

Tema 8 : Límites de funcións. Continuidade e ramas infinitas

Límite dunha función nun punto

Primeiro vexamos unha idea intuitiva da definición de límite:

Dada unha función f , o límite de f cando x tende a a , é o valor ao que se aproximan as imaxes mediante f dos puntos x cando estes se aproximan ao valor a .

Exemplos :

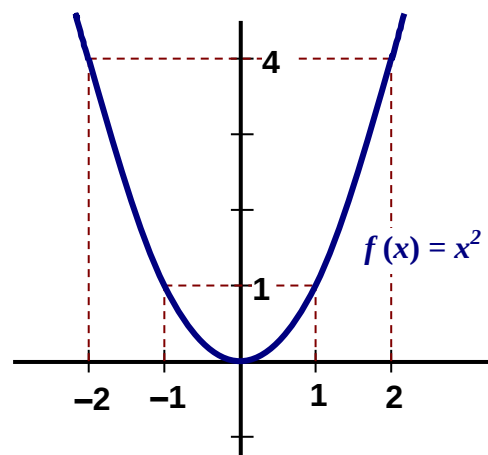
➤ Sexa $f(x) = x^2$. Vexamos a que valor se acercan as imaxes mediante f dos puntos x cando estes tenden ao punto 1.

pola esquerda

x	$f(x) = x^2$
0,5	0,25
0,6	0,36
0,8	0,64
0,9	0,81
0,99	0,9801
0,999	0,998001

pola dereita

x	$f(x) = x^2$
1,5	2,25
1,4	1,96
1,2	1,44
1,01	1,0201
1,001	1,002001
1,0001	1,00020001



Observamos nas táboas que se x se acerca ao valor 1 pola esquerda ou pola dereita, as súas imaxes vanse acercando tamén ao valor 1. Así pois diremos que : $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$

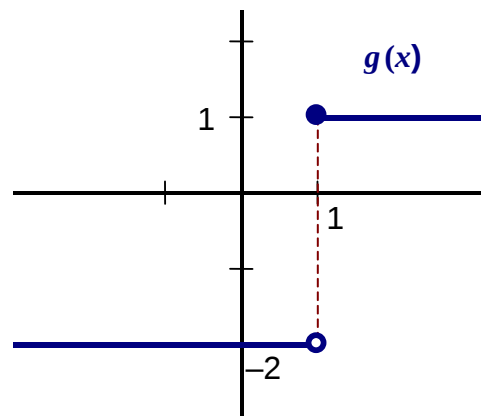
➤ Sexa $g(x) = \begin{cases} -2 & \text{se } x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$. Vexamos que ocorre cando $x \rightarrow 1$.

pola esquerda

x	$g(x)$
0,5	-2
0,6	-2
0,8	-2
0,9	-2
0,99	-2
0,999	-2

pola dereita

x	$g(x)$
1,5	1
1,4	1
1,2	1
1,1	1
1,01	1
1,001	1



Tema 8 : Límites de funcións. Continuidade e ramas infinitas

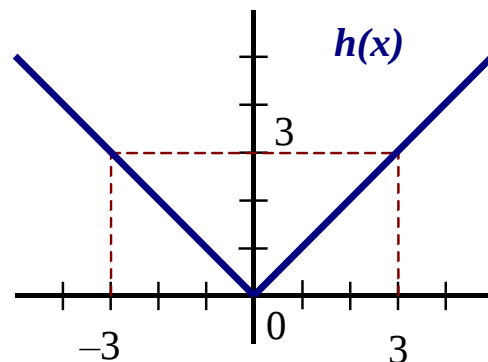
Observamos que se x se acerca ao valor 1 pola dereita, as súas imaxes acércanse ao 1 , mentres que se x se acerca ao valor 1 pola esquerda, as súas imaxes acércanse ao -2 . Así pois, as imaxes de valores próximos a 1 non se acercan a un valor único, e polo tanto, diremos que a función g non ten límite cando x tende a 1 . $(\pm \lim_{x \rightarrow 1} g(x))$

➤ Sexa $h(x) = |x|$.

É fácil observar que cando x se acerca ao cero

pola dereita ou pola esquerda, $h(x)$ tamén se

acerca ao cero, polo tanto $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$



Definición de Límite nun punto:

Unha función $f(x)$ ten **límite** L no punto a cando podemos facer $f(x)$ tan próximo a L como queiramos, sempre que x estea suficientemente próximo ao valor a , pero distinto de a . Representase por: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

Se nos fixamos nos exemplos anteriores, obsérvase que se establecía unha diferenza entre a tendencia pola dereita e pola esquerda. Isto dá lugar á definición de **límites laterais**:

Chámase **límite lateral pola esquerda da función f no punto a** , ao límite da función f no punto a cando tomamos valores próximos a a pero menores que a .

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x)$$

Chámase **límite lateral pola dereita da función f no punto a** , ao límite da función f no punto a cando tomamos valores próximos a a pero maiores que a .

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$$

Unha función f ten **límite nun punto a** se os seus límites laterais en dito punto existen e coinciden. É dicir:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \exists \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \quad , \quad \exists \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \end{cases}$$

Tema 8 : Límites de funcións. Continuidade e ramas infinitas

Por **exemplo** nas funcións de antes temos que:

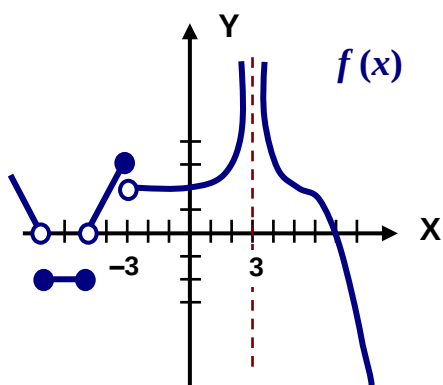
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \quad \text{pois tanto} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = -2 \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 1 \quad \text{pois tanto} \quad \pm \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 0 \quad \text{pois tanto} \quad \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$$

Na definición de límite, a función toma valores moi próximos a a , pero non toma o valor $x = a$. A función pode tomar calquera valor en a , ou incluso non estar definida.

Fíxate no seguinte exemplo:

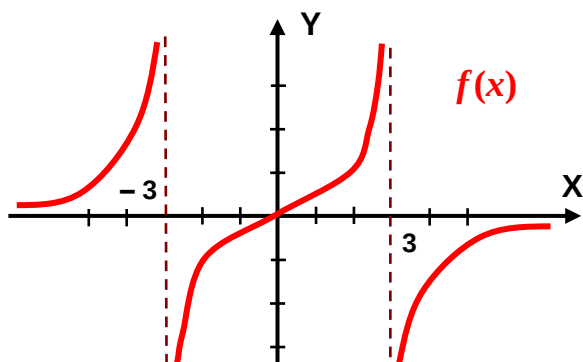


$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 2 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = 3 \Rightarrow \pm \lim_{x \rightarrow -3} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$$

EXERCICIO 1: Observando a gráfica da función $f(x)$ calcula os seguintes límites:



$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -3} f(x)$$

EXERCICIO 2: Mediante táboas de valores, calcula os seguintes límites:

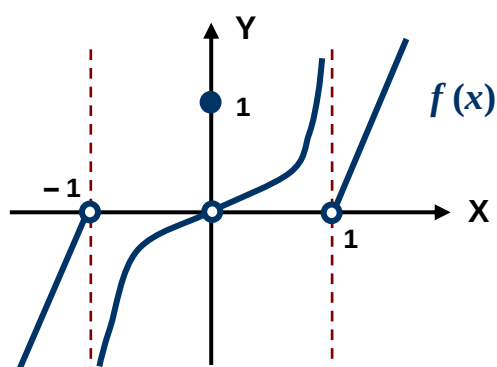
Tema 8 : Límites de funcións. Continuidade e ramas infinitas

$$\lim_{x \rightarrow 2} (4x + 1) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} (8 - x^2) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1}$$

Cálculo de límites:

Entendemos que unha función é **continua** cando se pode representar dun só trazo, sen saltos. As funcións elementais, as xa estudadas (polinómicas, proporcionalidade inversa, con radicais, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas) son continuas nos seus respectivos dominios de definición.



Normalmente, o límite dunha función f nun punto a pódese atopar calculando $f(a)$, pero non sempre é así, na función da esquerda, pódese observar que :

$$f(0) = 1 \quad \text{pero} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

Se $f(x)$ é unha función continua dada pola súa expresión analítica e está definida no punto $x = a$, entón para achar $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ calcularemos, sinxelamente, $f(a)$.

Así teremos, que: $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 1) = 3^2 + 1 = 10$; $\lim_{x \rightarrow -1} (2x + 5) = 2 \cdot (-1) + 5 = 3$

EXERCICIO 3: Calcula os seguintes límites:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (4x^2 - 5) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -7} \frac{x+1}{x^2-1} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{6x-4}{x^2+1} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{x+3}}{2x^2+4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{x^2+5} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x-5}{x^2-1} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{6x-2}}{2x-4} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5-2^{x+1}}{8x^2+3}$$

Nalgunhas ocasións, ao intentar calcular os límites, poden aparecer expresións da forma:

$$\frac{k}{0} \text{ con } k \neq 0 ; \frac{0}{0} ; \frac{\infty}{\infty} ; \infty - \infty ; 1^\infty ; \infty^0 ; \infty \cdot 0, 0^\infty$$

Tema 8 : Límites de funcións. Continuidade e ramas infinitas

Nestes casos diremos que o límite é unha *indeterminación* e teremos que usar outras ferramentas para calculalo.

Algunhas operacións que debes lembrar son:

$$(+\infty) + (+\infty) = (+\infty)$$

$$(-\infty) + (-\infty) = (-\infty)$$

$$k + (+\infty) = +\infty \quad \text{con } k \in \mathbb{R}$$

$$k + (-\infty) = -\infty \quad \text{con } k \in \mathbb{R}$$

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$$

$$(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$$

$$k \cdot (+\infty) = +\infty \quad \text{con } k \in \mathbb{R} \text{ e } k > 0$$

$$k \cdot (+\infty) = -\infty \quad \text{con } k \in \mathbb{R} \text{ e } k < 0$$

$$k \cdot (-\infty) = -\infty \quad \text{con } k \in \mathbb{R} \text{ e } k > 0$$

$$k \cdot (-\infty) = +\infty \quad \text{con } k \in \mathbb{R} \text{ e } k < 0$$

$$\frac{k}{\infty} = 0 \quad \text{con } k \in \mathbb{R}$$

$$\frac{+\infty}{k} = +\infty \quad \text{con } k \in \mathbb{R} \text{ e } k > 0$$

$$\frac{+\infty}{k} = -\infty \quad \text{con } k \in \mathbb{R} \text{ e } k < 0$$

Tema 8 : Límites de funcións. Continuidade e ramas infinitas

Indeterminación do tipo $\frac{k}{0}$ con $k \neq 0 \implies$ Temos que calcular os límites laterais.

❖ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x + 1}{2x - 6} = \frac{9 - 9 + 1}{6 - 6} = \frac{1}{0}$ **Indeterminación**, calculamos os laterais:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 3x + 1}{2x - 6} = \frac{1}{0^-} = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 3x + 1}{2x - 6} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Polo tanto, como os límites laterais non coinciden, $\pm \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x + 1}{2x - 6}$.

❖ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{x^2} = \frac{4}{0}$ **Indeterminación**, calculamos os límites laterais:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4}{x^2} = \frac{4}{0^+} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4}{x^2} = \frac{4}{0^+} = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{x^2} = +\infty$$

EXERCICIO 4: Calcula os seguintes límites:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x}{x^2 - 1} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x}{x^2 - 16} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x + 1}{(x - 2)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{x^2 - 9} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{2x + 6} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 5}{-3x^2}$$

Indeterminación do tipo $\frac{0}{0} \implies$ Temos que distinguir dous casos:

- a) Se f é unha **función racional**, **descompóñense** (polo método de Ruffini) **numerador e denominador en factores e simplifícase**. Exemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{1 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0} \text{ **indet.** } \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)} \cdot (x+1)}{\cancel{(x-1)}} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 1+1 = 2$$

- b) Se se trata dunha **función con raíces cadradas no numerador (ou no denominador)**, **multiplicamos numerador e denominador polo conxugado do numerador (ou do denominador)**. Exemplo:

Tema 8 : Límites de funcións. Continuidade e ramas infinitas

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{1-x} - 1} &= \frac{0}{\sqrt{1-0} - 1} = \frac{0}{0} \text{ indeterminación} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{1-x} - 1} = \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \cdot (\sqrt{1-x} + 1)}{(\sqrt{1-x} - 1) \cdot (\sqrt{1-x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \cdot (\sqrt{1-x} + 1)}{1 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\cancel{x} \cdot (\sqrt{1-x} + 1)}{-\cancel{x}} = \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot (\sqrt{1-x} + 1)}{-1} = \frac{3 \cdot (1+1)}{-1} = -6\end{aligned}$$

EXERCICIO 5: Calcula o valor dos seguintes límites:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^4 - 1} &; \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3} &; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^2 - 1}{x} &; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 6}{(x-2)^2} \\ \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 4} &; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} &; \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2x+6}}{2+x} &; \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+4}{x^2 - 4}\end{aligned}$$

Indeterminación do tipo $\infty - \infty$



Facemos a resta :

❖ Exemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right) = \frac{2}{1-1} - \frac{1}{1-1} = \frac{2}{0} - \frac{1}{0} = \infty - \infty \text{ indet.}$$

(en caso de existiren, pois teriamos que calcular os límites laterais)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - (x+1)}{(x-1) \cdot (x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{x} - 1}{(\cancel{x} - 1) \cdot (x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

EXERCICIOS:

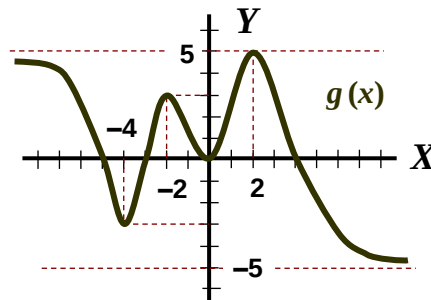
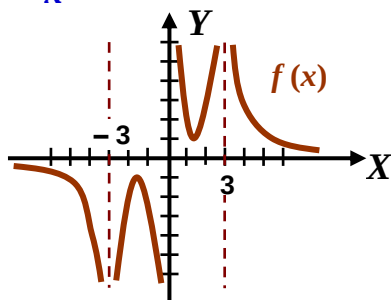
6.- Calcula os seguintes límites:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2+x)^3 - 8}{x} &; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}} &; \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 4}{x^3 + 2x^2 + 5x + 10} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{x+1}} &; \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x^2 + 2x + 5}{x^2 - 6x - 7} &; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 5x + 4} \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 - 4x + 4} &; \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 2x - 8} &; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - 5x + 2}{x^2 + 2x} - \frac{x^3 + 2x + 1}{x^3 + x} \right)\end{aligned}$$

Tema 8 : Límites de funcións. Continuidade e ramas infinitas

7.- Sexa $f(x) = \frac{x^4 - 3x^3 + 2x^2}{x^2 - x}$. Calcula: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

8.- Observa as gráficas e calcula os límites que se indican:



$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) ; \quad \lim_{x \rightarrow -3} g(x) ; \quad \lim_{x \rightarrow -2} g(x)$$

9.- Dada a función $t(x) = \frac{x-3}{x^2-5x+6}$. Calcula o límite de $t(x)$ cando $x \rightarrow 0, 2, 3$.

10.- Calcula o valor, se existe, dos seguintes límites:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-6x+9} ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x} \right) ; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1-\sqrt{3-x}}{x-2} ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2}$$

Definición de Límite no infinito:

Unha función $f(x)$ ten límite L cando x tende a $+\infty$ (ou $-\infty$), cando os valores da función tenden a L conforme x tende a $+\infty$ (ou $-\infty$). Representase por:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

Cando $x \rightarrow +\infty$ (ou $x \rightarrow -\infty$) o protagonista dunha función polinómica é o seu termo de maior grao, pois, para valores grandes de x , o valor das potencias de grao inferior é insignificante comparado co seu. Por exemplo: para o polinomio $x^3 - 7x^2$

$$\text{para } x = 1000 \quad \begin{cases} x^3 = 1000000000 \\ -7x^2 = -7000000 \end{cases} \Rightarrow \text{O resultado é } 993000000$$

Polo tanto, á hora de calcular límites no infinito de funcións polinómicas, só nos fixaremos no termo de maior grao da función.

$$\diamond \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x + 1) = (+\infty)^2 = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^2 - x + 7) = -3 \cdot (+\infty)^2 = -\infty$$

$$\diamond \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - x^3 + 3) = (-\infty)^4 = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3 - 5x^2) = 3 \cdot (-\infty)^3 = -\infty$$

Tema 8 : Límites de funcións. Continuidade e ramas infinitas

❖ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 - x^3) = (-\infty)^5 = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + x) = -2 \cdot (-\infty)^3 = +\infty$

❖ Indeterminación do tipo $\frac{\infty}{\infty}$



Temos que dividir o numerador e o denominador entre a variable de maior expoñente. Exemplos:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^5 - x^2 + 1}{x^3 + 1} = \frac{\infty}{\infty}$ **indet.** $\Rightarrow$ Divido numerador e denominador por x^5

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3x^5}{x^5} - \frac{x^2}{x^5} + \frac{1}{x^5}}{\frac{x^3}{x^5} + \frac{1}{x^5}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^5}} = \frac{3 - 0 + 0}{0 + 0} = \frac{3}{0} = +\infty$

Neste caso é $+\infty$ pois miro o signo das variables de maior expoñente no numerador e no denominador e como neste caso os dous son positivos, $\frac{+}{+} = +$.

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x + 2}{\sqrt{x^4 + 1} + 3x} = \frac{\infty}{\infty}$ **indeterm.** $\Rightarrow$ Divido numerador e denominador

por x^2 posto que a x de maior expoñente é $x^{\frac{4}{2}} = x^2$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{5x}{x^2} + \frac{2}{x^2}}{\sqrt{\frac{x^4}{x^4} + \frac{1}{x^4}} + \frac{3x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} + \frac{3}{x}} = \frac{0 + 0}{\sqrt{1} + 0} = 0$

Regra práctica para o cálculo deste tipo de límites: Sexa $f(x) = \frac{a \cdot x^p + a' \cdot x^{p-1} + \dots}{b \cdot x^q + b' \cdot x^{q-1} + \dots}$

⚙ Se $p > q$ entón o límite será $+\infty$ ou $-\infty$ (depende do signo de $\frac{a}{b}$)

💡 Se $p = q$ entón o límite será $\frac{a}{b}$. ⚡ Se $p < q$ entón o límite será 0.

Tema 8 : Límites de funcións. Continuidade e ramas infinitas

EXERCICIO 11: Calcula os seguintes límites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 1}{x^4} ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 6x + 1}{x - 3} ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1+x)^2 - 1}{x} ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 6x + 8}{2x^2 - 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - x^6}{x^3 + 1} ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 1}}{x + 5} ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 4x + 7}{(x - 2)^2} ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^5 - 2x^2 - x}{x^2 - 1}$$

Indeterminación do tipo $\infty - \infty$

Se se trata da diferenza de funcións con raíces cadradas, *multiplicamos e dividimos pola expresión conxugada da función*. Exemplo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) &= \infty - \infty \quad \text{indeterminación, polo tanto:} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1) - (x-1)}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} = \frac{2}{\infty} = 0 \end{aligned}$$

Indeterminación do tipo $0 \cdot \infty$

Resólvense transformándoas en indeterminacións do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$

Exemplo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{\sqrt{x^4 - 2}} (2x - 3) &= 0 \cdot \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{\sqrt{x^4 - 2}} (2x - 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3(2x - 3)}{\sqrt{x^4 - 2}} = \frac{-\infty}{+\infty} \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{\sqrt{x^4 - 2}} (2x - 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{6x - 9}{x^2}}{\sqrt{\frac{x^4 - 2}{x^4}}} = 0 \end{aligned}$$

Indeterminacións do tipo 1^∞ .

Estas indeterminacións están relacionadas con número e . E calcúlanse da seguinte maneira

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x)(f(x)-1)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)(f(x)-1)}$$

Exemplo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 3x}{x^2 + 4} \right)^{x^2} = 1^\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 3x}{x^2 + 4} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x^2 \left(\frac{x^2 - 3x}{x^2 + 4} - 1 \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \frac{-3x - 4}{x^2 + 4}} = e^{-\infty} = 0$$

Tema 8 : Límites de funcións. Continuidade e ramas infinitas

Indeterminación do tipo 0^0 , ∞^0 e 0^∞

Estas indeterminacións resólvense aplicando logaritmos e transformándoas desta forma (aplicando a regra do logaritmo $\log a^b = b \log a$ nos anteriores límites).

Exemplo:

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{x^2+2} = 0^\infty \Rightarrow \ln(L) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{x^2+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 2) \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \infty \cdot (-\infty) = -\infty$$

Como $\ln(L) = -\infty \Rightarrow L = e^{-\infty} = 0$

Exemplo:

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} (x+1)^{\frac{1}{x}} = \infty^0 \Rightarrow \ln L = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x+1)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0$$

Como $\ln L = 0 \Rightarrow L = e^0 = 1$

Nota: A función polinómica crece mais rápido que a función logaritmo, e a función exponencial crece máis rápido que a función polinómica.

Nota: A indeterminación 0^∞ podemos resolvela con $\ln$. Pois se $0^\infty = A$, entón $\ln A = \ln 0^\infty \rightarrow \infty \cdot \ln 0 = \ln A \rightarrow \infty \cdot (-\infty) \rightarrow \ln A = -\infty \rightarrow A = e^{-\infty} = 0$

EXERCICIOS:

12.- Calcula os seguintes límites:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) & \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2-2} - 2x) & \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x+1} - \sqrt{x}) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) & \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - x) & \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+2}) \end{aligned}$$

13.- O número de individuos, en millóns, dunha poboación vén dado pola función:

$$f(t) = \frac{18+t^2}{(t+3)^2} \text{ onde } t \text{ é o tempo medido en anos dende } t=0. \text{ Calcula a poboación inicial e o tamaño da poboación a longo prazo (cando o tempo tende a infinito).}$$

14.- O rendemento (medido de 0 a 100), de certo produto en función do tempo de uso

$$(x \text{ en anos}) \text{ vén dado pola seguinte expresión: } f(x) = 8,5 + \frac{3x}{1+x^2}, \quad x \geq 0.$$

Por moito que pase o tempo, pode chegar a ser o rendemento inferior ao que o produto tiña cando era novo?

Tema 8 : Límites de funcións. Continuidade e ramas infinitas

Ramas Infinitas. Asíntotas

Entendemos por **Ramas infinitas** os tramos de curva que se afastan indefinidamente. Para que haxa unha rama infinita, é preciso que unha das variables, x ou y , ou ámbalas dúas, tendan a infinito.

Cando unha rama infinita se aproxima indefinidamente a unha recta, esa recta chámase **asíntota**, e á rama infinita, **rama asintótica**.

Cando unha rama infinita non se acerca a ningunha recta, chámase **rama parabólica**.

NOTA: A palabra **asíntota** deriva do grego e significa **sen atoparse**. Así, a curva achégase moitísimo á asíntota, pero nunca chegan a tocarse.

Hai tres tipos de asíntotas: **verticais**, **horizontais** e **oblicuas**.

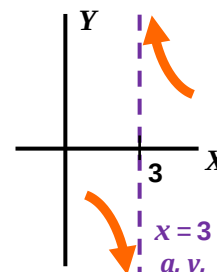
➔ **Asíntotas verticais:** son rectas verticais e calcúlanse da seguinte forma:

Se $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm \infty$ entón $x = c$ é unha asíntota vertical (**a. v.**). Teremos que calcular os límites laterais para saber cómo fai a función a cada lado da asíntota.

Por **exemplo:** Sexa $f(x) = \frac{x}{2x-6}$ (o denominador anúlase en $x = 3$)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{2x-6} = \frac{3}{0} \text{ indet.} \Rightarrow x = 3 \text{ é unha asíntota vertical}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x}{2x-6} = \frac{3}{0^+} = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x}{2x-6} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$



➔ **Asíntotas horizontais:** son rectas horizontais e calcúlanse da seguinte forma:

Se $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = k$ entón $y = k$ é unha asíntota horizontal (**a. h.**).

Agora toca calcular a posición da rama asintótica respecto da asíntota. Calculamos o signo de $f(x) - k$ tanto para valores moi grandes ($+\infty$) como moi pequenos ($-\infty$):

- Se $f(x) - k > 0$ a rama asintótica está por encima da asíntota.
- Se $f(x) - k < 0$ a rama asintótica está por debaixo da asíntota.

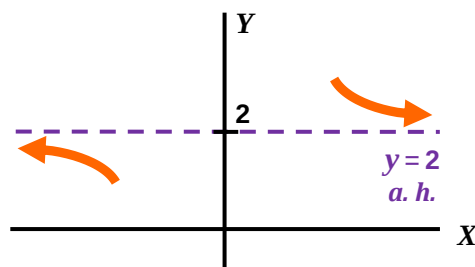
Tema 8 : Límites de funcións. Continuidade e ramas infinitas

Por **exemplo:** Sexa $f(x) = \frac{4x^2-5}{2x^2-x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2-5}{2x^2-x} = \frac{4}{2} = 2 \square y = 2 \text{ a. h.}$

$$f(x) - 2 = \frac{4x^2-5}{2x^2-x} - 2 = \frac{4x^2-5-4x^2+2x}{2x^2-x} = \frac{2x-5}{2x^2-x}$$

$$\text{Se } x \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{2x-5}{2x^2-x} > 0$$

$$\text{Se } x \rightarrow -\infty \Rightarrow \frac{2x-5}{2x^2-x} < 0$$



➡ **Asíntotas oblicuas :** son rectas oblicuas do estilo $y = mx + n$, sendo:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0 \quad \text{e} \quad n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx).$$

Regra práctica para saber se unha función racional (cociente de polinomios) ten

asíntotas horizontais ou oblicuas: Sexa $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$

- Se $p(x)$ é de menor grao que $q(x)$ $\square$ $y = 0$ é **asíntota horizontal**.
- Se $p(x)$ é do mesmo grao que $q(x)$ $\square$ **terá unha asíntota horizontal**.
- Se $p(x)$ é un grao superior a $q(x)$ $\square$ **terá unha asíntota oblicua**.

EXERCICIOS:

15.- Acha as ramas infinitas das seguintes funcións e, a partir delas, perfila a forma da curva:

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-2x} \quad ; \quad g(x) = \frac{x^2-5x+7}{x-2} \quad ; \quad h(x) = \frac{x^2+1}{x^2+4x} \quad ; \quad m(x) = \frac{x+1}{x^2-9}$$

16.- Acha as ramas infinitas das seguintes funcións e, a partir delas, perfila a forma da curva:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-4} \quad ; \quad g(x) = \frac{-2x^2+3}{2x^2-2} \quad ; \quad h(x) = \frac{x^3+1}{x+5}$$

Tema 8 : Límites de funcións. Continuidade e ramas infinitas

Continuidade. Tipos de discontinuidades

Se te lembrás, xa tiveches unha primeira definición de funcións continuas, aquelas que se poden debuxar sen levantar o lapis do papel (esta definición ten un inconveniente, que pasa se non me dan a gráfica da función?). Agora veremos outra maneira de definilas, usando o concepto de límites, así poderemos obter, sen ter a gráfica, se unha función é continua ou non.

Unha función f é **continua** no punto a se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

A interpretación desta definición é a seguinte: f é continua no punto a se para valores de x próximos a a tense que os valores das súas imaxes $f(x)$ están próximos a $f(a)$.

Nesta definición, resúmense as tres condicións seguintes:

Unha función f é **continua no punto** a se :

- 1) Existe $f(a)$ (é dicir, a función está definida en $x = a$)
- 2) Existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (é dicir, existen os límites laterais e coinciden)
- 3) Os dous valores anteriores coinciden, ou sexa: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Continuidade lateral:

Unha función é continua pola esquerda nun punto de abscisa x_0 se existe límite pola esquerda nese punto e coincide co valor da función en x_0 , é dicir, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Da mesma maneira, dise que unha función é continua pola dereita nun punto de abscisa x_0 se existe límite pola dereita nese punto e coincide co valor da función en x_0 , é dicir: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$

Continuidade dunha función nun intervalo.

Unha función $y = f(x)$ é continua nun intervalo aberto (a, b) se e só se é continua en todos os puntos do intervalo.

Unha función $y = f(x)$ é continua nun intervalo pechado $[a, b]$ se e só se cumpre as seguintes condicións:

- f é continua no intervalo aberto (a, b)
- f é continua pola dereita en $x = a$
- f é continua pola esquerda en $x = b$

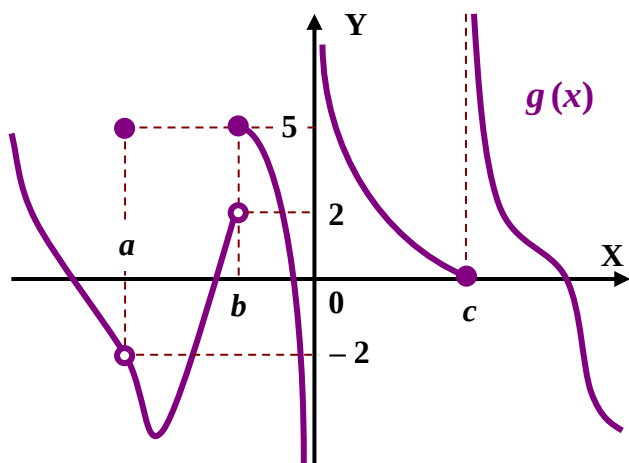
Se o fose en todo o dominio, diremos que a función é continua.

Diremos que unha función é **descontinua nun punto** cando non é continua en dito punto.

Tema 8 : Límites de funcións. Continuidade e ramas infinitas

Unha función pode ser descontinua por varias razóns:

- ★ **Descontinuidade evitable** : Cando existe límite no punto pero non coincide co valor da función en dito punto ou non está definida.
- ★ **Descontinuidade Inevitable** : Cando existen os límites laterais pero non coinciden. O valor absoluto da diferenza dos límites laterais chámase **salto da función**, e pode ser **finito** ou **infinito** (segundo os límites laterais sexan números ou ∞).



En a ten unha **descontinuidade evitable**, chámase así porque se pode evitar facendo $g(a) = -2$ en lugar de $g(a) = 5$.

En b ten unha **descontinuidade inevitable de salto finito**. O salto vale $|5 - 2| = 3$.

En 0 e en c ten **descontinuidade inevitable de salto infinito**. No 0 os límites laterais son $-\infty$ e $+\infty$; En c valen 0 e $+\infty$.

Algunhas funcións, polas súas características, son continuas *no seu dominio*, entre elas están as **funcións polinómicas, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas** e tamén as operacións que se poidan facer coas funcións continuas no seu novo dominio.

(O problema está nas funcións definidas a cachos, nos puntos nos que cambia a súa expresión. É aí onde hai que facer o estudo da continuidade)

Exemplos:

a) Sexa $f(x) = 4x + 5$; vexamos a continuidade no 2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2} (4x + 5) = 4 \cdot 2 + 5 = 13 \\ f(2) = 4 \cdot 2 + 5 = 13 \\ \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 13 \end{array} \right.$$

Polo tanto a función f é continua no 2 .

b) Sexa $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$; $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \pm \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

Polo tanto a función g non é continua no 0 , ten unha **descontinuidade** de tipo **inevitable de salto finito**, o salto vale $|1 - (-1)| = 2$

Tema 8 : Límites de funcións. Continuidade e ramas infinitas

c) Sexa $h(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$; $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2 \neq 0 = h(1)$

Polo tanto h non é continua no 1, ten unha **descontinuidade de tipo evitable**,

e evitaríase redefinindo a función a esta outra: $h(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \neq 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \end{cases}$

d) Calcula o valor de λ para que a función $r(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \leq 2 \\ \lambda - x & \text{se } x > 2 \end{cases}$ sexa continua.

En principio, $r(x)$ é continua en todos os puntos excepto en $x = 2$ para calquera valor de λ por ser función polinómica. Vexamos que ocorre no 2 :

$$r(2) = 2 + 1 = 3$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} r(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x+1) = 2+1 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} r(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (\lambda - x) = \lambda - 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 3 = \lambda - 2 \Rightarrow \lambda = 5$$

Así temos que $r(2) = 3 = \lim_{x \rightarrow 2} r(x)$ e polo tanto $r(x)$ é continua no 2.

Se $\lambda = 5$ a función é continua en $\mathbb{R}$. Se $\lambda \neq 5$ a función é continua en $\mathbb{R} - \{2\}$.

Exemplo: Estuda a continuidade da seguinte función: $f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{se } x < -1 \\ x^2 + 4 & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$

En principio, a función é continua en todos os puntos excepto no -1 por tratarse de funcións polinómicas (que xa sabemos que son continuas).

Estudo a continuidade en $x = -1$:

1. Calculo o $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$, para isto teño que calcular os límites laterais, pois a expresión da función cambia ao acercarme a -1 pola dereita ou pola esquerda:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (2-x) = 2+1 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 + 4) = 1+4 = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$$

Logo $\nexists \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ polo que a función non é continua en $x = -1$, é dicir:

A función $f(x)$ é continua en todos os puntos excepto en $x = -1$ que presenta unha **descontinuidade inevitable de salto finito**, con valor $5 - 3 = 2$.

Tema 8 : Límites de funcións. Continuidade e ramas infinitas

Exemplo: Estuda a continuidade da seguinte función: $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 1 \\ 2^{x-1} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

En principio, a función é continua en todos os puntos excepto en $x = 1$ por tratarse de funcións constante e exponencial (sabemos que son continuas).

Estudo a continuidade en $x = 1$:

1. Calculo o $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$, para isto teño que calcular os límites laterais, pois a expresión da función cambia ao acercarme a 1 pola dereita ou pola esquerda:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2^{x-1} = 2^0 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1$$

2. Calculo $g(1) = 2^{1-1} = 2^0 = 1$.

3. $g(1) = 1 = \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$

A función $g(x)$ é continua en $x = 1$. Entón podemos afirmar que:

A función $g(x)$ é continua en todos os puntos do seu dominio, que é $\mathbb{R}$.

EXERCICIOS:

17.- Estuda a continuidade das seguintes funcións:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{se } x < -2 \\ 3 & \text{se } -2 \leq x < 1 \\ 4x-1 & \text{se } x > 1 \end{cases} ; \quad g(x) = \begin{cases} x^2-2 & \text{se } x < -1 \\ 3x-1 & \text{se } -1 \leq x < 4 \\ 4\sqrt{x}+3 & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$$

18.- Estuda a continuidade das funcións: $h(x) = \frac{2x^2-8}{x^2-4x+4}$; $m(x) = \frac{2x^2-2x-12}{x^2-3x}$

19.- Calcula os seguintes límites:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{7-5x}{x^2+1} \right)^{2-5x} ; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \log_2 \left(\frac{3x+4}{x^2+1} \right)^5 ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+e^x}{\ln(x+e)} ; \quad \lim_{x \rightarrow 10} \log(2\sqrt{3x-5})^3$$

20.- Calcula o valor de k para que sexa continua a función: $f(x) = \begin{cases} x^2-4 & \text{se } x \leq 3 \\ x+k & \text{se } x > 3 \end{cases}$ $k = 2$

Tema 8 : Límites de funcións. Continuidade e ramas infinitas

21.- Calcula, en cada caso, o valor de k para que sexan continuas as funcións:

$$f(x) = \begin{cases} 6 - \frac{x}{2} & \text{se } x < 2 \\ x^2 + kx & \text{se } x \geq 2 \end{cases} \quad k = \frac{1}{2} ; \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ k & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad k = 1$$

22.- Os gastos mensuais en euros que unha familia ten en alimentación veñen dados pola función:

$$g(x) = \begin{cases} 0,4x + k & \text{se } 0 \leq x \leq 1000 \\ \frac{2000x}{x + 3000} & \text{se } x > 1000 \end{cases} \quad \text{onde } x \text{ son os ingresos da familia en euros.}$$

- a) Atopa o valor de k para que os gastos sexan continuos. $k = 100$
 b) Cara a que valor se estabilizan os gastos de alimentación das familias coa renda máis alta? 2000

23.- Sexa $P(t)$ a porcentaxe de persoas, dunha determinada cidade, afectadas por un certo tipo de enfermidade ao cabo dun tempo t , medido en meses:

$$P(t) = \begin{cases} t^2 & \text{se } 0 \leq t \leq 5 \\ \frac{100t - 250}{t + 5} & \text{se } t > 5 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{a) Estuda a continuidade da función } P(t). \\ \text{b) Cal é a tendencia desta enfermidade?} \end{array}$$

- c) Nalgún momento a porcentaxe de persoas afectadas podería valer 50? $t = 10$

24.- A función $p(t) = \begin{cases} 2 + t^2 & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{8t^2 - t - 1}{2t^2} & \text{se } t > 1 \end{cases}$ mostra como varía a profundidade da

capa de area dunha praia dende a construción dun dique (p en metros e t en anos). Se a profundidade chega a superar os 4 m, terase que elevar o paseo marítimo.

- a) Estuda se a profundidade é unha función continua do tempo.
 b) A longo prazo, será necesario elevar a altura do paseo?

25.- A seguinte función representa a valoración dunha empresa, en millóns de euros, en función do tempo, t , nos últimos 13 anos:

$$f(t) = \begin{cases} 5 - 0,1t & \text{se } 0 \leq t < 5 \\ a + 0,05(t - 5) & \text{se } 5 \leq t < 10 \\ 4,75 + 0,3(t - b) & \text{se } 10 \leq t \leq 13 \end{cases}$$

- a) Calcula o valor de a e b para que a valoración da empresa sexa unha función continua do tempo. $a = 4,5$; $b = 10$
 b) Cal era o valor inicial da empresa? E o seu valor aos 13 anos? 5 e $5,65$ millóns

Tema 8 : Límites de funcións. Continuidade e ramas infinitas

EXERCICIOS:

26.- Estuda a continuidade da seguinte función: $f(x) = \begin{cases} e^{3-x} & \text{se } x \leq 3 \\ \log_2(x-2) & \text{se } x > 3 \end{cases}$

27.- Determina a e b para que sexa continua a función: $f(x) = \begin{cases} 3x+b & \text{se } x < -2 \\ 4 & \text{se } -2 \leq x \leq 3 \\ ax-b & \text{se } x > 3 \end{cases}$

28.- Existe algún valor de k para o cal sexa continua $f(x) = \begin{cases} 3x-2 & \text{se } x < 1 \\ 4 & \text{se } x = 1 \\ -2x+k & \text{se } x > 1 \end{cases}$?

29.- As ganancias totais dunha empresa (que comercializa aspiradores), en función do número de aspiradores vendidos, x , pódese aproximar pola función:

$$G(x) = \begin{cases} 10x \cdot (x-50) & \text{se } 0 \leq x \leq 50 \\ 50\sqrt{x^2 + 36x - 4300} & \text{se } x > 50 \end{cases}$$

- a) Hai algunha diferenza esencial entre vender 49 unidades e vender 51 unidades?
- b) Xustifica que a función ganancia total é continua.
- c) Cantos aspiradores hai que vender para obter a menor ganancia?
- d) Vendendo moitas unidades, pódese chegar a ganar 60€ por unidade?
- e) Cal é a ganancia máxima por unidade que se pode obter?

30.- Dada a función $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + h$ (un polinomio de grao n), xustifica se son **Verdadeiras** ou **Falsas** as seguintes afirmacións:

a) Se $a > 0$ e n é par, entón $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

b) Se $a > 0$ e n é impar, entón $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

c) Se $a < 0$ e n é par, entón $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

d) Se $a < 0$ e n é impar, entón $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

e) Se $a < 0$ e n é par, entón $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

f) Se $a < 0$ e n é impar, entón $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Tema 8 : Límites de funcións. Continuidade e ramas infinitas

Criterios de avaliación

1. Coñecer os significado analítico e gráfico dos distintos tipos de límites e identificalos sobre unha gráfica
2. Adquirir certo dominio do cálculo de límites sabendo interpretar o significado gráfico dos resultados obtidos
3. Coñecer o concepto de función continua e identificar a continuidade ou a descontinuidade dunha función nun punto
4. Coñecer os distintos tipos de ramas infinitas (ramas parabólicas e ramas que se cinguen a asíntotas verticais horizontais e oblicuas) e dominar a súa obtención en funcións polinómicas e racionais.

Estándares de aprendizaxe avaliáveis

1.1. Dada a gráfica dunha función recoñece o valor dos límites cando

$x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow a^-$, $x \rightarrow a^+$, $x \rightarrow a$

1.2. Interpreta graficamente expresións do tipo $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \beta$ (α e β son $+\infty$, $-\infty$ ou un número) así como os límites laterais

2.1. Calcula o límite nun punto dunha función continua

2.2. Calcula o límite nun punto dunha función racional na que se anula o denominador e non o numerador e distingue o comportamento pola esquerda e pola dereita

2.3. Calcula o límite nun punto dunha función racional na que se anulan numerador e denominador

2.4. Calcula os límites cando $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$ de funcións polinómicas

2.5. Calcula os límites cando $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$ de funcións racionais

2.6. Calcula os límites de funcións definidas “a anacos”, nun punto calquera ou cando $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$

3.1. Dada a gráfica dunha función recoñece se en certo punto é continua ou descontinua e neste último caso identifica a causa da descontinuidade.

Tema 8 : Límites de funcións. Continuidade e ramas infinitas

- 3.2. Estuda a continuidade dunha función dada “a anacos”
- 3.3. Estuda a continuidade de funcións racionais dadas pola súa expresión analítica
- 4.1. Acha as asíntotas verticais dunha función racional e representa a posición da curva respecto a elas
- 4.2. Estuda e representa as ramas infinitas dunha función polinómica
- 4.3. Estuda e representa o comportamento dunha función racional cando $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$ (Resultado: ramas parabólicas)
- 4.4. Estuda e representa o comportamento dunha función racional cando $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$ (Resultado asíntota horizontal)
- 4.5. Estuda e representa o comportamento dunha función racional cando $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$ (Resultado : asíntota oblicua)
- 4.6. Acha as ramas infinitas dunha función racional e representa a posición da curva respecto a elas)
- 4.7. Estuda e representa as ramas infinitas en funcións trigonométricas, exponenciais e logarítmicas sinxelas