f y g dos funciones continuas que cumplen

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

$$\text{y } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty.$$

- a) Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \circ g)(x)$.
 b) Escribe dos posibles ecuaciones para f y g .
 c) Calcula $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f \circ g)(x)$.

a) $f\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)\right) = f(-\infty) = 2$

- b) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x-1}{x} & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$g(x) = -x$$

c) $f\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)\right) = f(+\infty) = +\infty$

- 65 **MATEMÁTICAS Y... ECOLOGÍA.**

- El estudio de las poblaciones de animales y plantas es fundamental para el análisis de los ecosistemas. Para estudiar la distribución de estas poblaciones se establecen modelos que simulan su evolución.

En una finca se ha estimado que la población de conejos se puede calcular

mediante la fórmula $z = 100 \frac{6t^2 + 3}{2 + t^2}$

donde t es el tiempo transcurrido, en meses, desde el inicio de las observaciones.

- a) ¿Cuántos conejos había al inicio?
 b) ¿Cuántos había a los 2 meses?
 ¿Y a los 6 meses?
 c) ¿El crecimiento de la población será indefinido, tenderá a disminuir o a estabilizarse?

a) Si $t = 0 \rightarrow z = 150$

Al inicio había 150 conejos.

b) Para $t = 2 \rightarrow z = 450$

Habrán 450 conejos a los dos meses.

Para $t = 6 \rightarrow z = 576$

Habrán 576 conejos a los seis meses.

c) $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(100 \frac{6t^2 + 3}{2 + t^2} \right) = 600$

Pasado un tiempo la población se estabilizará en alrededor 600 conejos, aproximadamente.

INTERNET

66 MATEMÁTICAS E... HISTORIA.

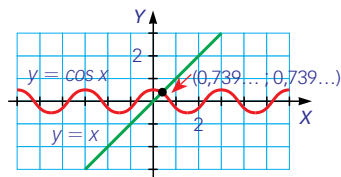
●○○○ Escribe un número en tu calculadora y calcula su coseno. Calcula el coseno del número que obtienes, y así sucesivamente. Hazlo muchas veces y anota le número que obtienes. Después introduce otro número y repite la operación. ¿El último número que obtienes se parece al anterior? Hazlo para varios números más, positivos, negativos, racionales o irracionales.

Con este resultado halla $\lim_{x \rightarrow \infty} s_n$
 si $s_n = \cos(s_{n-1})$.

A este número se le conoce como el número de Dottie. Se le conoce así porque una catedrática de francés llamada Dottie se dio cuenta de que pulsando sucesivamente la tecla del cos en una calculadora llegaba siempre al mismo número. Preguntó el motivo a su marido, matemático, y fue él quien demostró que es la única raíz real de la ecuación $x = \cos x$. Comprueba este resultado.

$s_n = \cos(s_{n-1}) \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0,739085...$

La solución gráfica de $x = \cos x$ es la siguiente.



Límite de una función en un punto

ACTIVIDADES FLASH

- 67 Usa la calculadora y completa la tabla para comprobar que si $f(x) = \frac{x^2}{x-3}$, entonces $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -0,5$.

x	0	0,9	0,99	0,999	1,001	1,01	1,1
f(x)	0	-0,38	-0,48	-0,49	-0,501	-0,51	-0,63

- 68 Utiliza la calculadora y haz una tabla para calcular el límite cuando x tiende a 2 de $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - x - 2}$.

x	0	1,9	1,99	1,999
f(x)	4	2,03448	2,00334	2,00033

x	2,001	2,01	2,1
f(x)	1,99966	1,99667	1,96774

Por tanto, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - x - 2} = 2$.

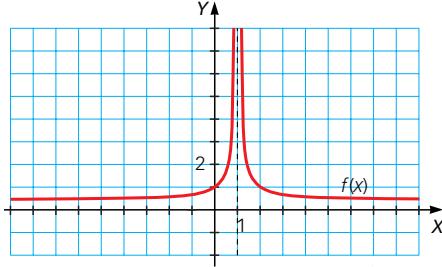
- 69 Determina los límites indicados para esta función.

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$
 b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ d) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
 a) $\lim_{x \rightarrow 0} (x - 1) = -1$
 b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 1) = 0$
 c) $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 1) = 2$
 d) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1) = 5$

- 70 Observa la gráfica de esta función y calcula los límites.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

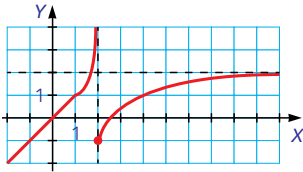


- a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$
 b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$
 c) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$
 d) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$

- 71 **INVENTA.** Dibuja una función $f(x)$ que cumpla las siguientes condiciones.

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -1 & \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty \\ f(2) = 3 \end{array}$$

Respuesta abierta. Por ejemplo:



ACTIVIDADES FLASH

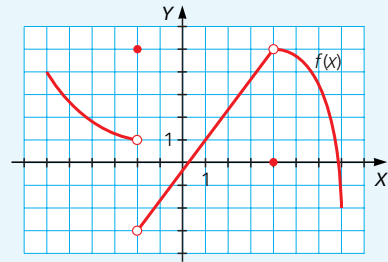
- 72 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 4, \\ 3 & \text{si } x > 4 \end{cases} \text{ calcula.}$$

- a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$
 b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
 c) $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$
 d) $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$

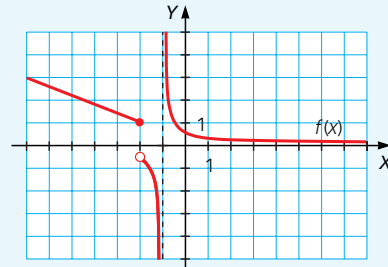
- a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2) = 0$
 b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$
 c) $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \sqrt{x} = 2$
 d) $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} 3 = 3$

- 73 Observa la gráfica y halla los siguientes límites.



- a) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$
 b) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$
 c) $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$
 d) $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$
 a) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 1$
 b) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -3$
 c) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 5$
 d) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 5$

- 74 Teniendo en cuenta la gráfica, calcula estos límites.



- a) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$
 b) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$
 c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
 d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
 a) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 1$
 b) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\frac{1}{2}$
 c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
 d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

- 75 Dada la función $f(x)$ encuentra los siguientes límites.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < -2 \\ \frac{9}{x-1} & \text{si } -2 \leq x < 3 \\ x^2 + 6x - 32 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

- a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ e) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$
 b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ f) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$
 c) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$ g) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$
 d) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ h) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

- a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
 b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
 c) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -3$
 d) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -3$
 e) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -3$
 f) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \frac{9}{2}$
 g) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -5$
 h) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \rightarrow \text{No existe.}$

- 76 **INVENTA.** Escribe la ecuación de una función definida a trozos, definida en todos los números reales, tal que:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

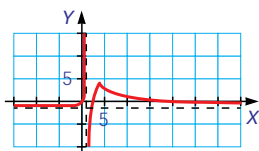
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 4$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{x-1} & \text{si } x < 1 \\ \frac{12}{1-x} + 8 & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \\ \frac{-x+20}{x} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$



- 77 Determina los límites, calculando previamente los límites laterales correspondientes.

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x - 5}$ d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4 - 2x}{x^2 - 2x}$
 b) $\lim_{x \rightarrow 3} (1 + 2x)^x$ e) $\lim_{x \rightarrow 2} \ln\left(\frac{x+1}{3}\right)$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{x^2 - 2x + 3}{x + 1}}$ f) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{5}{\sqrt{4+x}}$

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x - 5} = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} (1 + 2x)^x = 343$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{x^2 - 2x + 3}{x + 1}} = \sqrt{3}$

d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4 - 2x}{x^2 - 2x} = 2$

e) $\lim_{x \rightarrow 2} \ln\left(\frac{x+1}{3}\right) = 0$

f) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{5}{\sqrt{4+x}} = 5$

- 78 Halla estos límites.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + 1}{x^2 + 2x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 + 2x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 1}{x^2 - 1}$

d) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x}$

e) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 4}{x^2 + 2x + 1}$

f) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 4}{x^2 + 2x}$

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + 1}{x^2 + 2x} \rightarrow \frac{1}{0}$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x + 1}{x^2 + 2x} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x + 1}{x^2 + 2x} &= +\infty \end{aligned} \right\}$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 + 2x} \rightarrow \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(x+2)} = \frac{1}{2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+1}{x^2-1} = -1$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x^2+2x} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x^2+2x} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-2)(x+2)}{x(x+2)} = 2$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+4}{x^2+2x+1} = 2$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+4}{x^2+2x} \rightarrow \frac{8}{0}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2+4}{x^2+2x} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2+4}{x^2+2x} &= -\infty \end{aligned} \right\}$$

79 Resuelve los siguientes límites.

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2+x-2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-6x+9}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -4} \frac{3x^3+12x^2-x-4}{x^3+7x^2+14x+8}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3-9x^2+15x+25}{x^3-5x^2+2x-10}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^3-3x^2}{2x^3-x^2+3x}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-3x+2}{x^3-2x^2-x+2}$$

Todos son límites con la indeterminación $\frac{0}{0}$.

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2+x-2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{2}{3}$$

$$b) \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} &= +\infty \end{aligned} \right\}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -4} \frac{3x^3+12x^2-x-4}{x^3+7x^2+14x+8} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{(3x^2-1)(x+4)}{(x+1)(x+2)(x+4)} = \frac{47}{6}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3-9x^2+15x+25}{x^3-5x^2+2x-10} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x+1)(x-5)^2}{(x^2+2)(x-5)} = 0$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^3-3x^2}{2x^3-x^2+3x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(5x-3)}{x(2x^2-x+3)} = 0$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-3x+2}{x^3-2x^2-x+2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x+1)} = \frac{1}{2}$$

80 Calcula estos límites.

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x-3}-1}{x^2-16}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1}{\sqrt{2x}-2}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-3x-4}{\sqrt{2x}+1-3}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x-3}-1}{x^2-16} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x-3}-1}{x^2-16} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{(x+4)(\sqrt{x-3}+1)} = \frac{1}{16}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x^2 - 4} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x^2 - 4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} = \frac{1}{6}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 1}{\sqrt{2x} - 2} \rightarrow \frac{1}{0}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 1}{\sqrt{2x} - 2} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 1}{\sqrt{2x} - 2} &\rightarrow \text{No existe.} \end{aligned} \right\}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 3x - 4}{\sqrt{2x} + 1 - 3} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 3x - 4}{\sqrt{2x} + 1 - 3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x + 1)(\sqrt{2x} + 1 + 3)}{2} = 15$$

81 Halla los siguientes límites.

•••

$$a) \lim_{x \rightarrow \pi} \cos x$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \operatorname{sen} x$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow \pi} \cos x = -1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \rightarrow \frac{1}{0}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x &= -\infty \end{aligned} \right\}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \operatorname{sen} x = -1$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \rightarrow -\frac{1}{0}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} &= +\infty \end{aligned} \right\}$$

82 **INVESTIGA.** Calcula el valor de los siguientes límites.

•••

$$a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow b} \frac{\sqrt{x + b} - \sqrt{b}}{x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow c} \frac{(x^3 + 2x) - (c^3 + 2a)}{x - c}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -d} \frac{x^2 + (d - 4)x - 4d}{x^2 + (d - 1)x - d}$$

a) • Si $a \neq 0$:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{\sqrt{a}}{2a}$$

• Si $a = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{x} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow \frac{1}{0}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x}}{x} &\rightarrow \text{No existe.} \end{aligned} \right\}$$

b) • Si $b \neq 0$:

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{\sqrt{x + b} - \sqrt{b}}{x} = \frac{\sqrt{2b} - \sqrt{b}}{b} =$$

$$= (\sqrt{2} - 1) \frac{\sqrt{b}}{b}$$

• Si $b = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = +\infty$$

c) • Si $c \neq a$ y $c \neq 0$:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{(x^3 + 2x) - (c^3 + 2a)}{x - c} \rightarrow \frac{2(c - a)}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{(x^3 + 2x) - (c^3 + 2a)}{x - c} = \infty$$

• Si $c \neq a$ y $c = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^3 + 2x) - 2a}{x} \rightarrow \frac{-2a}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^3 + 2x) - 2a}{x} = \infty$$

- Si $c = a$ y $c \neq 0$:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{(x^3 + 2x) - (c^3 + 2c)}{x - c} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c} \frac{(x^3 + 2x) - (c^3 + 2c)}{x - c} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{(x - c)(x^2 + cx + 2 + c^2)}{x - c} = \\ &= 3c^2 + 2 \end{aligned}$$

- Si $c = a$ y $c = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x}{x} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 2) = 2$$

- d) • Si $d \neq 0$:

$$\lim_{x \rightarrow -d} \frac{x^2 + (d - 4)x - 4d}{x^2 + (d - 1)x - d} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -d} \frac{x^2 + (d - 4)x - 4d}{x^2 + (d - 1)x - d} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow -d} \frac{(x + d)(x - 4)}{(x + d)(x - 1)} = \frac{d + 4}{d + 1} \end{aligned}$$

- Si $d = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - x} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x - 4)}{x(x - 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 4}{x - 1} = 4 \end{aligned}$$

- 83** ●●● Calcula el límite que aparece a continuación.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x + 3} - 2x}{\sqrt{x} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x + 3} - 2x}{\sqrt{x} - 1} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x + 3} - 2x}{\sqrt{x} - 1} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} + 1)(x + 3 - 4x^2)}{(x - 1)(\sqrt{x + 3} + 2x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x + 3} + 2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 3 - 4x^2}{x - 1} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(-4x - 3)}{x - 1} = -\frac{7}{2}$$

- 84** ●●● Halla estos límites.

a) $\lim_{x \rightarrow \pi} \sqrt{\cos x - 3 \sin x}$

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^3 x \cdot \cos^3 x$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\sec^2 x - 1}}{\sec x \cdot \sin x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 x + \sin^2 x}{\operatorname{tg}^2 x}$

a) $\lim_{x \rightarrow \pi} \sqrt{\cos x - 3 \sin x} \rightarrow$ No existe.

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^3 x \cdot \cos^3 x \rightarrow \infty \cdot 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^3 x \cdot \cos^3 x &= \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \cdot \cos^3 x = \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin^3 x = 1 \end{aligned}$$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\sec^2 x - 1}}{\sec x \cdot \sin x} \rightarrow \frac{0}{0}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\sec^2 x - 1}}{\sec x \cdot \sin x} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}}{\frac{1}{\cos x} \cdot \sin x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x \cdot \sin x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin x} = 1 \end{aligned}$$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 x + \sin^2 x}{\operatorname{tg}^2 x} \rightarrow \frac{0}{0}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 x + \sin^2 x}{\operatorname{tg}^2 x} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \sin^2 x}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{sen}^4 x + \cos^2 x \cdot \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) = 1 \end{aligned}$$

85 RETO. Calcula el siguiente límite.

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{x - 2} \\ &\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{x - 2} \rightarrow \frac{0}{0} \\ &\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{2^2}}{(x - 2)(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{(x - 2)(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2})^2} = \frac{\sqrt[3]{2}}{8} \end{aligned}$$

86 Halla el valor de estos límites.

$$\begin{aligned} \text{a) } &\lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{x+2}{x-3} \right)^{2x+1} \\ \text{b) } &\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x-4}{6x+5} \right)^x \\ \text{c) } &\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{5x-4}{2x+5} \right)^{1-6x} \\ \text{d) } &\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x-1}{4x+2} \right)^{\frac{3x^2}{2x+1}} \\ \text{a) } &\lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{x+2}{x-3} \right)^{2x+1} = \left(\frac{7}{2} \right)^{11} \\ \text{b) } &\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x-4}{6x+5} \right)^x = 0 \\ \text{c) } &\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{5x-4}{2x+5} \right)^{1-6x} = 7^5 = 16\,807 \\ \text{d) } &\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x-1}{4x+2} \right)^{\frac{3x^2}{2x+1}} = 1^{+\infty} \\ &\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x-1}{4x+2} \right)^{\frac{3x^2}{2x+1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{4x+2}{4x-1}} \right)^{\frac{-3(3x^2)}{(2x+1)(4x+2)}} = e^{-\frac{9}{8}} \end{aligned}$$

2. Determina la tendencia de una función a partir del cálculo de límites

Ramas infinitas. Asintotas

ACTIVIDADES FLASH

87 Cierta función $f(x)$ cumple que:

- • $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 1$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$

Indica tres asíntotas de $f(x)$.

La función dada tiene la asíntota horizontal $y = 3$, la asíntota vertical $x = 1$ y la asíntota oblicua $y = 2x + 1$.

88 Encuentra el límite de la función cuando x tiende a 0 y cuando x tiende a 3.

$$f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 3x^2}$$

Especifica el valor de los límites laterales si resulta necesario.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^3 - 3x^2} &\rightarrow \frac{0}{0} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^3 - 3x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x - 3} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4}{x^3 - 3x^2} &\rightarrow \frac{81}{0} \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^4}{x^3 - 3x^2} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^4}{x^3 - 3x^2} &= +\infty \end{aligned} \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^4}{x^3 - 3x^2}} \right\} \rightarrow$$

$\rightarrow$ No existe $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

89 Observa las tablas de valores de la función.

$$f(x) = \frac{4x^2 - 5x}{2x^2 + 7}$$

x	1	10	100	1000	10000
$f(x)$	-0,11	1,69	1,974	1,9975	1,99975

x	-1	-10	-100	-1000	-10000
f(x)	1	2,17	2,024	2,0025	2,00025

¿Es cierto que $y = 2$ es una asíntota?
 Cuando x tiende a $+\infty$, ¿está la función por encima o por debajo de la asíntota?
 ¿Qué sucede cuando x tiende a $-\infty$?

Sí, es cierto que $y = 2$ es una asíntota horizontal.

Cuando x tiende a $+\infty$, la función está por debajo de la asíntota.

Cuando x tiende a $-\infty$, la función está por encima de la asíntota.

90 INVESTIGA. Sea

...

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, si x es racional.

$f(x) = 0$, si x es irracional.

Por tanto, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

91 Realiza una tabla como la de la actividad anterior y decide si la recta $y = -3$ es asíntota horizontal de la función

...

$$f(x) = \frac{2 - 3x}{x + 1}.$$

¿La función está por encima o por debajo de la asíntota?

x	1	10	100	1000	10000
f(x)	-0,5	-2,5455	-2,9505	-2,9950	-2,9995

x	-2	-10	-100	-1000	-10000
f(x)	-2,6666	-3,5556	-3,0505	-3,0050	-3,0005

Sí, es cierto que $y = -3$ es una asíntota horizontal.

Cuando x tiende a $+\infty$, la función está por encima de la asíntota.

Cuando x tiende a $-\infty$, la función está por debajo de la asíntota.

92 Decide si estas funciones están acotadas en el intervalo $[6, +\infty)$.

...

a) $f(x) = x \operatorname{sen} x$ c) $f(x) = 5 - x^2$

b) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ d) $f(x) = \frac{x+5}{x-5}$

- a) La función no está acotada.
 b) La función está acotada inferiormente en el extremo $x = 6$.
 c) La función está acotada superiormente en el extremo $x = 6$.
 d) La función está acotada superiormente en el extremo $x = 6$.

93 INVENTA. Escribe una función tal que su dominio sea $\mathbb{R} - \{3\}$ y tal que

...

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty.$$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$f(x) = \frac{1}{x-3}$$

94 Halla las asíntotas horizontales y verticales de las siguientes funciones.

...

a) $f(x) = \frac{x}{x+3}$ d) $f(x) = \frac{3x-1}{x^2-3}$

b) $f(x) = \frac{2}{x^2-1}$ e) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$

c) $f(x) = \frac{-x+5}{-4-x^2}$ f) $f(x) = \frac{2x^2}{x^2+1}$

a) $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \{-3\}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = -3$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+3} = 1 \rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y = 1$.

b) $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = -1$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow$$

→ $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2 - 1} = 0 \rightarrow$$

→ $f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.

- c) $\text{Dom } f = \mathbb{R} \rightarrow f(x)$ no tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x + 5}{-4 - x^2} = 0 \rightarrow$$

→ $f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.

- d) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow$$

→ $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = -\sqrt{3}$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow$$

→ $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = \sqrt{3}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 1}{x^2 - 3} = 0 \rightarrow$$

→ $f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.

- e) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow$$

→ $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = -2$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow$$

→ $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 1}{x^2 - 4} = 0 \rightarrow$$

→ $f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.

- f) $\text{Dom } f = \mathbb{R} \rightarrow f(x)$ no tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = 2 \rightarrow$$

→ $f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y = 2$.

- 95 ●●○ Determina las asíntotas oblicuas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \frac{x^2 + 5x}{x + 2}$

b) $f(x) = \frac{2x^2 - 4}{x - 1}$

c) $f(x) = \frac{x^2 + 5}{2x - 3}$

d) $f(x) = \frac{5x^3 + 1}{4x^2}$

e) $f(x) = \frac{5 - 3x^3}{2x^2 + 8}$

f) $f(x) = \frac{x^2 - 6x^3}{x^2 + x - 1}$

Calculamos en cada caso el valor de la pendiente y de la ordenada en el origen.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5x}{x^2 + 2x} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x + 2} = 3$$

$f(x)$ tiene la asíntota oblicua $y = x + 3$.

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 4}{x^2 - x} = 2$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 4}{x - 1} = 2$$

$f(x)$ tiene la asíntota oblicua $y = 2x + 2$.

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5}{2x^2 - 3x} = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}x \right] &= \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 10}{4x - 6} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$f(x)$ tiene la asíntota oblicua $y = \frac{x}{2} + \frac{3}{4}$.

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 1}{4x^3} = \frac{5}{4}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[f(x) - \frac{5}{4}x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{4x^2} = 0$$

$f(x)$ tiene la asíntota oblicua $y = \frac{5}{4}x$.

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - 3x^3}{2x^3 + 8x} = -\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[f(x) + \frac{3}{2}x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x - 5}{2x^2 + 8} = 0$$

$f(x)$ tiene la asíntota oblicua $y = -\frac{3}{2}x$.

$$f) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 6x^3}{x^3 + x^2 - x} = -6$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) + 6x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 - 6x}{x^2 + x - 1} = 7$$

$f(x)$ tiene la asíntota oblicua $y = -6x + 7$.

96 Determina las asíntotas de las siguientes funciones y la posición de la función respecto de ellas.

a) $f(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - 5x + 6}$

b) $f(x) = \frac{x^2 + 8}{x^3 + 2x^2 - 11x - 12}$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{2, 3\}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = 2$.

Por la izquierda de $x = 2$, la rama infinita tiende a $+\infty$ y por la derecha tiende a $-\infty$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = 3$.

Por la izquierda de $x = 3$, la rama infinita tiende a $-\infty$ y por la derecha tiende a $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{x^2 - 5x + 6} = 0 \rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.

$$x \rightarrow +\infty \rightarrow \frac{2x - 1}{x^2 - 5x + 6} > 0 \rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ queda por encima de la asíntota $y = 0$.

$$x \rightarrow -\infty \rightarrow \frac{2x - 1}{x^2 - 5x + 6} < 0 \rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ queda por debajo de la asíntota $y = 0$.

b) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-4, -1, 3\}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = -4$.

Por la izquierda de $x = -4$, la rama infinita tiende a $-\infty$ y por la derecha tiende a $+\infty$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = -1$.

Por la izquierda de $x = -1$, la rama infinita tiende a $+\infty$ y por la derecha tiende a $-\infty$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = 3$.

Por la izquierda de $x = 3$, la rama infinita tiende a $-\infty$ y por la derecha tiende a $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 8}{x^3 + 2x^2 - 11x - 12} = 0 \rightarrow f(x) \text{ tiene una asíntota horizontal en } y = 0.$$

$$x \rightarrow +\infty \rightarrow \frac{x^2 + 8}{x^3 + 2x^2 - 11x - 12} > 0 \rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ queda por encima de la asíntota $y = 0$.

$$x \rightarrow -\infty \rightarrow \frac{x^2 + 8}{x^3 + 2x^2 - 11x - 12} < 0 \rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ queda por debajo de la asíntota $y = 0$.

97 Halla las asíntotas de estas funciones y la posición de las ramas infinitas.

a) $f(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x + 3}$

$$b) f(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 + x - 6}$$

$$a) \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-3\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = -3$. Por la izquierda la rama infinita tiende a $+\infty$, y por la derecha tiende a $-\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x + 3} = \infty \end{aligned}$$

$f(x)$ no tiene asíntotas horizontales.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 + 3x} = +\infty \rightarrow \end{aligned}$$

$\rightarrow f(x)$ no tiene asíntotas oblicuas.

$$b) \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-3, 2\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = -3$. Por la izquierda la rama infinita tiende a $-\infty$ y por la derecha tiende a $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 + x - 6} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 + x - 6} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 - 4x + 4)}{(x-2)(x+3)} = 0 \rightarrow \end{aligned}$$

$\rightarrow f(x)$ no tiene asíntota vertical en $x = 2$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 + x - 6} = \\ &= +\infty \rightarrow \end{aligned}$$

$\rightarrow f(x)$ no tiene asíntotas horizontales.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^3 + x^2 - 6x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - x] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-7x^2 + 18x - 8}{x^2 + x - 6} = -7$$

$f(x)$ tiene la asíntota oblicua $y = x - 7$.

$$\begin{aligned} f(x) - (x - 7) &= \\ &= \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 + x - 6} - x + 7 = \\ &= \frac{25x - 50}{x^2 + x - 6} \end{aligned}$$

$$x \rightarrow +\infty \rightarrow \frac{25x - 50}{x^2 + x - 6} > 0 \rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ queda por encima de la asíntota $y = x - 7$.

$$x \rightarrow -\infty \rightarrow \frac{25x - 50}{x^2 + x - 6} < 0 \rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ queda por debajo de la asíntota $y = x - 7$.

98 Encuentra las asíntotas de las siguientes funciones.

$$a) f(x) = \frac{|2x - 3|}{x}$$

$$b) f(x) = \frac{x}{|x - 1|}$$

Escribimos $f(x)$ como una función definida a trozos.

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{3 - 2x}{x} & \text{si } x < \frac{3}{2} \\ \frac{2x - 3}{x} & \text{si } x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3 - 2x}{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3 - 2x}{x} = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - 2x}{x} = -2 \rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y = -2$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 3}{x} = 2 \rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y = 2$.

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 - x} & \text{si } x < 1 \\ \frac{x}{x - 1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{1-x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x-1} = +\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

→ La función tiene una asíntota vertical en $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1-x} = -1 \rightarrow$$

→ $f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y = -1$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} = 1 \rightarrow$$

→ $f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y = 1$.

99 **INVESTIGA.** Sean f y g dos funciones definidas para $x > 0$, si la recta $y = -x$ es una asíntota oblicua de f y g , ¿cuánto vale $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) \cdot g(x)}{x}$?

$$y = -x \rightarrow m = -1 \quad n = 0$$

El límite de un producto o división de funciones es igual al producto o división de los límites de cada función, es decir:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) \cdot g(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \\ &= m \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = (-1) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \end{aligned}$$

$$n = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - mx) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = - \lim_{x \rightarrow +\infty} x = -\infty$$

100 Sean f y g dos funciones definidas para $x > 0$, se sabe que $y = 3$ es una asíntota horizontal de f y que f no corta al eje X .

$$\text{Además, se tiene que } g(x) = \frac{e^{-x} - 3}{f(x)}.$$

Indica una asíntota horizontal de g .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$, ya que $f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y = 3$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} - 3}{f(x)} =$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} - 3)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)} = \frac{-3}{3} = -1$$

Por tanto, una asíntota horizontal de $g(x)$ es $y = -1$.

101 **INVESTIGA.** Se sabe que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tienen una asíntota oblicua. Calcula la pendiente de las asíntotas oblicuas en cada caso, conociendo estos límites.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + f(x)}{3x} = 1$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x) + e^x - x}{x} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + f(x)}{3x} &= \\ &= \frac{1}{3} \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \right] = \\ &= \frac{1}{3} (0 + m) = 1 \rightarrow m = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x) + e^x - x}{x} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - x}{x} = \\ &= m - 1 = 1 \rightarrow m = 2 \end{aligned}$$

102 Determina las asíntotas de las siguientes funciones.

$$\text{a) } f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 2x}$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^3 - 3x^2 - 13x + 15}$$

$$\text{a) } \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0, 2\}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= -\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

→ $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = 0$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= +\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

→ $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 2x} = \infty \rightarrow$$

→ $f(x)$ no tiene asíntotas horizontales.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{x^3 - 2x^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 2x} = 2$$

$f(x)$ tiene una asíntota oblicua
en $y = x + 2$.

$$b) f(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-5)(x+3)}$$

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-3, 1, 5\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ tiene una asíntota vertical
en $x = -3$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{3}{16} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{3}{16} \end{array} \right\} \rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ tiene una discontinuidad evitable
en $x = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ tiene una asíntota vertical
en $x = 5$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^3 - 3x^2 - 13x + 15} = \\ &= 0 \rightarrow f(x) \text{ tiene una asíntota} \\ &\text{horizontal en } y = 0. \end{aligned}$$

103 ●●● Halla las asíntotas de las siguientes funciones.

$$a) f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-3}} \quad c) f(x) = \frac{\sqrt{2x-3}}{x-2}$$

$$b) f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x^2-9}} \quad d) f(x) = \frac{\sqrt{x^4+1}}{x+3}$$

$$a) \text{Dom } f = (-\infty, 0] \cup (3, +\infty)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \rightarrow \text{No existe.} \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ tiene una asíntota vertical
en $x = 3$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x}{x-3}} = 1 \rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ tiene una asíntota horizontal
en $y = 1$.

$$b) \text{Dom } f = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{\sqrt{x^2-9}} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(\sqrt{x^2-9})}{(x+3)(x-3)} = 0 \rightarrow \end{aligned}$$

$\rightarrow f(x)$ no tiene asíntota vertical
en $x = -3$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \rightarrow \text{No existe.} \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ tiene una asíntota vertical
en $x = 3$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{\sqrt{x^2-9}} = 1 \rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ tiene una asíntota horizontal
en $y = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+3}{\sqrt{x^2-9}} = -1 \rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ tiene una asíntota horizontal
en $y = -1$.

$$c) \text{Dom } f = \left[\frac{3}{2}, 2 \right) \cup (2, +\infty)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ tiene una asíntota vertical
en $x = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x-3}}{x-2} = 0 \rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ tiene una asíntota horizontal
en $y = 0$.

$$d) \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-3\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ tiene una asíntota vertical
en $x = -3$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x+3} = \infty \rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ no tiene asíntotas horizontales.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2+3x} = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4+1} - x^2 - 3x}{x+3} = \\ &= -3 \end{aligned}$$

$f(x)$ tiene una asíntota oblicua
en $y = x - 3$.

104 Calcula las ramas infinitas y asíntotas de las funciones.

a) $f(x) = x^2 + 5x - 1$

b) $f(x) = 2x - 1$

c) $f(x) = \log x$

d) $f(x) = \operatorname{tg} x$

- a) $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} \rightarrow$ La función no tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 5x - 1) = \infty \rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ no tiene asíntotas horizontales.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5x - 1}{x} = \infty \rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ no tiene asíntotas oblicuas.

- b) La gráfica de la función es una recta, así que no tiene asíntotas.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \end{cases}$$

- c) $\operatorname{Dom} f = (0, +\infty)$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\log x) = -\infty \rightarrow f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = 0$.

La rama infinita tiende a $-\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log x) = +\infty \rightarrow f(x)$ no tiene asíntotas horizontales.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0 \rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ no tiene asíntotas oblicuas.

- d) $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \rightarrow \frac{1}{0}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x &= -\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ tiene una asíntota vertical

$$\text{en } x = \frac{\pi}{2}.$$

Por la izquierda la rama infinita tiende a $+\infty$, y por la derecha, a $-\infty$.

Al ser una función periódica, de periodo π , todos los puntos que no

pertencen al dominio son asíntotas del mismo tipo. Por tanto, la función no tiene asíntotas horizontales ni oblicuas.

105 INVESTIGA. Dada la función

- ... $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - 1$, calcula los siguientes límites y contesta.

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x)$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$

- a) ¿Tiene asíntota oblicua por la izquierda? ¿Y por la derecha? ¿Cuál es?

- b) ¿Puede una función tener dos asíntotas oblicuas diferentes?

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x} - 1}{x} = -1$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x} - 1}{x} = 1$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] =$
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - 1 + x) =$
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 + 2x} - 1 - x} = -1$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] =$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - 1 - x) =$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 + 2x} - 1 - x} = 1$

a) $m_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$

$$n_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = -1$$

La asíntota oblicua por la izquierda es $y = -x - 1$.

$$m_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$n_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 1$$

La asíntota oblicua por la derecha es $y = x + 1$.

- b) Como se muestra en este ejemplo, hay funciones con dos asíntotas oblicuas distintas.

106 ●●● Halla las asíntotas oblicuas de estas funciones.

a) $\sqrt{x^2 - 1}$

b) $\sqrt{x^2 + 4x + 5}$

c) $\sqrt{4x^2 - 4x + 2}$

d) $\sqrt{4x^2 - 5}$

a) $m_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = -1$

$$n_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 1} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} - x} = 0$$

La asíntota oblicua por la izquierda de $f(x)$ es $y = -x$.

$$m_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = 1$$

$$n_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = 0$$

La asíntota oblicua por la derecha de $f(x)$ es $y = x$.

b) $m_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}{x} = -1$

$$n_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x + 5}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} - x} = -2$$

La asíntota oblicua por la izquierda de $f(x)$ es $y = -x - 2$.

$$m_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}{x} = 1$$

$$n_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4x + 5} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + 5}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x} = 2$$

La asíntota oblicua por la derecha de $f(x)$ es $y = x + 2$.

c) $m_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 4x + 2}}{x} = -2$

$$n_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 - 4x + 2} + 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x + 2}{\sqrt{4x^2 - 4x + 2} - 2x} = 1$$

La asíntota oblicua por la izquierda de $f(x)$ es $y = -2x + 1$.

$$m_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 4x + 2}}{x} = 2$$

$$n_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - 4x + 2} - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x + 2}{\sqrt{4x^2 - 4x + 2} + 2x} = -1$$

La asíntota oblicua por la derecha de $f(x)$ es $y = 2x - 1$.

d) $m_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 5}}{x} = -2$

$$n_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 - 5} + 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5}{\sqrt{4x^2 - 5} - 2x} = 0$$

La asíntota oblicua por la izquierda de $f(x)$ es $y = -2x$.

$$m_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 5}}{x} = 2$$

$$n_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - 5} - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{\sqrt{4x^2 - 5} + 2x} \right) = 0$$

La asíntota oblicua por la derecha de $f(x)$ es $y = 2x$.

107 ●●● Estudia qué tipo de asíntotas tienen las siguientes funciones y calcúlalas.

a) $\frac{\sqrt{x^4 + 5x + 5}}{x}$

c) $\frac{\sqrt{x^4 + 2}}{3 - x}$

b) $\frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x - 1}$

d) $\frac{\sqrt{x^6 + 1}}{x^2 + x - 2}$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= +\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 + 5x + 5}}{x} - x = \infty \rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ no tiene asíntotas horizontales.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 + 5x + 5}}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{x^4 + 5x + 5}}{x} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + 5}{x(\sqrt{x^4 + 5x + 5} + x^2)} = 0$$

$f(x)$ tiene la asíntota oblicua $y = x$.

b) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^2 - x} = \infty \rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ no tiene asíntotas horizontales.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^2 - x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x - 1} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 + 1} - x^2 + x}{x - 1} = 1$$

$f(x)$ tiene la asíntota oblicua $y = x + 1$.

c) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{3\}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = 3$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 + 2}}{3x - x^2} = \infty \rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ no tiene asíntotas horizontales.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 + 2}}{3x - x^2} = -1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{x^4 + 2}}{3 - x} + x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 + 2} + 3x - x^2}{3 - x} = -3$$

$f(x)$ tiene la asíntota oblicua
 $y = -x - 3$.

d) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 1\}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\}$$

$f(x)$ tiene una asíntota vertical en
 $x = -2$ y otra en $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^6 + 1}}{x^2 + x - 2} = \infty \rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ no tiene asíntotas horizontales.

$$m_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^6 + 1}}{x^3 + x^2 - 2x} = -1$$

$$n_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{x^6 + 1}}{x^2 + x - 2} + x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^6 + 1} + x^3 + x^2 - 2x}{x^2 + x - 2} = 1$$

$f(x)$ tiene la asíntota oblicua $y = -x + 1$.

$$m_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^6 + 1}}{x^3 + x^2 - 2x} = 1$$

$$n_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x^6 + 1}}{x^2 + x - 2} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x^6 + 1} - x^3 - x^2 + 2x}{x^2 + x - 2} \right) =$$

$$= -1$$

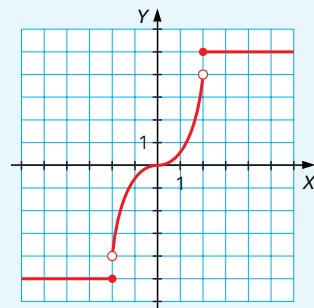
$f(x)$ tiene asíntota oblicua $y = x - 1$.

3. Determina la continuidad de una función en un punto

Continuidad en un punto

ACTIVIDADES FLASH

- 108** Estudia la continuidad de la siguiente función en los puntos $x = 2$, $x = 0$ y $x = -2$.



$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 5 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -5 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -4 \end{array} \right\}$$

La función no es continua en $x = 2$ ni en $x = -2$.

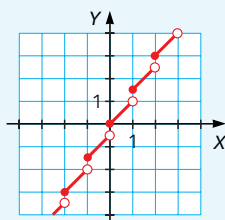
En ambos casos se trata de un punto de discontinuidad de salto finito.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow$$

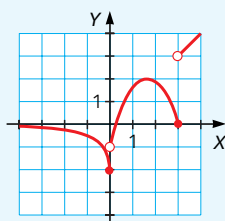
→ La función es continua en $x = 0$.

- 109** ●●○ Determina los puntos de discontinuidad de cada una de las siguientes funciones e indica de qué tipo son.

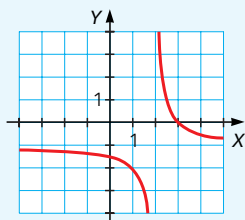
a)



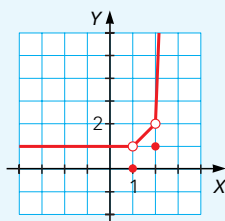
b)



c)



d)



a) La función está definida de la forma:

$$f(x) = x + \frac{1}{2}n, x \in [n, n + 1), n \in \mathbb{Z}$$

Cada $x \in \mathbb{Z}$ es un punto de discontinuidad de salto finito.

- b) Los puntos de discontinuidad son $x = 0$ y $x = 3$, en ambos casos se trata de puntos de discontinuidad de salto finito.
- c) El único punto de discontinuidad es $x = 2$, que es un punto de discontinuidad de salto infinito.
- d) Los puntos de discontinuidad son $x = 1$ y $x = 2$, en ambos casos se trata de puntos de discontinuidad evitable.

- 110** ●●○ Determina si las siguientes funciones son continuas en el punto que se indica.

a) $f(x) = 1 - x^2$ en $x = -1$

b) $f(x) = -x^2 + 3x$ en $x = \frac{1}{2}$

c) $f(x) = \sqrt{x - 2}$ en $x = 1$

d) $f(x) = \frac{2x}{x^2 - x - 6}$ en $x = -2$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} f(-1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow$$

→ $f(x)$ es continua en $x = -1$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = \frac{5}{4} \\ \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = \frac{5}{4} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4} \\ \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = \frac{5}{4} \end{array} \right\} \rightarrow$$

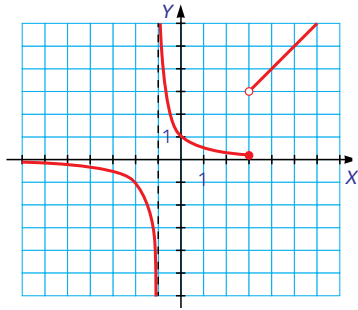
→ $f(x)$ es continua en $x = \frac{1}{2}$.

c) $f(x)$ no está definida en $x = 1 \rightarrow$
→ $f(x)$ no es continua en $x = 1$.

d) $f(x)$ no está definida en $x = -2 \rightarrow$
→ $f(x)$ no es continua en $x = -2$.

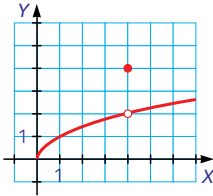
- 111** ●●○ **INVENTA.** Dibuja una función continua, salvo en $x = -1$, que tenga un salto infinito y un salto finito en $x = 3$.

Respuesta abierta. Por ejemplo:



- 112** **INVENTA.** Dibuja una función cuyo dominio sea $[0, +\infty)$, y con un punto de discontinuidad evitable en $x = 4$.

Respuesta abierta. Por ejemplo:



- 113** Determina los puntos de discontinuidad en cada caso.

a) $f(x) = \frac{x+2}{x^2+3x+5}$

b) $f(x) = \frac{x-3}{x^2-x-20}$

c) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-9}$

d) $f(x) = \frac{2x^2+5x-3}{x^4-4x^2+3}$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} \rightarrow f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

b) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-4, 5\}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\}$$

No existe $\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$ ni $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$.

$f(x)$ no es continua en $x = -4$ ni en $x = 5$. En ambos casos la discontinuidad es inevitable de salto infinito.

c) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -3} f(x).$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 3} f(x).$$

$f(x)$ no es continua en $x = -3$ ni en $x = 3$. En ambos casos la discontinuidad es inevitable de salto infinito.

d) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-\sqrt{3}, -1, 1, \sqrt{3}\}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} f(x).$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -1} f(x).$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 1} f(x).$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} f(x).$$

$f(x)$ no es continua en $x = -\sqrt{3}$, ni en $x = -1$, ni en $x = 1$, ni en $x = \sqrt{3}$.

En todos los casos la discontinuidad es inevitable de salto infinito.

- 114** Determina los puntos de discontinuidad de estas funciones.

a) $f(x) = \sqrt{x^2+3x+2}$

b) $f(x) = \ln(x^2+x-6)$

c) $f(x) = \sqrt{x^2+x-2}$

d) $f(x) = \log(x^2+4x-5)$

a) $\text{Dom } f = (-\infty, -2] \cup [-1, +\infty)$

La función es continua en todo su dominio.

b) $\text{Dom } f = (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$

La función es continua en todo su dominio.

c) $\text{Dom } f = (-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$

La función es continua en todo su dominio.

d) $\text{Dom } f = (-\infty, -5) \cup (1, +\infty)$

La función es continua en todo su dominio.

- 115 INVENTA.** Escribe la expresión algebraica de una función radical con discontinuidad en $x = 2$ y $x = -4$.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x - 8}$$

- 116 INVESTIGA.** Estudia la continuidad de las funciones.

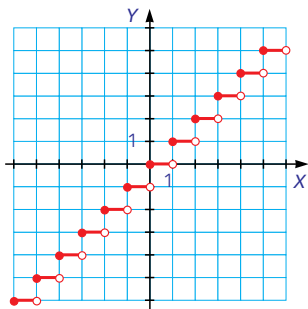
a) $f(x) = [x]$ c) $f(x) = |x^2 - 1|$
 b) $f(x) = \frac{x}{|x|}$ d) $f(x) = \frac{1}{|x^2 - 1|}$

- a) La función es continua salvo en los números enteros.

$$\text{Si } a \in \mathbb{Z} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = a - 1 \\ \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = a \end{array} \right\} \rightarrow$$

$\rightarrow$ No existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Todos los números enteros son puntos de discontinuidad inevitable de salto finito.



b) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

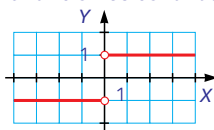
No existe $f(0)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

y la función no es continua en $x = 0$.

Se trata de un punto de discontinuidad inevitable de salto finito.

La función es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.



c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < -1 \text{ o si } x > 1 \\ -x^2 + 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$

Si $x = -1 \rightarrow f(-1) = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 - 1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (-x^2 + 1) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$$

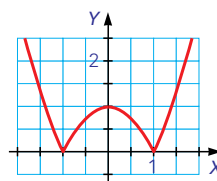
Como $f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$, la función es continua en $x = -1$.

Si $x = 1 \rightarrow f(1) = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x^2 + 1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 1) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

Como $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, la función es continua en $x = 1$.

La función es continua en $\mathbb{R}$.



d) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 - 1} & \text{si } x < -1 \text{ o si } x > 1 \\ \frac{1}{-x^2 - 1} & \text{si } -1 < x < 1 \end{cases}$

No existe $f(-1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{-x^2 - 1} = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow$$

$\rightarrow$ La función no es continua en $x = -1$.

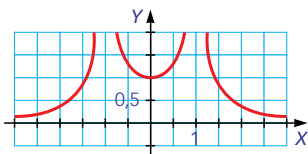
Es un punto de discontinuidad inevitable de salto infinito.

No existe $f(1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{-x^2 - 1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow$$

$\rightarrow$ La función no es continua en $x = 1$.

Es un punto de discontinuidad inevitable de salto infinito.



La función es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

- 117** Estudia la continuidad de estas funciones en el punto $x = -2$ y, si son discontinuas, indica el tipo de discontinuidad. Representálas en un entorno de -2 .

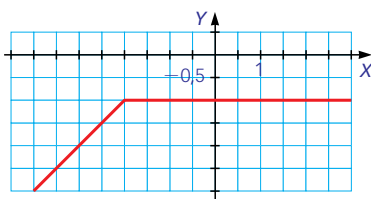
a) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < -2 \\ -1 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 2 & \text{si } x \neq -2 \\ 2 & \text{si } x = -2 \end{cases}$

a) $f(-2) = -1$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -1 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -1$$

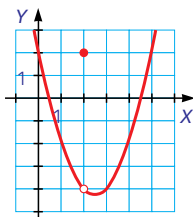
La función es continua en $\mathbb{R}$.



b) $f(-2) = 2$

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 5x + 2) = 16$$

La función tiene una discontinuidad evitable en $x = -2$.



- 118** Estudia la continuidad de las funciones en $x = 3$ y si presentan discontinuidad, decide de qué tipo de discontinuidad se trata y representálas.

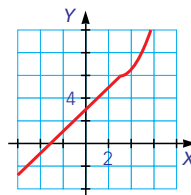
a) $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x < 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \\ x^2 - 2x + 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{12}{x-1} & \text{si } x < 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \\ x - 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

a) $f(3) = 6$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 6 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 6 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$$

La función es continua en $\mathbb{R}$.



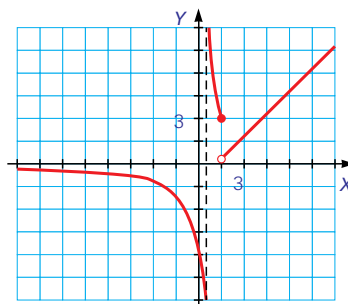
b) $f(3) = 6$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 6 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 3} f(x).$$

La función no está definida en $x = 1$, luego no existe $f(1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\}$$

La función tiene una discontinuidad de salto finito en $x = 3$ y una discontinuidad de salto infinito en $x = 1$.



- 119** Define de otra manera las siguientes funciones para que sean continuas en todos los números reales.

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ 3x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{x - 4} & \text{si } x \neq 4 \\ 6 & \text{si } x = 4 \end{cases}$

a) $f(x)$ no se puede redefinir para que sea continua en todos los números reales, ya que en $x = 0$ tiene una discontinuidad de salto infinito.

b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} \rightarrow \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x + 4) = 8$$

Para que $f(x)$ sea continua en todos los números reales, redefinimos la función en $f(4) = 8$.

120 Estudia la continuidad de esta función.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Como $\cos x$ es una función continua en todo $\mathbb{R}$, el único punto de discontinuidad que puede tener $f(x)$ es $x = 0$.

$$f(0) = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

121 **INVESTIGA.** Estudia la continuidad.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{5x + 1}{x^2 - x - 6} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{3x + 1}{x - 5} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \log(x - 1) & \text{si } x < 5 \\ 3 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{1 - x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) • Si $x < 1$:

$$f(x) = \frac{5x + 1}{x^2 - x - 6}$$

$$\text{Dom } f = (-\infty, 1) - \{-2\}$$

$$f(-2) \rightarrow -\frac{9}{0}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= +\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -2} f(x).$$

$x = -2$ es un punto de discontinuidad de salto infinito.

• Si $x = 1$:

$$f(1) = -1$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= -1 \end{aligned} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$$

Como $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, la función es continua en $x = 1$.

• Si $x > 1$:

$$f(x) = \frac{3x + 1}{x - 5}$$

$$\text{Dom } f = (1, +\infty) - \{5\}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) &= +\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 5} f(x).$$

$x = 5$ es un punto de discontinuidad de salto infinito.

La función es continua en $\mathbb{R} - \{-2, 5\}$.

b) • Si $x < 5$:

$$f(x) = \log(x - 1)$$

$$\text{Dom } f = (1, 5)$$

No hay puntos de discontinuidad.

• Si $x = 5$:

$$f(5) = 3$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) &= \log 4 \\ \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) &= 3 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 5} f(x).$$

La función no es continua en $x = 5$.

• Si $x > 5$:

$$f(x) = 3$$

$$\text{Dom } f = (5, +\infty)$$

No hay puntos de discontinuidad.

La función es continua en

$$(1, +\infty) - \{5\}.$$

c) • Si $x < 0$:

$$f(x) = 3x + 1$$

$$\text{Dom } f = (-\infty, 0) \rightarrow$$

$\rightarrow$ No hay puntos de discontinuidad.

• Si $x = 0$:

$$f(0) = 1$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

Como $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, la función es continua en $x = 0$.

• Si $x > 0$:

$$f(x) = \sqrt{1 - x}$$

$$\text{Dom } f = (0, 1]$$

No hay puntos de discontinuidad.

La función es continua en $(-\infty, 1]$.

4. Determina los parámetros para que se verifiquen las condiciones de continuidad

- 122 ●●○ Halla el valor que debe tomar a para que las siguientes funciones sean continuas.

$$a) f(x) = \begin{cases} 3x - 4 & \text{si } x < 1 \\ a & \text{si } x = 1 \\ \frac{x - 3}{2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2} & \text{si } x \neq -2 \\ a & \text{si } x = -2 \end{cases}$$

a) $f(1) = a$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= -1 \end{aligned} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$$

La función es continua si

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \rightarrow a = -1.$$

b) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \rightarrow \frac{0}{0}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} (x - 2) = -4 \end{aligned}$$

La función es continua si

$$f(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} f(x) \rightarrow a = -4.$$

- 123 ●●○ Encuentra el valor de a para que estas funciones sean continuas.

$$a) f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ 3x + a & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 + x - 2 & \text{si } x \leq -1 \\ ax^2 + x + a & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

a) $f(2) = 12$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= 12 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= 6 + a \end{aligned} \right\} \rightarrow \\ \rightarrow 6 + a = 12 \rightarrow a = 6$$

b) $f(-1) = -3$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= -3 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= 2a - 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow \\ \rightarrow 2a - 1 = -3 \rightarrow a = -1$$

- 124 ●●○ ¿Qué valor debe tomar a para que las funciones sean continuas?

$$a) f(x) = \begin{cases} 2^{x-1} & \text{si } x \leq -2 \\ ax - 2 & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{-\pi}{2x} & \text{si } x \leq -2 \\ \log(ax + 7) & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

a) $f(-2) = 2^{-3} = \frac{1}{8}$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} 2^{x-1} = \frac{1}{8} \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= -2a - 2 \end{aligned} \right\}$$

La función es continua si $\frac{1}{8} = -2a - 2 \rightarrow$

$$\rightarrow a = -\frac{17}{16}$$

b) $f(-2) = 1$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \operatorname{tg} \frac{-\pi}{2x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} \log(-2a + 7) \end{aligned} \right\}$$

La función es continua si $1 = \log(-2a + 7) \rightarrow$

$$\rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

- 125 ●●○ Encuentra los valores de los números a y b para que las siguientes funciones sean continuas en todos los números reales.

$$a) f(x) = \begin{cases} |2 - x| & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{x}{b} & \text{si } 2 < x \leq 4 \\ a & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} x^2 + 2bx + 4 & \text{si } x < 1 \\ ax + 5 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{3x - 1}{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) $f(2) = 0$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \frac{2}{b} \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$\rightarrow$ El límite existe si $\frac{2}{b} = 0$.

No se puede resolver para ningún valor de b , por lo que la función no es continua para ningún valor de b , independientemente del valor de a .

b) $f(1) = a + 5$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= 2b + 5 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= a + 5 \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

→ El límite existe si $2b - a = 0$.

$f(2) = 2a + 5$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= 2a + 5 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \frac{5}{2} \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

→ El límite existe si $2a + 5 = \frac{5}{2}$.

La función es continua si

$a = -\frac{5}{4}$ y $b = -\frac{5}{8}$.

- 126** ●●○ Halla el valor de a para que estas funciones sean continuas.

a) $f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{si } x \leq a \\ x^2 - 2x + 1 & \text{si } x > a \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x \leq a \\ \log_2 x & \text{si } x > a \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 - x - 2 & \text{si } x < -a \\ x^2 - 2 & \text{si } -a \leq x \leq a \\ x^3 + x^2 - x - 2 & \text{si } x > a \end{cases}$

a) $f(a) = a + 5$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) &= a + 5 \\ \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) &= a^2 - 2a + 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

→ $a + 5 = a^2 - 2a + 1$ →

→ $a^2 - 3a - 4 = 0$ →

→ $a_1 = -1$ $a_2 = 4$

La función es continua si $a = -1$

o $a = 4$.

b) $f(a) = a - 2$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) &= a - 2 \\ \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) &= \log_2 a \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

→ $a - 2 = \log_2 a$ → $a = 4$

La función es continua si $a = 4$.

c) $f(-a) = a^2 - 2$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -a^-} f(x) &= -a^3 + a^2 + a - 2 \\ \lim_{x \rightarrow -a^+} f(x) &= a^2 - 2 \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

→ $-a^3 + a = 0$ →

→ $a_1 = -1$ $a_2 = 0$ $a_3 = 0$

$f(a) = a^2 - 2$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -a^-} f(x) &= a^3 + a^2 - a - 2 \\ \lim_{x \rightarrow -a^+} f(x) &= a^2 - 2 \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

→ $-a^3 - a = 0$ → $a = 0$

La función es continua si $a = 0$.

- 127** ●●○ Halla m y n para que la función $f(x)$ sea continua para todos los números reales.

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq 1 \\ mx + n & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ 4 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$f(1) = 2$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= m + n \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

→ El límite existe si $m + n = 2$.

$f(3) = 3m + n$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= 3m + n \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= 4 \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

→ El límite existe si $3m + n = 4$.

$$\left. \begin{aligned} m + n &= 2 \\ 3m + n &= 4 \end{aligned} \right\} \rightarrow m = 1 \quad n = 1$$

La función es continua si $m = 1$ y $n = 1$.

- 128** ●●○ Considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & \text{si } x \leq 1 \\ ax + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Calcula a y b para que sea continua

y $f(2) = 7$.

$f(1) = 5$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= 5 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= a + b \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

→ El límite existe si $a + b = 5$.

$f(2) = 2a + b = 7$

$$\left. \begin{aligned} a + b &= 5 \\ 2a + b &= 7 \end{aligned} \right\} \rightarrow a = 2 \quad b = 3$$

La función es continua si $a = 2$ y $b = 3$.

- 129** ●●○ Estudia la continuidad según los valores de a y b .

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+a}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x \neq 0 \\ b & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$f(0) = b$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \frac{a}{1} = a \end{aligned} \right\} \rightarrow a = b = 0$$

- 130 INVESTIGA.** Calcula a para que el límite sea finito.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3}{x - 1} - ax$$

Con ese valor de a , halla b para que se verifique que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3}{x - 1} - ax - b = 0$$

¿Qué relación existe entre la función

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3}{x - 1} \text{ y la recta } y = ax + b?$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3}{x - 1} - ax &= \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3 - ax^2 + ax}{x - 1} &= \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2 - a)x^2 + ax + 3}{x - 1} &= \end{aligned}$$

Para que tenga límite finito, el grado del numerador y del denominador debe ser el mismo, por lo que:

$$2 - a = 0 \rightarrow a = 2 \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 3}{x - 1} = 2$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3}{x - 1} - ax - b &= \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 3}{x - 1} - b &= \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 3 - bx + b}{x - 1} &= \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2 - b)x + (3 + b)}{x - 1} &= \end{aligned}$$

Para que este límite sea 0, el grado del numerador debe ser menor que el del denominador, por lo que:

$$2 - b = 0 \rightarrow b = 2 \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x - 1} = 0$$

La relación que hay entre ambas funciones es que $y = ax + b$ en una asíntota oblicua de $y = \frac{2x^2 + 3}{x - 1}$.

5. Resuelve problemas calculando límites

131 MATEMÁTICAS Y... PRECIOS.

- En el mundo del comercio es frecuente que se hagan descuentos cuando se compran varios productos iguales a la vez. Estos descuentos intentan equilibrar la reducción del precio del producto con el aumento en los beneficios.

Esta función da el precio de x unidades de un producto en una tienda.

$$c(x) = \begin{cases} 5x & 0 < x \leq 10 \\ \sqrt{ax^2 + 500} & 10 < x \end{cases}$$

- ¿Cuánto vale 1 unidad de producto? ¿Y 2? ¿Y 3?
- ¿Cuánto vale cada unidad de producto si compran menos de 10 unidades?
- ¿Cuánto valen 10 unidades? ¿Y 11?
- ¿El precio varía de forma continua? ¿Cuánto tiene que valer a para que sea continuo?
- Si se compran muchas unidades, ¿cuál es aproximadamente el precio por unidad?

$$\begin{aligned} \text{a) } c(1) &= 5 \text{ €} \\ c(2) &= 10 \text{ €} \\ c(3) &= 15 \text{ €} \end{aligned}$$

- b) Si compran menos de 10 unidades, cada unidad vale 5 €.

$$\begin{aligned} \text{c) } c(10) &= 50 \text{ €} \\ c(11) &= \sqrt{121a + 500} \\ \text{El precio de 11 unidades depende del valor de } a. \end{aligned}$$

$$\text{d) } c(10) = 50$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 10^-} c(x) &= 50 \\ \lim_{x \rightarrow 10^+} c(x) &= \sqrt{100a + 500} \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow 50 = \sqrt{100a + 500} \rightarrow a = 20$$

La función es continua si $a = 20$.

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{ax^2 + 500}}{x} = \sqrt{a}$$

El precio aproximado es $\sqrt{a}$ €.

- 132 Una atleta tiene que recorrer una distancia de 100 km. El primer día recorre la mitad, el segundo la mitad de lo que le falta, el tercero la mitad de lo que se ha dejado el segundo día, y así sucesivamente, ¿cuántos días tardará en recorrer los 100 km? Justifica la respuesta.



Nunca llegará a recorrer los 100 km, ya que necesitaría un número «infinito» de días para lograrlo.

$$a_1 = \frac{100}{2} = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50.$$

El primer día ha recorrido 50 km.

$$a_2 = \frac{100}{2^2} + 50 = \frac{300}{2^2} = 100 \cdot \frac{3}{2^2} = 75$$

El segundo día ha recorrido 75 km.

$$a_3 = \frac{100}{2^3} + 75 = \frac{700}{2^3} = 100 \cdot \frac{7}{2^3} = 87,5$$

El tercer día ha recorrido 87,5 km.

El término general de la sucesión es:

$$a_n = 100 \cdot \frac{2^n - 1}{2^n} = 100 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

donde n representa el día n -ésimo.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 100 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 100$$

Cuando n se hace muy grande, la sucesión tiende a 100.

Esta actividad puede utilizarse para trabajar el ODS 5, igualdad de género.

133 MATEMÁTICAS Y... FILOSOFÍA.

- Las paradojas de Zenón son unos problemas filosóficos atribuidos a Zenón, un pensador griego del siglo V a.C. En una de estas paradojas Aquiles y una tortuga disputan una carrera. Como Aquiles es más rápido que la tortuga, le da una ventaja de 100 m. Aquiles corre a 4 m/s mientras que la tortuga avanza diez veces más lenta. Cuando Aquiles alcanza la posición inicial de la tortuga, esta habrá avanzado a un segundo punto.



Aquiles tardará un poco más en recorrer el intervalo que haya recorrido la tortuga, pero cuando llegue al

segundo punto, la tortuga habrá vuelto a avanzar a un tercer punto.

Por lo tanto, cada vez que Aquiles llega al punto donde ha estado la tortuga, tendrá todavía que recorrer cierta distancia hasta poder alcanzarla. Visto así, Aquiles nunca alcanzará a la tortuga.

- ¿A qué distancia está la tortuga de Aquiles en el primer paso?
- ¿A qué distancia estará en el siguiente paso? ¿Y en el enésimo?
- Si repite el proceso infinitas veces, ¿qué distancia les separa en el infinito?
- ¿Pasará Aquiles por encima de la tortuga? Si es así, calcula dónde.

a) $a_1 = 10 \text{ m}$

b) $a_2 = 1 \text{ m}$

$$a_3 = 0,1 = 10^{2-3} = 10^{-1} \text{ m}$$

$$a_{11} = 10^{2-11} = 10^{-9} \text{ m}$$

$$a_n = 10^{2-n} \text{ m}$$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 10^{2-n} = 0$

En el infinito se juntarán.

- d) Aquiles pasará por encima de la tortuga cuando el espacio recorrido por ambos sea el mismo.

$100 + 0,4t = 4t$, siendo t el tiempo transcurrido en segundos.

Aquiles pasará por encima de la tortuga a los 27,78 s.

- 134 MATEMÁTICAS Y... FÍSICA.** Esta fórmula, que se debe a Albert Einstein, expresa la masa, M , de un cuerpo en función de su velocidad, v , siendo c la velocidad de la luz (300 000 km/s).

$$M = \frac{mc}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

- a) Calcula el límite de la masa, M , cuando v tiende a c .
- b) Analiza si un cuerpo puede alcanzar la velocidad de la luz.



a) $\lim_{v \rightarrow c} \frac{mc}{\sqrt{c^2 - v^2}} = +\infty$

- b) Para que alcance la velocidad de la luz, el cuerpo debería tener masa infinita.

135 MATEMÁTICAS Y... MEDICINA.

- El servicio de traumatología de un hospital va a implantar un nuevo sistema que pretende reducir a corto plazo las listas de espera.

Se prevé que a partir de ahora la siguiente función, $P(t)$, indicará en cada momento t , en meses, el porcentaje de pacientes que podrá ser operado sin necesidad de entrar en lista de espera.

$$P(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 50 & \text{si } 0 \leq t \leq 10 \\ \frac{38t - 100}{0,4t} & \text{si } t > 10 \end{cases}$$

Pasado mucho tiempo, ¿cuál será este porcentaje?

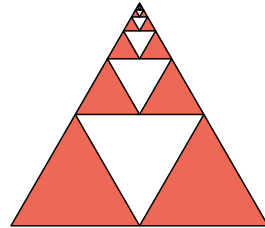
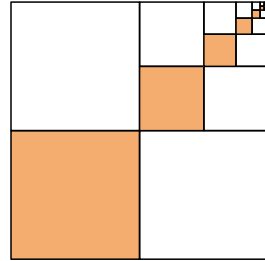
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{38t - 100}{0,4t} = \frac{38}{0,4} = 95 \rightarrow$$

→ El 95 % será atendido.

Esta actividad puede utilizarse para trabajar el ODS 3, salud y bienestar.

- 136 RETO.** Demuestra que la serie geométrica infinita

$\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots = \frac{1}{3}$ con ayuda de las siguientes ilustraciones.



El cuadrado naranja más grande es $\frac{1}{4}$ del cuadrado original, el segundo cuadrado naranja más grande es $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{4}$ del cuadrado original, y así sucesivamente. Por tanto, podemos expresar el área naranja como:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \dots = \\ & = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

En el triángulo pasa lo mismo si tenemos en cuenta el área pintada de blanco.

- 137** Un comercial de cierto producto recibe, como sueldo mensual, una cantidad fija de 600 € más una comisión que depende de la expresión $x^2 - x + 1$, donde x representa el número de artículos que vende.

El comercial tiene que correr con sus propios gastos, que son de 50 € más 3 €

por cada producto vendido. Obtén la función que recoge el sueldo mensual del vendedor. ¿Es una función continua?

$$f(x) = 600 + (x^2 - x + 1) - (50 + 3x) = x^2 - 4x + 551 \rightarrow$$

→ No, es una función discreta definida para $x > 0$, con $x \in \mathbb{N}$.

FAKE NEWS

El camino incomenzable

Para completar el camino de Santiago primero hay que recorrer la mitad de todo el trayecto. Antes de llegar a ese punto se camina un cuarto de todo el camino. Y antes de ello habrá que recorrer un octavo del camino. Pero si continuamos así, ¡nunca empezaremos!



Y tú, ¿qué opinas?

La sucesión de números generada es la siguiente:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

El límite de esta sucesión es 0, ya que cada vez se hacen más pequeños los términos. Por eso dice que, si continuamos así, nunca empezaremos.

PROBLEMAS APARENTEMENTE DISTINTOS

138 Sea la sucesión

$$a_n = a_{n-1} + 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n, a_0 = 0.$$

a) Calcula a_4 .

b) Halla $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

a) $a_0 = 0$

$$a_1 = 0 + 10 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{10}{2^1}$$

$$a_2 = \frac{10}{2^1} + \frac{10}{2^2} = 10 \left(\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2}\right)$$

$$a_3 = 10 \left(\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2}\right) + \frac{10}{2^3} = 10 \left(\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}\right)$$

$$a_4 = 10 \left(\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}\right) + \frac{10}{2^4} = 10 \left(\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}\right) = \frac{150}{16} = \frac{75}{8}$$

$$b) a_n = \frac{10}{2^1} + \frac{10}{2^2} + \dots + \frac{10}{2^n} =$$

$$= 10 \left(\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 10 \left(\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) = 10 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) = 10 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 10$$

139 Helena quiere realizar una ruta de 10 km. En la primera etapa recorre la mitad del camino, en la segunda, un cuarto del camino, luego un octavo y así sucesivamente.

a) ¿Qué distancia recorrerá Helena tras 4 etapas?

b) ¿Adónde llegará tras infinitas etapas?

La sucesión generada es:

$$a_1 = \frac{10}{2}, a_1 = \frac{10}{4}, a_2 = \frac{10}{8}, \dots, a_n = \frac{10}{2^{n+1}}$$

a) La distancia que recorrerá Helena será:

$$S(n) = \sum_{i=1}^n a_i$$

$$S(4) = \sum_{i=1}^4 a_i = \frac{10}{2} + \frac{10}{2^2} + \frac{10}{2^3} + \frac{10}{2^4} = 10 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}\right) = \frac{150}{16} = 9,375 \text{ km}$$

- b) Tras infinitas etapas cubrirá todo el recorrido.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} S(n) &= \sum_{i=1}^n a_i = \\ &= \frac{10}{2} + \frac{10}{2^2} + \frac{10}{2^3} + \frac{10}{2^4} + \dots + \frac{10}{2^n} = \\ &= 10 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) = 10 \text{ km}\end{aligned}$$

- 140 Dada la siguiente función, calcula:

$$f(x) = \frac{8x^2 + 1}{2(100 + x)^2 + 4}$$

- a) $f(100)$

- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\begin{aligned}\text{a) } f(100) &= \frac{8 \cdot 100^2 + 1}{2(100 + 100)^2 + 4} = \\ &= \frac{80\,001}{80\,004} = 0,9999625\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^2 + 1}{2(100 + x)^2 + 4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^2}{2x^2} = 4\end{aligned}$$

- 141 Los millones de toneladas de una cierta sustancia en la Tierra a lo largo del tiempo se pueden medir con la función:

$$f(x) = \frac{8x^2 + 1}{2(100 + x)^2 + 4} \text{ con } x \text{ medido en miles de años.}$$

- a) ¿Cuántos millones de toneladas de esta sustancia habrá pasados cien mil años?
b) Indica en qué cantidad de toneladas se estabilizará esa sustancia con el paso de los años.

$$\begin{aligned}\text{a) } f(100) &= \frac{8 \cdot 100^2 + 1}{2(100 + 100)^2 + 4} = \\ &= \frac{80\,001}{80\,004} = 0,9999625\end{aligned}$$

Habrà 0,9999625 millones de toneladas.

$$\begin{aligned}\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^2 + 1}{2(100 + x)^2 + 4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^2}{2x^2} = 4\end{aligned}$$

Se estabilizarà en 4 millones de toneladas.

- 142 Calcula a y b para que la siguiente función sea continua.

$$f(x) = \begin{cases} 10x & x < 5 \\ 50 & 5 \leq x < 40 \\ ax^2 + bx + 56 & 40 \leq x < 640 \\ 4 & x \geq 640 \end{cases}$$

- $f(5) = 50$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) &= 50 \\ \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) &= 50 \end{aligned} \right\}$$

$f(x)$ es continua en $x = 5$.

- $f(40) = 1600a + 40b + 56$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 40^-} f(x) &= 50 \\ \lim_{x \rightarrow 40^+} f(x) &= 1600a + 40b + 56 \end{aligned} \right\}$$

$f(x)$ es continua en $x = 40$, si:

$$\begin{aligned}1600a + 40b + 56 &= 50 \rightarrow \\ \rightarrow 1600a + 40b &= -6 \rightarrow \\ \rightarrow 800a + 20b &= -3\end{aligned}$$

- $f(640) = 4$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 640^-} f(x) &= 640^2a + 640b + 56 \\ \lim_{x \rightarrow 640^+} f(x) &= 4 \end{aligned} \right\}$$

$f(x)$ es continua en $x = 640$, si:

$$\begin{aligned}640^2a + 640b + 56 &= 4 \rightarrow \\ \rightarrow 409\,600a + 640b &= -52 \rightarrow \\ \rightarrow 102\,400a + 160b &= -13\end{aligned}$$

$f(x)$ es continua para los valores a y b que son solución del siguiente sistema.

$$\left. \begin{aligned} 800a + 20b &= -3 \\ 102\,400a + 160b &= -13 \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow a = \frac{11}{96\,000} \quad b = \frac{-47}{240}$$

- 143 Nasib salta en caída libre desde un avión. Su velocidad, con t medido en segundos, va variando de la siguiente manera.

- En el primer tramo su velocidad es $v = 10t$.
- Tras 5 s alcanza la velocidad máxima y se mantiene.
- 35 s más tarde abre el paracaídas y su velocidad desciende a $v = at^2 + bt + 56$.

- Finalmente, tras otros 600 s llega al suelo y corre a 4 m/s.

Indica la función de la velocidad que lleva al descender para que los cambios sean lo menos bruscos posible.

Sea $v(t)$ la función que describe la velocidad.

$$v(t) = \begin{cases} 10t & t \leq 5 \\ 50 & 5 < t \leq 40 \\ at^2 + bt + 56 & 40 < t < 640 \\ 4 & t \geq 640 \end{cases}$$

La función debe ser continua.

- $v(5) = 50$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5^-} v(t) &= 50 \\ \lim_{x \rightarrow 5^+} v(t) &= 50 \end{aligned} \right\}$$

$v(t)$ es continua en $t = 5$.

- $v(40) = 50$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 40^-} v(t) &= 50 \\ \lim_{x \rightarrow 40^+} v(t) &= 40^2 \cdot a + 40b + 56 \end{aligned} \right\}$$

$v(t)$ es continua en $t = 40$ si:

$$40^2 \cdot a + 40b + 56 = 50$$

- $v(640) = 50$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 640^-} v(t) &= 640^2 \cdot a + 640b + 56 \\ \lim_{x \rightarrow 640^+} v(t) &= 4 \end{aligned} \right\}$$

$v(t)$ es continua en $t = 640$ si:

$$640^2 \cdot a + 640b + 56 = 4.$$

$v(t)$ es continua para los valores a y b que son solución del siguiente sistema.

$$\left. \begin{aligned} 40^2 \cdot a + 40b + 56 &= 50 \\ 640^2 \cdot a + 640b + 56 &= 4 \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow a = \frac{11}{96\,000} \quad b = \frac{-47}{240}$$

¿PARA QUÉ SIRVE...?

- 1 ¿A qué se le denominó año 1 d. C.?

Al año siguiente al nacimiento de Cristo (o al año 754 de la fundación de Roma).

- 2 ¿Qué acontecimiento marcaba el inicio del calendario que se usaba en Roma antes del implantado por el papa Juan I?

La fundación de Roma.

- 3 ¿Qué valor hay que sustituir en la función para calcular el siglo al que pertenece el año 325 a. C.?

Hay que sustituir $x = 325$ en el trazo de la función donde $x < 0$.

- 4 ¿A qué siglo pertenece el año 1616 d. C.? ¿Y el año 325 a. C.?

El año 1616 d. C. pertenece al siglo XVII d. C.
El año 325 a. C. pertenece al siglo IV a. C.

- 5 El año cero no existe. Relaciona esta afirmación con el hecho de definir la función siglo mediante una función definida a trozos.

La función se define de manera distinta para valores de x positivos y negativos. La función se define en $x = 0$ para que sea continua.

- 6 ¿Cuándo comenzó el siglo XXI?

Comenzó en el año 2001.

- 7 Estudia la continuidad de la función que determina el siglo y di qué tipo de discontinuidades presenta.

$$f(0) = \left[\frac{-1}{100} \right] = -1$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \left[\frac{-1}{100} \right] + 1 = -1 + 1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \left[\frac{-1}{100} \right] = -1 \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$\rightarrow$ No existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, por tanto, hay una discontinuidad de salto finito en $x = 0$.

La función tiene también discontinuidades de salto finito en todos los valores de x que son múltiplos de 100, en el cambio de siglo.

- 8 Construye la gráfica de la función siglo considerando que x toma valores reales.

