

Tema 7: Funcións elementais

Concepto de Función

Chámase *MAGNITUDE* a todo aquilo que se pode medir (Áreas, alturas, peso ...).
As Magnitudes que poden variar o seu valor chámanse *VARIABLES* e poden ser *Dependentes* ou *Independentes*.

As **Variables Independentes** só varían se lle damos nós calquera valor numérico.

As **Variables Dependentes** varían segundo o valor que se lle dea ás independentes.

Cando expresamos matematicamente (con letras, números e signos matemáticos) a relación existente entre variables dependentes e independentes creamos unha ***Relación Matemática***.

Unha **FUNCIÓN** é unha relación na que ***para cada valor da variable independente obtemos un único valor da variable dependente***.

Por exemplo: A relación que asigna a cada *persoa* a súa *nai* é función.

A *velocidade* que leva un obxecto depende do tempo, é función do *tempo*.

A *presión* da auga do mar é función da *profundidade*.

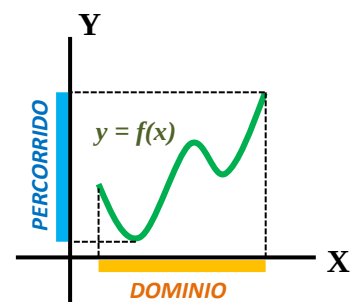
A relación que asigna a cada *muller* os seus *fillos* non é función.

Todas as funcións teñen unha única variable dependente, pero poden ter varias variables independentes. Nós imos estudar funcións con dúas variables, unha dependente e outra independente. Ademais, as dúas variables toman valores reais, por iso dicimos que son **funcións reais de variable real**:

$$\begin{array}{lcl} f : D \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = y \end{array} \quad \begin{array}{l} x \text{ é a variable independente.} \\ y \text{ é a variable dependente.} \end{array}$$

Chamamos **DOMINIO** dunha función ao conxunto de valores que lle podemos dar á variable independente para que exista a variable dependente (é dicir, o conxunto de valores para os que ten sentido a función).

Chamamos **IMAXE** ou **PERCORRIDO** dunha función ao conxunto de todos os posibles valores que pode acadar a variable dependente (é dicir, que toma a función).



O dominio dunha función varía segundo sexa a función. Temos que fixarnos en cando teñen sentido as operacións que aparecen en dita función. Por exemplo se se trata dunha fracción, sabemos que cando se faga cero o denominador non existe, polo que os valores que fagan cero o denominador dunha fracción non pertencerán ao dominio.

Do mesmo modo, se temos unha raíz de índice par, o radicando ha de ser un número positivo ou cero. Se temos un logaritmo, sabemos que só existen para valores maiores que cero (tampouco existe o logaritmo de cero). O dominio tamén se pode ver restrinxido polo contexto real do que se extraeu a función (por exemplo, se fala de

Tema 7: Funcións elementais

obxectos fabricados, non pode ser unha cantidade negativa) ou tamén por vontade propia de quen propón a función.

As funcións poden chegarnos en diversos formatos: Mediante a súa gráfica, pola súa expresión analítica (fórmula) ou mediante un enunciado.

A representación gráfica permite que teñamos unha idea moi clara de como é a función cun só golpe de vista.

Cando temos a representación gráfica dunha relación matemática, para ver se é función, trazamos rectas verticais e, se a tocan en máis de un punto, non son funcións; ou sexa: **para ser funcións, as rectas verticais só poden cortala nun punto.**

Exemplo: Calcula os dominios das seguintes funcións:

$$a) f(x) = \frac{1}{2x^2 - 18} \quad b) g(x) = \sqrt{4x - x^2} \quad c) h(x) = 4x^2 - 12x - 40$$

a) Resolvemos a ecuación $2x^2 - 18 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$ polo que $Dom(f) = \mathbb{R} - \{3, -3\}$.

b) É unha raíz cadrada, polo tanto terá sentido cando $4x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0, 4] \Rightarrow Dom(g) = [0, 4] = \{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x \leq 4\}$.

c) É un polinomio e os polinomios existen sempre, logo $Dom(h) = \mathbb{R}$

EXERCICIOS:

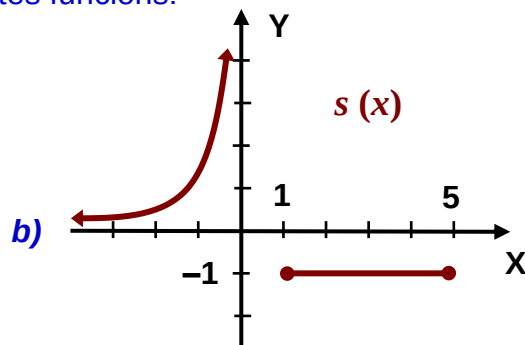
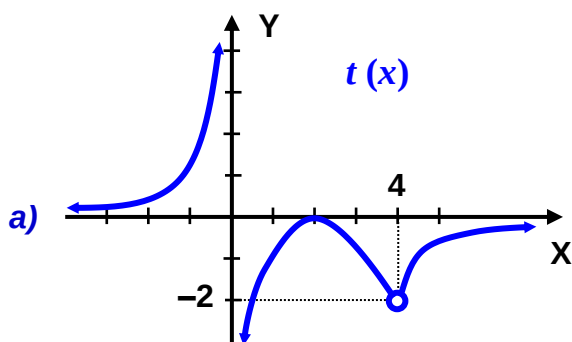
1.- Atopa o Dominio das seguintes funcións:

$$f(x) = \frac{7x^2 + x + 3}{2x - 8} \quad ; \quad g(x) = \frac{2x^3 - 5}{4x^2 - 1} \quad ; \quad h(x) = \sqrt{2x - 6}$$

$$a(x) = x^8 - x^4 + \sqrt{2}x^3 - 7 \quad ; \quad b(x) = \sqrt{x^2 + 1} \quad ; \quad r(y) = \sqrt{-y^2 + 4}$$

$$p(x) = \frac{3x - 6}{2x^2 + 5} \quad ; \quad q(z) = \sqrt[3]{2z^2 - 18} \quad ; \quad m(x) = \log(x^2 - 4)$$

2.- Estuda o Dominio e o Percorrido das seguintes funcións:



c) $f(x) = x^2 + 4x$

d) $g(x) = 7x - 5$

e) $h(x) = 3$

Tema 7: Funcións elementais

Familias de Funcións

FUNCIÓN AFÍN: É unha función polinómica de primeiro grao. Son da forma $y = mx + n$. A súa gráfica é unha recta con pendente m que pasa polo punto $(0,n)$. O número n chámase ordenada na orixe (onde corta o eixo Y).

Características:

- Se $m = 0$ a función $y = n$ denomínase **constante**, e a súa gráfica é unha recta paralela ao eixo X, que pasa polo punto $(0,n)$.
- Se $n = 0$ a función $y = mx$ denomínase **linear** ou **de proporcionalidade** e a súa gráfica é unha recta que pasa pola orixe de coordenadas.
- Se $m > 0$ a función é **crecente** e • Se $m < 0$ a función é **decrecente**.

Unha función afín queda perfectamente determinada se coñecemos:

- ♦ a pendente, m , e un punto polo que pasa (x_0, y_0) : $y - y_0 = m(x - x_0)$. Esta expresión da recta chámase **ecuación punto-pendente**.
- ♦ dous puntos polos que pasa: (x_0, y_0) e (x_1, y_1) : aplicamos o caso anterior facendo $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ e collemos un punto calquera dos dous que nos dan.

Que unha función, f , pase polo punto (x_0, y_0) quere dicir que $f(x_0) = y_0$.

EXERCICIOS:

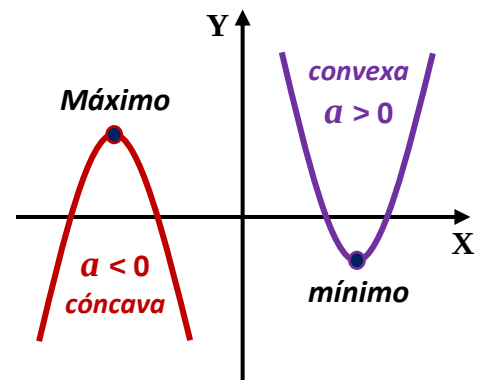
3.- Representa a seguinte función: $f(x) = -2x + 7$, $x \in [1,4]$.

4.- Calcula a expresión analítica da función afín f que cumpre: $f(3) = 5$, $f(7) = -4$ e $\text{Dom}(f) = [0,10]$. Representaa.

FUNCIÓN CUADRÁTICA: É unha función polinómica de segundo grao. Teñen a seguinte expresión: $y = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$. Son as **parábolas**.

Características:

- O dominio é $\mathbb{R}$.
- O vértice é (x_v, y_v) sendo $x_v = -\frac{b}{2a}$.
 y_v obtense substituíndo o valor de x_v na función.
- Canto maior sexa $|a|$ máis pechada é a parábola.
- Para representalas calculamos: vértice, puntos de corte cos eixos e unha pequena táboa de valores.



Tema 7: Funcións elementais

EXERCICIO 8: Representa as seguintes funcións: $f(x) = x^2 - 6x + 5$; $g(x) = -2x^2 + 4x + 1$ e $h(x) = -2x^2 - 8x - 7$. Calcula os seus percorridos. Que podes dicir de $g(x)$ e $h(x)$?

Dados tres puntos non aliñados, existe unha única parábola que pasa por eles. Para calculala facemos como se indica no exemplo seguinte:

Exemplo: Calcula a ecuación da parábola que pasa polos puntos $(1, -4)$, $(-1, 0)$ e $(2, 3)$.

A expresión da parábola será: $y = ax^2 + bx + c$. Agora imos substituíndo cada punto na expresión e así obteremos tres ecuacións con tres incógnitas. Logo só nos queda resolver o sistema polo método de Gauss.

$$\text{Pasa por } (1, -4) \Leftrightarrow -4 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \Leftrightarrow a + b + c = -4$$

$$\text{Pasa por } (-1, 0) \Leftrightarrow 0 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c \Leftrightarrow a - b + c = 0$$

$$\text{Pasa por } (2, 3) \Leftrightarrow 3 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \Leftrightarrow 4a + 2b + c = 3$$

$$\begin{cases} a + b + c = -4 \\ a - b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 3 \end{cases} \xrightarrow[3^a - 4 \cdot 1^a]{\begin{matrix} 1^a \\ 2^a - 1^a \end{matrix}} \begin{cases} a + b + c = -4 \\ -2b = 4 \\ -2b - 3c = 19 \end{cases} \quad \text{Logo } b = \frac{4}{-2} = -2. \text{ Substituímosla}$$

na terceira e temos: $-2 \cdot (-2) - 3c = 19 \Leftrightarrow -3c = 15 \Leftrightarrow c = -5$ e ao substituír

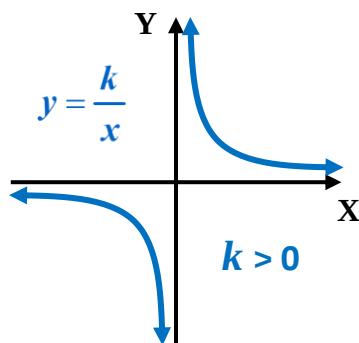
na 1ª obtemos que $a = 3 \Rightarrow y = 3x^2 - 2x - 5$.

EXERCICIO 9: Acha os puntos da parábola $y = x^2 + 6x + 5$ cuxas abscisas son 0, 3 e 5. Obtén a parábola que pasa por eses tres puntos e comproba que é a mesma.

Datos extraídos do IGE. Resultados reais: 2013 → 22% ; 2015 → 19,3%

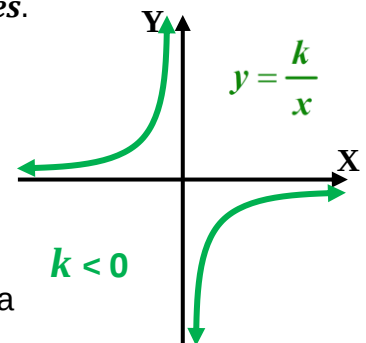
FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDADE INVERSA: Teñen a expresión: $y = \frac{k}{x}$ con $k \neq 0$

. Son as **hipérboles**.



Características:

- O dominio é $\mathbb{R} - \{0\}$.
- $x = 0$ (eixo Y) é asíntota vertical.
- $y = 0$ (eixo X) é asíntota horizontal.
- A gráfica non corta os eixos.
- Para representalas só calculamos unha táboa de valores, positivos e negativos.



EXERCICIO 12: a) Representa as funcións: $y = \frac{4}{x}$; $y = \frac{4}{x-3}$; $y = \frac{4}{x+2}$.

b) Representa tamén estas: $y = \frac{-2}{x}$; $y = \frac{-2}{x-3}$; $y = \frac{-2}{x+2}$.

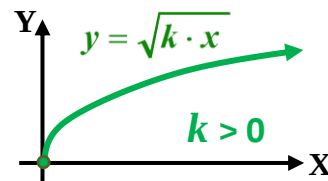
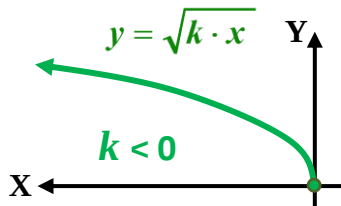
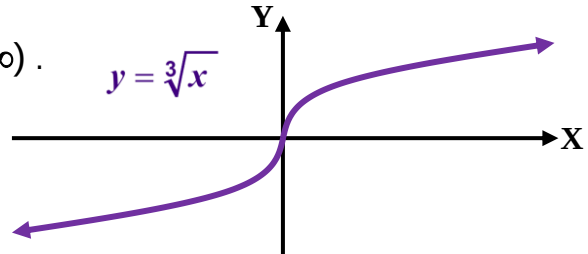
Tema 7: Funcións elementais

c) Que podes dicir das representacións do apartado a) ? e das do b) ?

FUNCIÓN IRRACIONAL (OU CON RADICAIS): Teñen a expresión: $y = \sqrt[n]{k \cdot x}$ con $k \neq 0$.

Características:

- Se n é par e $k > 0$, o dominio é $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$.
- Se n é impar, o dominio é $\mathbb{R}$.
- Para representalas só calculamos unha táboa de valores.



EXERCICIO 13: Representa as funcións: $y = \sqrt{2x}$; $y = \sqrt{-2x}$; $y = \sqrt[3]{-x}$.

FUNCIONES DEFINIDAS A ANACOS : Son funcións que teñen distintas expresións alxébricas dependendo do intervalo onde se atope a variable independente x .

A súa representación consiste en representar cada expresión no seu tramo correspondente, tendo en conta o valor da función nos extremos dos intervalos. Son doadas se sabemos representar cada un dos tramos e se pon atención ao seu comportamento nos puntos de empalme.

EXERCICIOS:

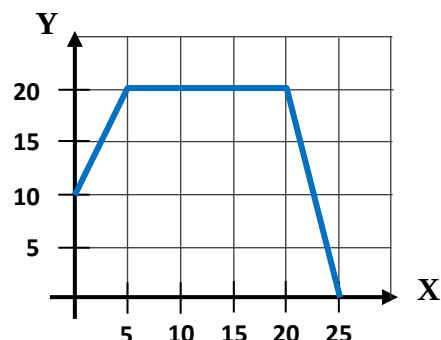
14.- Representa as seguintes funcións definidas a anacos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x < 4 \\ x - 3 & \text{se } x \geq 4 \end{cases} ; \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq -2 \\ \frac{-x+10}{3} & \text{se } -2 < x < 1 \\ -x^2 + 3x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

15.- Escribe a expresión analítica desta función:

Cal é o seu dominio?

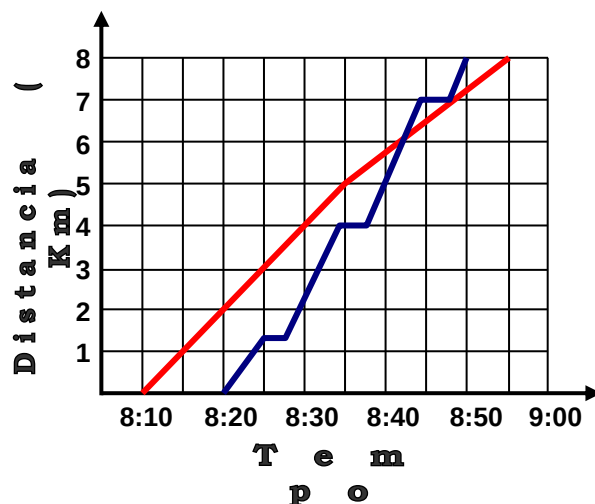
Cal é o seu percorrido



Tema 7: Funcións elementais

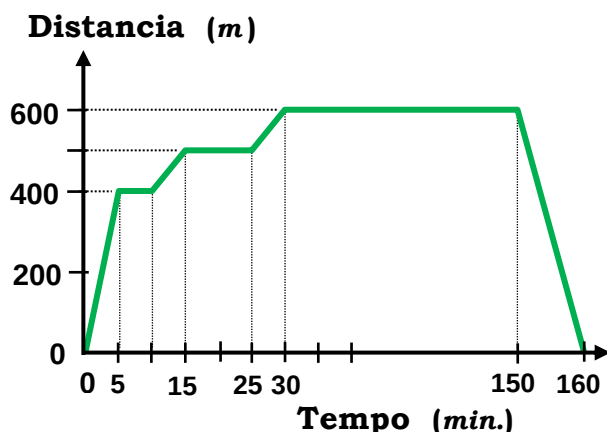
16.- Xurxo e Lucía viven á mesma distancia do instituto. Cada mañá, Lucía fai o percorrido da súa casa ao instituto en bicicleta. Ao principio, o terreo é chan, pero logo ten unha pequena pendente, o que fai que diminúa a velocidade. Xurxo fai o percorrido en autobús. Sempre o colle ás 8:15 horas e chega ao instituto ás 8:50 horas.

Observa as gráficas dos seus percorridos:



- Cantas veces se parou o Bus?
- A que hora adianta o Bus a Lucía?
- Que ocorreu no quilómetro 7 do percorrido?
- A cantos quilómetros do instituto están as casas de Xurxo e Lucía?
- Cantos quilómetros percorreu Lucía ás 8:35 h.? A que velocidade fixo o tramo?
- Foi puntual o Bus na chegada á parada de Xurxo? E na parada do instituto?

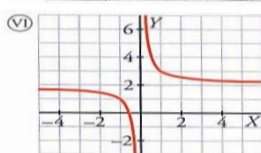
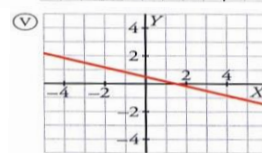
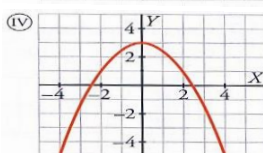
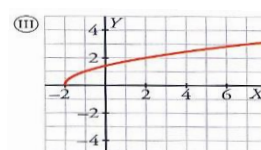
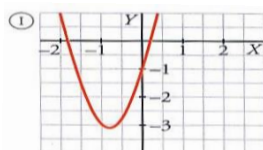
17.- Antón vai cada tarde ao instituto; pasa primeiro pola panadaría e compra un bolo, logo detense na seguinte esquina a esperar a unha compañeira. Por fin, despois das clases, volta para a casa. Aquí tes a gráfica do seu percorrido.



- Que distancia hai da casa ao instituto? E á panadaría?
- Canto tarda en comprar o bolo?
- Ten que esperar moito á compañeira?
- Canto duran as clases?
- Se as clases comezan ás 4 da tarde, onde estaba ás 3h 32min.; e ás 3h. 36min., e ás 3 h. 54 min.?
- Leva a mesma velocidade á ida que á volta?
- Estuda a velocidade en cada traxecto.

analítica.

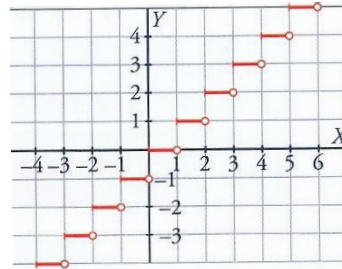
- $y = -0'5x^2 + 3$
- $y = \sqrt{x+2}$
- $y = \frac{x^2}{3} - 1$
- $y = \frac{1}{x-4}$
- $y = 3x^2 + 5x - 1$
- $y = \frac{1}{x} + 2$
- $y = \frac{1}{2} - \frac{x}{3}$
- $y = -\sqrt{-x}$



Tema 7: Funcións elementais

FUNCIÓN PARTE ENTEIRA: Chámase parte enteira dun número x o maior número enteiro menor ou igual a x . Definimos a función parte enteira de x , **Ent** (x), a que fai corresponder a cada número x a súa parte enteira.

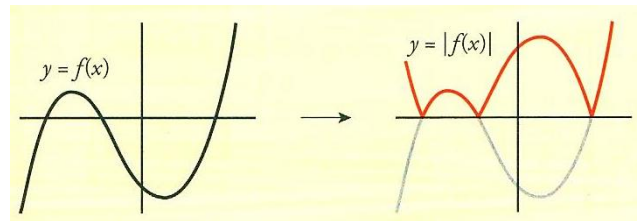
Olo!! $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ent}(7,8) = 7 \\ \text{Ent}(-4,3) = -5 \\ \text{Ent}(-8) = -8 \end{array} \right.$



FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO: Defínese así: $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

O valor absoluto dunha función $y = f(x)$ defínese así:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$



Exemplo: Representa a función $f(x) = |2x - 6|$

Primeiro obtemos os intervalos onde a función é positiva e onde é negativa:

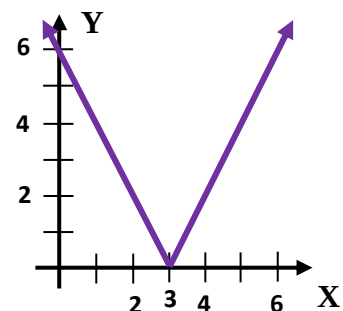
$2x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$; $2x - 6 < 0 \Leftrightarrow x < 3$ polo que os intervalos son:

$[3, +\infty)$ positiva e $(-\infty, 3)$ negativa. Polo tanto, a función será:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 6 & \text{se } 2x - 6 \geq 0 \\ -(2x - 6) & \text{se } 2x - 6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} 2x - 6 & \text{se } x \geq 3 \\ -2x + 6 & \text{se } x < 3 \end{cases}$$

A súa representación é:

Fíxate que, como o valor absoluto sempre devolve valores positivos, a súa gráfica nunca vai a estar por debaixo do eixo das X . Dito eixo fai o efecto espello para a gráfica, chega a el e rebota.



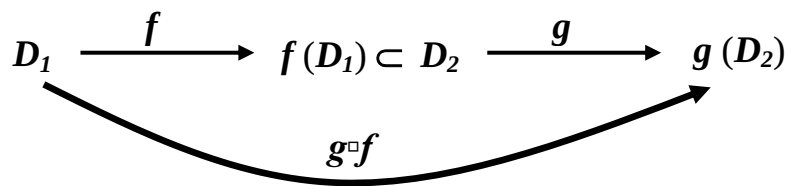
Tema 7: Funcións elementais

FUNCIÓNS

EXPONENCIAIS e LOGARÍTMICAS

Composición de Funcións

Sexan f e g dúas funcións reais de variable real con dominios respectivos D_1 e D_2 , tales que $f(D_1) \subseteq D_2$. Chamamos **Función Composición de f e g** (noméase f composto con g) e expresámola por $g \circ f$ á función $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$.



Fíxate que se nomea de dereita a esquerda, pois é a función f a que actúa primeiro sobre x . Ademais, en xeral, $g \circ f \neq f \circ g$.

Exemplo: Calcula $g \circ f$ e $f \circ g$ para as seguintes funcións:

a) $f(x) = 2x$ e $g(x) = x^2 - 2$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(2x) = (2x)^2 - 2 = 4x^2 - 2$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(x^2 - 2) = 2 \cdot (x^2 - 2) = 2x^2 - 4$$

b) $f(x) = x - 3$ e $g(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(x - 3) = \frac{1}{(x - 3)^2 + 4} = \frac{1}{x^2 - 6x + 13}$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\frac{1}{x^2 + 4}\right) = \frac{1}{x^2 + 4} - 3 = \frac{1 - 3 \cdot (x^2 + 4)}{x^2 + 4} = \frac{-3x^2 - 11}{x^2 + 4}$$

EXERCICIO 1: Dadas as funcións: $f(x) = 2^{x+1}$, $g(x) = \sqrt{x+1}$, $h(x) = x^2 - 1$. Acha:

a) $g \circ f$ b) $h \circ f$ c) $g \circ h$ d) $h \circ g \circ f$ e) $h \circ h$

i) $g[f(2)]$ l) $h[f(-1)]$ m) $g[h(3)]$ n) $h[g[f(0)]]$ o) $h[h(-2)]$

Tema 7: Funcións elementais

Defínese a **función identidade**, Id , como a función que a cada valor lle fai corresponder o mesmo valor.

$$Id : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \quad \swarrow \longrightarrow \quad Id(x) = x$$

Función inversa ou recíproca doutra:

Chámase **función inversa** ou **recíproca** de f a outra función, f^{-1} , que cumpre a seguinte condición: Se $f(a) = b$ entón $f^{-1}(b) = a$.

Como consecuencia, danse as seguintes relacións:

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id \quad \text{é dicir} \quad f[f^{-1}(x)] = x \quad \text{e} \quad f^{-1}[f(x)] = x$$

A función inversa de f^{-1} é, á súa vez, f . Por iso, diremos simplemente que as funcións f e f^{-1} son inversas.

NOTA: Para que unha función teña inversa debe ser **inixectiva**, é dicir, cada valor de y debe corresponder a un único valor de x . Por exemplo: $f(x) = x^2$ **NON** é inixectiva pois o valor de $y = 4$ obtense para os valores de $x = 2$ e $x = -2$. A súa inversa habería que obtela por cachos:

$$y = f(x) = x^2 \quad \begin{cases} y = f_1(x) = x^2, & x \geq 0 \rightarrow f_1^{-1}(x) = \sqrt{x} \\ y = f_2(x) = x^2, & x < 0 \rightarrow f_2^{-1}(x) = -\sqrt{x} \end{cases}$$

Cálculo da función inversa:

Dada unha función $y = f(x)$. Para calcular a expresión analítica da súa función inversa seguimos os seguintes pasos: (Exemplo: $f(x) = 3x + 1$)

1. Intercambiamos as incógnitas $y \leftrightarrow x$. (Exemplo: $y = 3x + 1 \leftrightarrow x = 3y + 1$)
2. Despexamos o y . (Exemplo: $x = 3y + 1 \Leftrightarrow y = \frac{x-1}{3}$)
3. Esa é a función inversa. (Exemplo: $y = \frac{x-1}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}$)

Comprobación da función do exemplo: $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = Id(x) = x$.

$$(f \circ f^{-1})(x) = f[f^{-1}(x)] = f\left(\frac{x-1}{3}\right) = \cancel{3} \cdot \frac{x-1}{\cancel{3}} + 1 = x - 1 + 1 = x$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}[f(x)] = f^{-1}(3x + 1) = \frac{3x + 1 - 1}{3} = \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = x$$

Tema 7: Funcións elementais

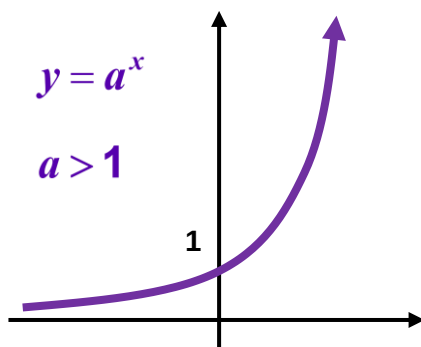
EXERCICIO 2: Calcula as inversas das seguintes funcións e **compróbaos**:

$$f(x) = \frac{1}{x-3}, \quad g(x) = \sqrt{2x+1}, \quad h(x) = 1 + \sqrt{x}$$

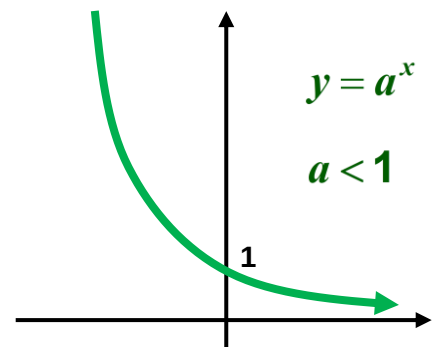
$$l(x) = 2x^3 + 5, \quad m(x) = \frac{1}{x} - 2, \quad q(x) = 1 + 2^x$$

FUNCIÓN EXPONENCIAL: Teñen a expresión: $y = a^x$ con $a > 0$ e $a \neq 1$. Propiedades:

- O seu dominio é $\mathbb{R}$ e o seu percorrido $(0, +\infty)$.
- Son continuas en $\mathbb{R}$ e pasan polos puntos $(0, 1)$ e $(1, a)$.
- Se $a > 1$ son **crecentes**, máis canto maior sexa a .
- Se $0 < a < 1$ son **decrecentes**.

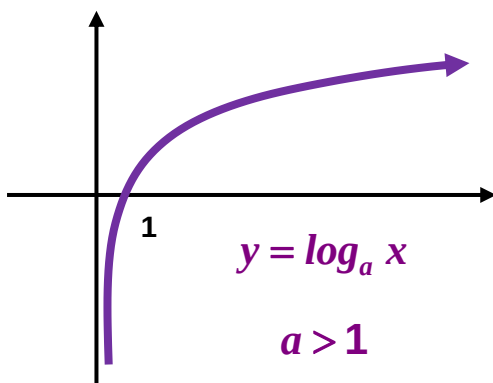


$$a > 0$$
$$a \neq 1$$

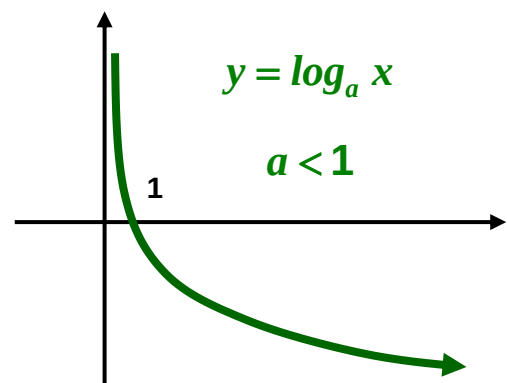


FUNCIÓN LOGARÍTMICA: Teñen a expresión: $y = \log_a x$ con $a > 0$ e $a \neq 1$. Propiedades:

- O seu dominio é $(0, +\infty)$ e o seu percorrido $\mathbb{R}$.
- Son continuas e pasan polos puntos $(1, 0)$ e $(a, 1)$.
- Se $a > 1$ son **crecentes**, máis canto menor sexa a .
- Se $0 < a < 1$ son **decrecentes**.



$$a > 0$$
$$a \neq 1$$



A función exponencial ($y = a^x$) e a logarítmica ($y = \log_a x$) son inversas.

As súas gráficas son simétricas respecto da función identidade: $y = x$.

Tema 7: Funcións elementais

EXERCICIOS:

3.- Representa no mesmo eixo as funcións: $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

4.- Representa no mesmo eixo as funcións: $h(x) = 3^x$ e $l(x) = \log_3 x$.

5.- Calcula as inversas das seguintes funcións e compróboas:

$$f(x) = 3 + 2^{x+1} \quad ; \quad g(x) = 2 \cdot \ln(x-3)$$

6.- O proceso de cicatrización dunha ferida segue unha lei exponencial. A superficie S da ferida ao cabo de t días pódese calcular mediante a fórmula $S = S_0 \cdot e^{kt}$, onde S_0 é a superficie inicial e k unha constante.

a) Se unha ferida tiña unha superficie inicial de 50 cm^2 e ao cabo de dous días mide $24,83 \text{ cm}^2$, cal é o valor de k ? Sol. $\rightarrow k > -0,35$

b) Calcular a superficie da ferida despois de 8 días. Sol. $\rightarrow S = 3 \text{ cm}^2$

c) Representar a función.

7.- Un cultivo de bacterias comeza con 50 células. Dúas horas despois hai 162. Se ese cultivo crece de forma exponencial segundo unha función $y = k \cdot e^{at}$ (t en horas) calcula k e a . Canto tardará en chegar a 5000 bacterias? Sol.: $k = 50, a > 0,6, t > 7,8 \text{ horas}$.

8.- Calcula as inversas das seguintes funcións. Logo representa cada unha coa súa inversa no mesmo eixo de coordenadas.

$$f(x) = 1,5 \cdot 2^x - 3 \quad ; \quad g(x) = 2 + \ln(x+1)$$

9.- Unha cunca de café acabado de facer está a 75°C . Despois de 3 minutos nun cuarto a 21°C , a temperatura do café descendeu a 64°C . Se a temperatura T do café en cada instante t (en minutos) vén dada pola expresión $T = A \cdot e^{kt} + 21$, calcula A e k e representa a función. Canto teremos que esperar para que a temperatura do café sexa de 45°C ? Sol.: $A = 54, k > -0,076$, esperaremos aprox. $10' 40''$ ($t > 10,68'$)

Tema 7: Funcións elementais

FUNCIÓNS TRIGONOMÉTRICAS

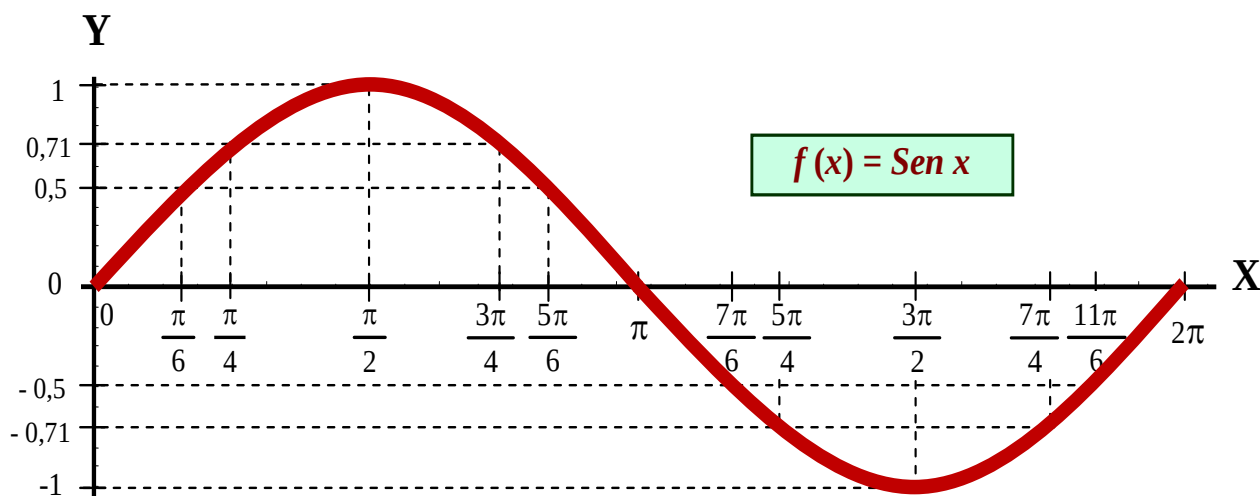
Imos estudar as funcións trigonométricas Seno, Coseno e Tanxente.

Primeiro ímolas a representar nos eixes coordenados. No eixe **X** poñemos os ángulos en radiáns (aquí usamos os radiáns e non os graos sexagesimais por comodidade matemática), e no eixe **Y** os seus correspondentes valores.

FUNCIÓN SENO: $f(x) = \text{Sen } x$

Construímos unha táboa de valores para a súa representación:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\text{Sen } x$	0	0,5	0,71	1	0,71	0,5	0	-0,5	-0,71	-1	-0,71	-0,5	0



Fixándonos ben na gráfica, descubrimos as seguintes propiedades:

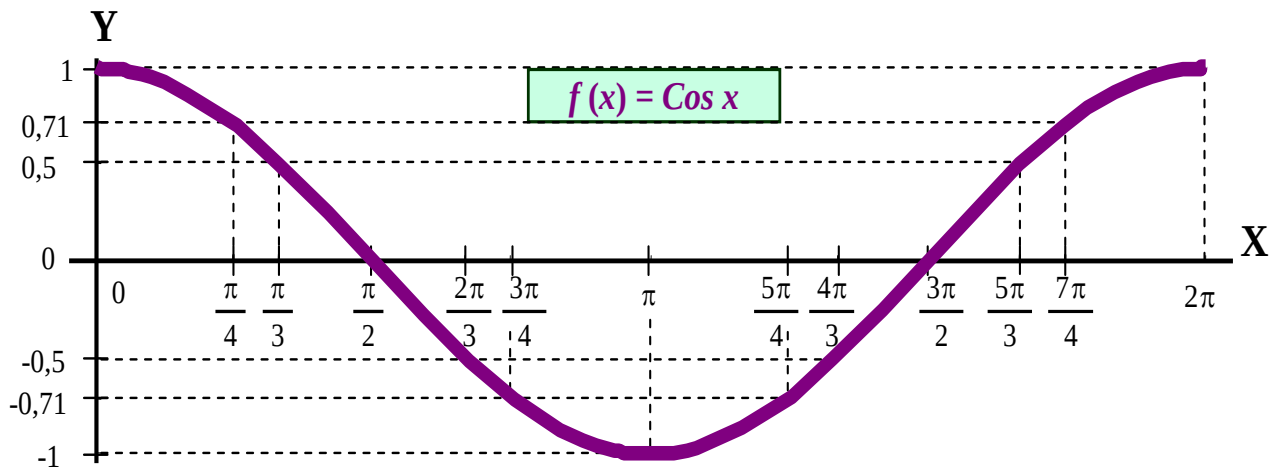
- ★ Dominio: é o conxunto dos números reais: $\mathbb{R}$.
- ★ Imaxe: é o intervalo pechado $[-1,1]$, é dicir, toma valores comprendidos entre -1 e 1 , sendo o *valor mínimo* -1 e o *valor máximo* 1 .
- ★ É continua en todo o seu dominio.
- ★ É periódica de período 2π , é dicir, $\text{Sen}(x + 2\pi) = \text{Sen } x$, entón o que fai a función no intervalo $[0, 2\pi]$ é o mesmo que fai no intervalo $[2\pi, 4\pi]$, $[4\pi, 6\pi]$... Polo tanto só fai falta fixarse na representación da función no intervalo $[0, 2\pi]$.

Tema 7: Funcións elementais

FUNCIÓN COSENO: $f(x) = \text{Cos } x$

Construímos unha táboa (os ángulos en radiáns), representámola e fixámonos nas propiedades que ten.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\text{Cos } x$	1	0,71	0,5	0	-0,5	-0,71	-1	-0,71	-0,5	0	0,5	0,71	1



Fixándonos ben na gráfica, descubrimos as seguintes propiedades:

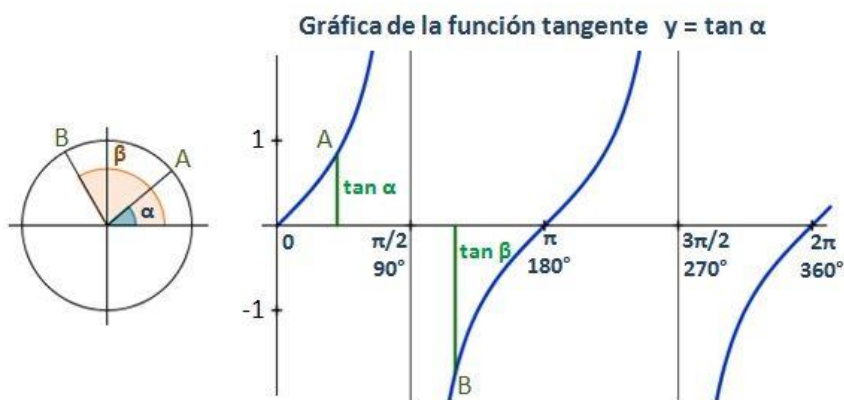
- ★ Dominio: é o conxunto dos números reais: $\mathbb{R}$.
- ★ Imaxe: é o intervalo pechado $[-1,1]$, é dicir, toma valores comprendidos entre -1 e 1 , sendo o *valor mínimo* -1 e o *valor máximo* 1 .
- ★ É continua en todo o seu dominio.
- ★ É periódica de período 2π , é dicir, $\text{Cos}(x + 2\pi) = \text{Cos } x$, entón o que fai a función no intervalo $[0,2\pi]$ é o mesmo que fai no intervalo $[2\pi,4\pi]$, $[4\pi,6\pi]$, ... Polo tanto só fai falla fixarse na representación da función no intervalo $[0,2\pi]$.

Tema 7: Funcións elementais

Función tanxente:

A función $y = \tan x$ enténdese como a función con valores x comprendidos entre $-\infty$ e $+\infty$, tendo como imaxe a tanxente do ángulo x radiáns. Esta función non presenta imaxes nos puntos (discontinuidade) $x = k\pi/2$, k enteiro

Gráfica da función tanxente $y = \tan x$



Dominio: $\mathbb{R}$ (excepto $\pi/2 + \alpha\pi$ sendo α un número enteiro).

Percorrido: $\mathbb{R}$

A función da tanxente é periódica de período 180° (π radiáns)

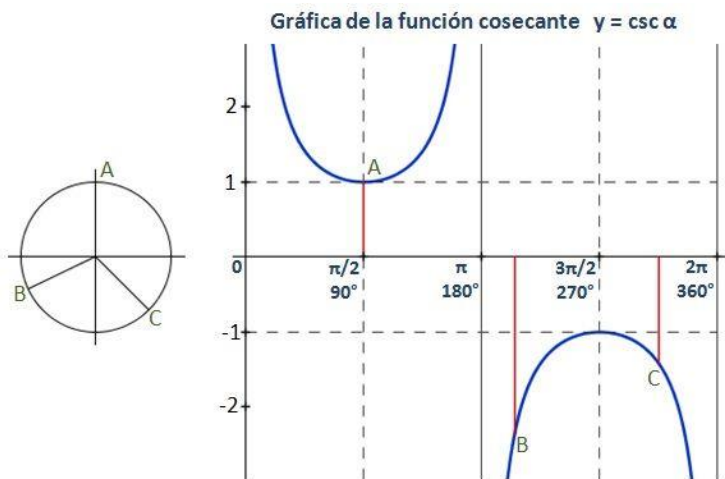
Tema 7: Funcións elementais

Función cosecante

A función $y = \operatorname{cosec} \alpha$ enténdense como a función con valores α comprendidos entre $-\infty$ e $+\infty$, tendo como imaxe a secante do ángulo α radiáns. Esta función non presente imaxes nos puntos (discontinuidade) $\alpha = \alpha k, k$ enteiro

A cosecante do ángulo α dun triángulo rectángulo defínese como a razón entre a hipotenusa e o cateto oposto, é dicir, $\operatorname{cosec} \alpha = 1/\operatorname{sen} \alpha$

Gráfica da función cosecante $y = \operatorname{cosec} \alpha$



Dominio : $\mathbb{R}$ (excepto $\alpha\pi$) sendo α un número enteiro

Percorrido: $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

La función cosecante é periódica de período 360° (2π radiáns), polo que esta parte da gráfica repetirase nos diferentes períodos.

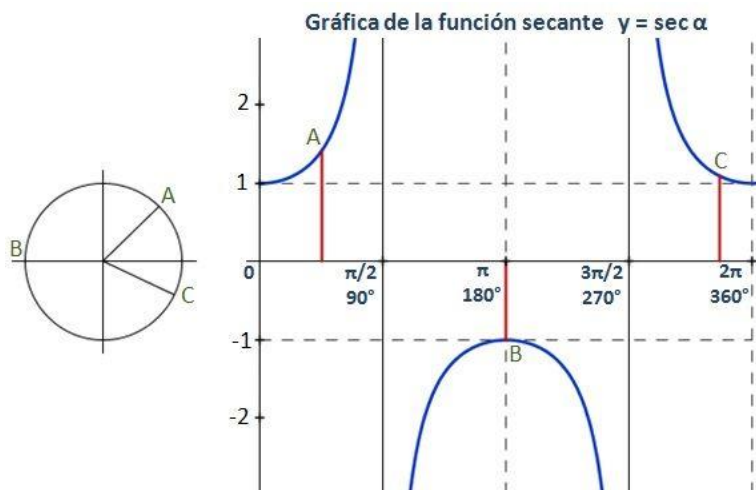
Tema 7: Funcións elementais

Función secante:

A función $y = \sec \alpha$ enténdense como a función con valores α comprendidos entre $-\infty$ e $+\infty$, tendo como imaxe a secante do ángulo α radiáns. Esta función non presente imaxes nos puntos (discontinuidade) $\alpha = \pi/2 + k\pi$, k enteiro

A secante dun ángulo α dun triángulo rectángulo defínese como a razón entre a hipotenusa e o cateto contiguo, é dicir: a secante é a razón trigonométrica recíproca do coseno, é dicir $\sec \alpha = 1/\cos \alpha$]

Gráfica da función secante $y = \sec \alpha$



Dominio: $\mathbb{R}$ (excepto $\pi/2 + \alpha\pi$ sendo α un número enteiro).

Percorrido: $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

La función secante é periódica de período 360° (2π radiáns), polo que esta parte da gráfica repetirase nos diferentes periodos.

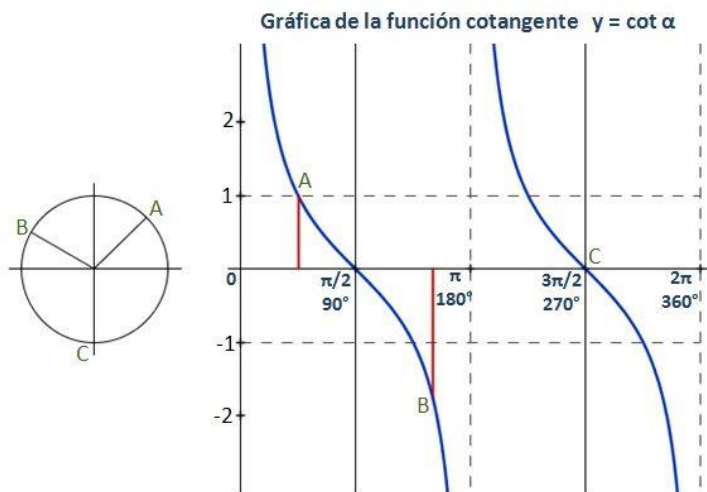
Tema 7: Funcións elementais

Función cotanxente:

A función $y = \cot x$ enténdese como a función con valores α comprendidos entre $-\infty$ e $+\infty$, tendo como imaxe a secante do ángulo α radiáns. Esta función non presente imaxes nos puntos (discontinuidade) $\alpha = k\pi, k$ enteiro

A cotanxente é a razón trigonométrica recíproca da tanxente, é dicir: $\cot \alpha = 1/(\tan \alpha)$, é dicir: a cotanxente dun ángulo α dun triángulo rectángulo defínese como a razón entre o cateto contiguo e o cateto adxacente.

Gráfica da función cotanxente $y = \cot \alpha$



Dominio: $\mathbb{R}$ (excepto $\alpha\pi$) sendo α un número enteiro

Percorrido: $\mathbb{R}$

A función da tanxente é periódica de período 180° (π radiáns)

Tema 7: Funcións elementais

Razóns trigonométricas inversas:

As razóns trigonométricas inversas permiten achar un ángulo do que se coñece o seu seno, coseno ou tanxente. Nas calculadoras aparecen enriba das teclas $\sin$, $\cos$ e $\tan$, como $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ e $\tan^{-1}$. A forma clásica de referirse a elas é “arco seno”, “arco coseno” ou “arco tanxente”

Arco seno:

- En graos: Para un número y comprendido entre -1 e 1 defínese como $\arcsin y = \alpha \leftrightarrow \sin \alpha = y$
- En radiáns: Se x é un número que representa un valor en radiáns, dado outro número y comprendido entre -1 e 1 : $\arcsin y = x \leftrightarrow \sin x = y$

Arco coseno:

- En graos: Para un número y comprendido entre -1 e 1 defínese como $\arccos y = \alpha \leftrightarrow \cos \alpha = y$
- En radiáns: Se x é un número que representa un valor en radiáns, dado outro número y comprendido entre -1 e 1: $\arccos y = x \leftrightarrow \cos y = x$
- Salvo nos casos $y = \pm 1$, $\arccos y$ sempre ten dúas solucións.

Arco tanxente

- En graos: Para un número y comprendido entre $-\infty$ e $+\infty$ $\arctan y = \alpha \leftrightarrow \tan \alpha = y$
- En radiáns: Se x é un número que representa un valor en radiáns, dado outro número y , comprendido entre $-\infty$ e $+\infty$: $\arctan y = x \leftrightarrow \tan x = y$

EXERCICIOS:

19.- Representa:
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{se } -2 \leq x \leq 0 \\ \sqrt{2x+1} & \text{se } 0 < x \leq 4 \\ 3 & \text{se } 4 < x \leq 8 \end{cases} ; \quad g(x) = \left| -x^2 + 4x \right|$$

Tema 7: Funcións elementais

20.- A evolución mensual do número de socios dun club durante un ano, vén dada pola

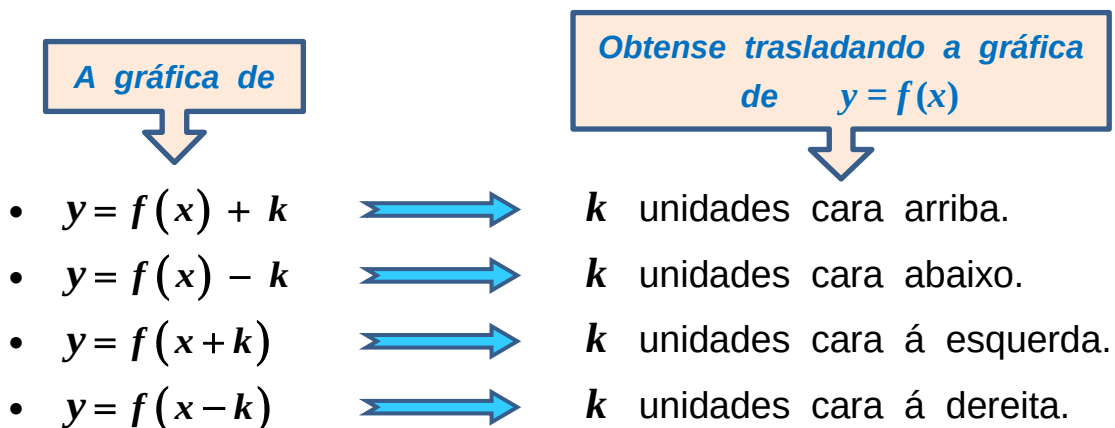
$$\text{función: } f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x + a & \text{se } 0 \leq x \leq 6 \\ 50 & \text{se } 6 < x \leq 8 \\ x^2 - 20x + 146 & \text{se } 8 < x \leq 12 \end{cases}, \quad x \text{ en meses.}$$

- a) Acha a sabendo que o club se fundou con 50 socios. **Sol. : $a = 50$.**
- b) Representa a función e di en que mes o número de socios foi máximo e en que mes foi mínimo. **Sol. : Máx. no 3º mes con 59 socios, mínimo no 10º mes con 46 socios.**
- c) Se para cubrir gastos o club necesita ter máis de 47 socios, en que meses tivo perdas?

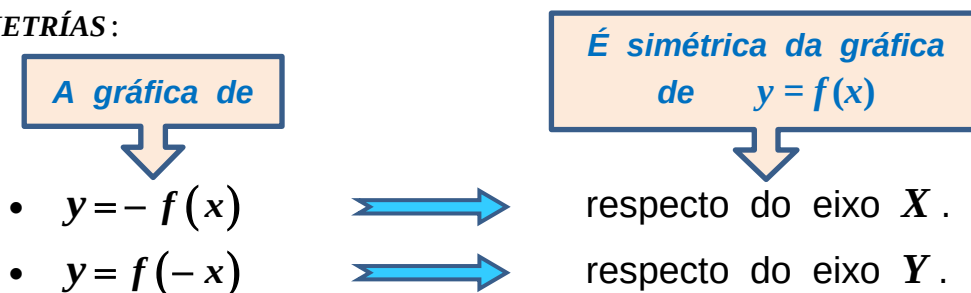
Sol. : Nos meses 9º, 10º e 11º.

Transformacións Elementais de Funcións

TRANSLACIÓNS: Sexa $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$, entón:



SIMETRÍAS:



Tema 7: Funcións elementais

ESTIRAMENTOS E CONTRACCIÓNS: Sexa $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$, entón:

A gráfica de

- $y = k \cdot f(x)$



Obtense a partir da gráfica de $y = f(x)$

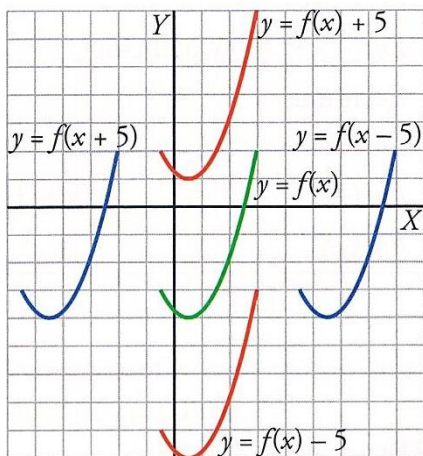
estirándoa en sentido vertical multiplicando por k .

- $y = \frac{1}{k} \cdot f(x)$

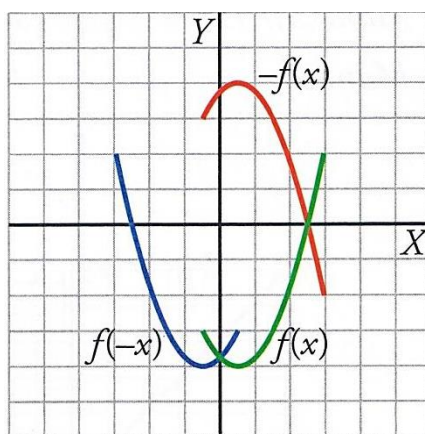


contraéndoa en sentido vertical dividindo entre k .

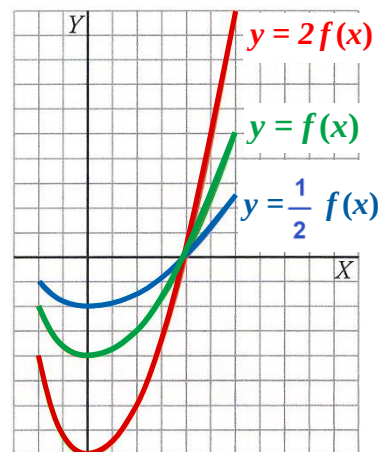
Translacións



Simetrías



Estiram. e Contrac.



Tema 7: Funcións elementais

EXERCICIOS:

- 21.- Calcula o dominio de $h(x) = \frac{2x-6}{3 \cdot \sqrt{2x^2+7x-4}}$. **Sol.: Dom. = $(-\infty, -4) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$**
- 22.- Representa: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{se } x < 2 \\ 2x - 4 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$; $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$
- 23.- Unha feira gandeira está aberta ao público entre as 10 e as 20 horas. O número de visitantes vén dado pola función $N(t) = -20t^2 + Bt + C$ onde t é a hora de visita. Sabendo que ás 17 horas se alcanza o máximo de 1500 visitantes, achar B e C e representar a función. **Sol.: $B = 680$, $C = -4280$.**
- 24.- Os custos de produción de certo produto (en €) dunha empresa, veñen dados pola función $C(q) = 40000 + 20q + q^2$ sendo q o número de unidades producidas. O prezo de venda de cada unidade é de 520 €.
- a) Expressa en función de q o beneficio da empresa e represéntao graficamente.
- b) Cantas unidades hai que producir para que o beneficio sexa máximo? **Sol.: 250 uds.**
- 25.- Unha empresa de alugueiro de coches ofrece dúas tarifas:
- A: 50 € fixos mais 0,25 € por quilómetro percorrido.
- B: 0,50 € por quilómetro percorrido.
- Analizar cal das dúas opcións é máis vantaxosa segundo os quilómetros que vaíamos a percorrer. **Sol.: Ata 200 km é máis vantaxosa a B, a partir dos 200 km é mellor a A.**
- 26.- A temperatura dun paciente, dende que comeza a súa enfermidade ata que volve ter 37 °C evolucionou segundo a función $T(t) = -0,1t^2 + 1,2t + 37$, sendo t o número de días transcorridos dende o inicio da enfermidade. Cal é o seu dominio de definición? E o seu percorrido? **Sol.: Dom. = $[0, 12]$; Perc. = $[37, 40, 6]$.**
- 27.- O prezo do billete dunha liña de proximidades depende dos quilómetros percorridos. Por 57 km paguei 2,85 €, e por 167 km, 13,85 €. Calcula o prezo dun billete para unha distancia de 100 km. (Mediante interpolación lineal) **Sol.: $f(x) = 0,1x - 2,85 \square 7,15€$.**
- 28.- Na cociña dun restaurante, un equipo de 2 cociñeiros é capaz de preparar os pedidos para 30 comensais. Se o equipo é de 4 cociñeiros a capacidade elévase ata os 50 comensais. E se o equipo chega a 8 cociñeiros, estorbaríanse uns a outros e non habería lumes para todos, polo que a capacidade se mantería en 50 comensais. Estima mediante **interpolación cuadrática** cantos comensais podería atender un equipo de 5 cociñeiros. **Sol.: $f(x) = \frac{-5}{3}x^2 + 20x - \frac{10}{3} \square f(5) = 55$ comensais.**

Tema 7: Funcións elementais

- 29.-** Un opositor enfróntase a un temario de 2925 páxinas. Sabe que se estuda 4 horas diarias é capaz de memorizar 4 páxinas por día. Se dedica 8 horas, aprende 7 páxinas; e se dedica 12 horas, consegue 9 páxinas. Considera unha xornada diaria de 10 horas e quere saber o número de días que lle vai supoñer dar unha primeira volta ao temario completo. Utiliza a *interpolación cuadrática* para responderlle.

$$(Sol.: \text{ Se } \begin{cases} 4 \leftrightarrow 0 \\ 8 \leftrightarrow 4 \\ 12 \leftrightarrow 8 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{-1}{32}x^2 + \frac{7}{8}x + 4 \quad ; \quad f(x) = \frac{-1}{32}x^2 + \frac{9}{8}x, \text{ precisará estudar 360 días.})$$

- 30.-** A porcentaxe de alumn@s que asisten a un curso de inglés de 10 meses de

duración vén dada pola función
$$P(t) = \begin{cases} at^2 + bt + c & \text{se } 0 \leq t \leq 3 \\ 28 & \text{se } 3 < t \leq 10 \end{cases} \quad t \text{ en}$$

meses. Sabemos que, inicialmente, o 100 % do alumnado asiste ao curso; que transcorrido un mes, asiste o 60 % e que ao cumprirse o terceiro mes, a asistencia se reduce ao 28 %. Calcula a , b , c e representa a función.

Solución : $a = 8$, $b = -48$, $c = 100$.

- 31.-** As tarifas dunha empresa de transportes son:

- 40 € por tonelada de carga se esta é menor ou igual a 20 t.
- Se a carga é maior que 20 t, restaranse, dos 40 €, tantos euros como toneladas superen as 20.

- a)** Debuxa a función *ingresos da empresa segundo a carga que transporte* (carga máxima: 30 t)

- b)** Obtén a expresión analítica.

$$Sol.: \quad I(x) = \begin{cases} 40x & \text{se } 0 \leq x \leq 20 \\ -x^2 + 60x & \text{se } 20 < x \leq 30 \end{cases}$$

Tema 7: Funcións elementais

Criterios de avaliación:

1. Coñecer o concepto de dominio de definición dunha función e obtelo a partir da súa expresión analítica
2. Coñecer as familias de funcións elementais e asociar as súas expresións analíticas coas formas das súas gráficas
3. Dominar o manexo de funcións elementais, así como das funcións definidas “a anacos”
4. Recoñecer as transformacións que se producen nas gráficas como consecuencia dalgunhas modificacións nas súas expresións analíticas
5. Coñecer a composición de funcións e as relacións analíticas e gráficas que existen entre unha función e a súa inversa ou recíproca

Estándares de aprendizaxe avaliáveis

- 1.1. Obtén o dominio de definición dunha función dada pola súa expresión analítica
- 1.2. Recoñece e expresa con corrección o dominio dunha función dada graficamente
- 1.3. Determina o dominio dunha función tendo en conta o contexto real do enunciado
- 2.1. Asocia a gráfica dunha función lineal ou cuadrática á súa expresión analítica
- 2.2. Asocia a gráfica dunha función radical ou de proporcionalidade inversa á súa expresión analítica
- 2.3. Asocia a gráfica dunha función exponencial ou logarítmica á súa expresión analítica
- 2.4. Asocia a gráfica dunha función elemental á súa expresión analítica
- 3.1. Obtén a expresión dunha función lineal a partir da súa gráfica ou dalgúns elementos
- 3.2. A partir dunha función cuadrática dada, recoñece a súa forma e a súa posición e represéntaa
- 3.3. Representa unha función exponencial e unha función logarítmica dadas pola súa expresión analítica
- 3.4. Obtén a expresión analítica dunha función cuadrática ou exponencial a partir da súa gráfica ou dalgúns dos seus elementos
- 3.5. Representa funcións definidas “a anacos” (só lineais e cuadráticas)
- 3.6. Obtén a expresión analítica dunha función dada por un enunciado(lineais, cuadráticas e exponenciais)
- 4.1. Representa $y = f(x) \pm k$, $y = f(x \pm a)$ e $y = -f(x)$ a partir da gráfica $y = f(x)$
- 4.2. Representa $y = |f(x)|$ a partir da gráfica de $y = f(x)$
- 4.3. Obtén a expresión de $y = |ax + b|$ identificando as ecuacións das rectas que o forman
- 5.1. Compón dúas ou máis funcións
- 5.2. Recoñece unha función como composta doutras dúas, en casos sinxelos
- 5.3. Dada a gráfica dunha función, representa a da súa inversa e obtén valores dunha a partir dos da outra
- 5.4. Obtén a expresión analítica da inversa dunha función en casos sinxelos