BIBLIOTECA DEL PROFESORADO

Matemáticas I

SOLUCIONARIO

1 BACHILLERATO

Este material es una obra colectiva concebida, diseñada y creada en el Departamento de Ediciones de Santillana, bajo la dirección de **Teresa Grence**.

En su elaboración han participado:
Sonia Alejo Sánchez
María Arribas Fernández
José María Fernández Díaz
Coral Victoria de la Iglesia Meleiro
Clara Inés Lavado Campos
Silvia Marín García
Natalia Polo Rodríguez
Lorena Ramos San Millán
Rocío Rubio Álvarez
María de las Mercedes Sánchez Martín

EDICIÓN
Sonia Alejo Sánchez
Clara Inés Lavado Campos
Silvia Marín García
Aída Moya Librero

EDICIÓN EJECUTIVA
Carlos Pérez Saavedra

DIRECCIÓN DEL PROYECTO
Domingo Sánchez Figueroa

PROYECTO construyendo mundos

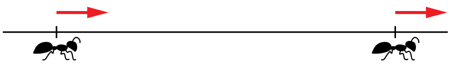
Santillana

DESAFÍO

¡No tiene pérdida!

Una hormiga está sobre una cinta de Möbius de un metro de largo y, justo debajo, al otro lado de la cinta, hay otra. Ambas empiezan a moverse simultáneamente, a 10 cm/s y 5 cm/s, respectivamente. ¿Cuánto tardarán en encontrarse? ¿Y si avanzan en sentidos opuestos?

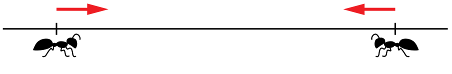
Al estar en lados opuestos, las hormigas están inicialmente a 50 cm de distancia.



Si caminan en el mismo sentido, la más rápida debe recortarle 50 cm a razón de 5 cm/s, que es la diferencia de las velocidades.

$50 : 5 = 10$

Por tanto, tardará 10 s en alcanzarla.



Si avanzan en sentidos opuestos, ambas se recortan 15 cm/s, pues se suman las velocidades.

$x_1 = 10t$

$x_2 = 100 - 5t$

$50 : 15 = 3{,}33$

Por tanto, tardarán 3,33 s en encontrarse.

PIENSA

PÁG. 145. Escribe el vector (1, 2) como combinación lineal de los vectores (2, 4) y (−1, −2). ¿Qué observas? ¿Puedes expresarlo como una combinación diferente?

$(1, 2) = a(2, 4) + b(-1, -2) \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} 1 = 2a - b \\ 2 = 4a - 2b \end{cases} \rightarrow b = 2a - 1$

Hay infinitas soluciones para este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Por ejemplo:

$(1, 2) = (2, 4) + (-1, -2)$

$(1, 2) = 2(2, 4) + 3(-1, -2)$

PÁG. 151. ¿Para qué valores del vector director $\vec{d}$ no se puede expresar la ecuación de una recta con su forma punto-pendiente? ¿Cómo son estas rectas?

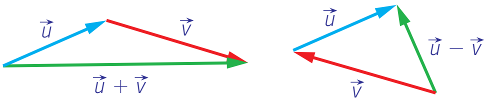
La ecuación punto-pendiente de una recta es de la forma:

$$y - b = \frac{d_2}{d_1}(x - a)$$

Por tanto, no se puede expresar de esta manera cuando las coordenadas del vector director son $(0, d_2)$. Es decir, en rectas verticales.

ACTIVIDADES

1 Copia estos vectores y calcula gráficamente $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$.

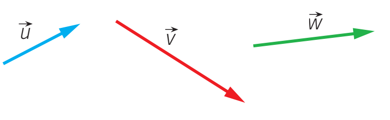


2 Realiza estas operaciones con vectores.

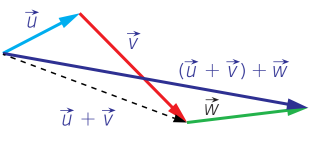
a) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$

b) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

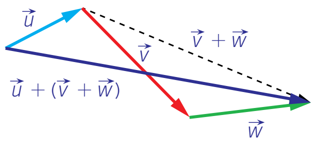
c) $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$



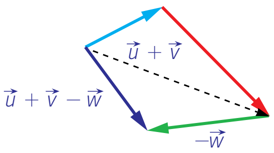
a)



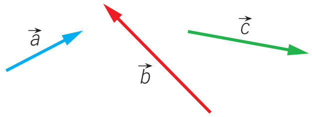
b)



c)



3 Copia los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, y realiza gráficamente las siguientes operaciones.



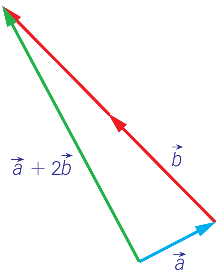
a) $\vec{a} + 2\vec{b}$

b) $-\vec{c} + 3\vec{a} - 2\vec{b}$

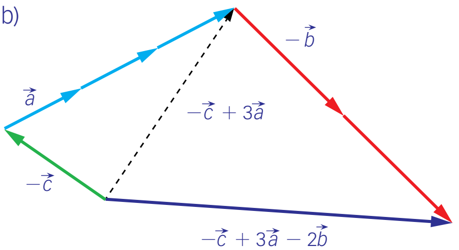
c) $\vec{b} + (\vec{c} + \vec{a})$

d) $2\vec{a} - \vec{c}$

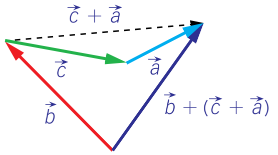
a)



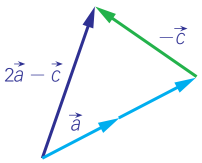
b)



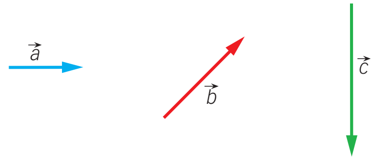
c)



d)



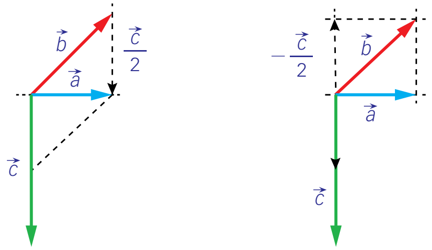
4 Escribe cada vector como combinación lineal de los otros dos.

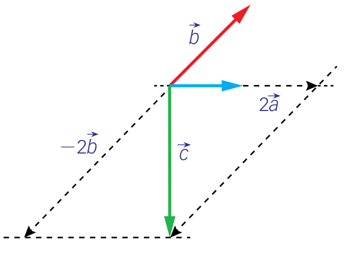


$$\vec{a} = \vec{b} + \frac{\vec{c}}{2}$$

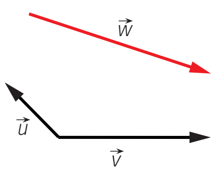
$$\vec{b} = \vec{a} - \frac{\vec{c}}{2}$$

$$\vec{c} = 2\vec{a} - 2\vec{b}$$



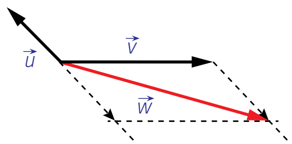


5 Comprueba que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman una base y expresa el vector $\vec{w}$ en función de ellos.



Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen distinta dirección, por lo que forman una base.

$\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$



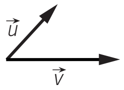
6 Dada la base $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$:

a) Calcula $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{b} = \vec{u} - \vec{v}$.

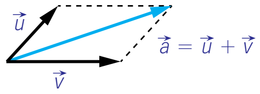
b) Indica las coordenadas de $\vec{b}$ en la base B.

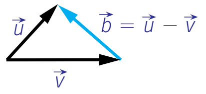
c) Comprueba que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman una base.

d) Expresa $\vec{u}$ y $\vec{v}$ como combinación lineal de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.



a)





b) $\vec{b} = (1, -1)$

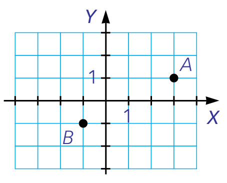
c) Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen distinta dirección, luego forman una base.

d) $\begin{cases} \vec{a} = \vec{u} + \vec{v} \\ \vec{b} = \vec{u} - \vec{v} \end{cases} \rightarrow \vec{a} + \vec{b} = 2\vec{u} \rightarrow$

$\rightarrow \vec{u} = \dfrac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$

$\vec{v} + \vec{a} - \dfrac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \rightarrow \vec{v} = \dfrac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$

7 Dibuja los puntos $A(3, 1)$ y $B(-1, -1)$ y calcula las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$. Después, calcula sus módulos.



$\overrightarrow{AB} = (-1 - 3, -1 - 1) = (-4, -2)$

$\overrightarrow{BA} = (3 - (-1), 1 - (-1)) = (4, 2)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{20}$

$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$

8 Calcula el valor de k para que estos pares de vectores sean paralelos.

a) $\vec{u} = (3, 2)$ y $\vec{v} = (9, k)$

b) $\vec{u} = (-1, 4)$ y $\vec{v} = (k, -2)$

a) $\dfrac{9}{3} = \dfrac{k}{2} \rightarrow k = \dfrac{2 \cdot 9}{3} = 6$

b) $\dfrac{-1}{k} = \dfrac{4}{-2} \rightarrow k = \dfrac{-2 \cdot (-1)}{4} = \dfrac{1}{2}$

9 Dados los puntos $A(3, -1)$, $B(-1, 2)$, $C(0, 2)$ y $D(-1, -2)$, halla estos vectores.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ b) $2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$ c) $-\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AD}$

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (-4, 3) + (-1, -4) =$
$= (-5, -1)$

b) $2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2(-3, 3) - (0, -4) =$
$= (-6, 6) - (0, -4) = (-6, 10)$

c) $-\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AD} = -(1, 0) + 2(-4, -1) =$
$= (-1, 0) + (-8, -2) = (-9, -2)$

10 Dados $\vec{u} = (2, -1)$ y $\vec{v} = (0, 3)$, realiza las siguientes operaciones con vectores.

a) $\vec{u} - 3\vec{v}$ b) $5\vec{u} + \vec{v}$ c) $-\vec{u} + 2\vec{v}$

a) $\vec{u} - 3\vec{v} = (2, -1) - (0, 9) = (2, -10)$

b) $5\vec{u} + \vec{v} = (10, -5) + (0, 3) = (10, -2)$

c) $-\vec{u} + 2\vec{v} = (-2, 1) + (0, 6) = (-2, 7)$

11 Dados $\vec{u} = (0, 2)$, $\vec{v} = (1, -1)$ y $\vec{w} = (0, -1)$, calcula.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ c) $\vec{w} \cdot \vec{v}$ e) $\vec{u} \cdot (\vec{v} - 2\vec{w})$

b) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$ d) $\vec{u} \cdot \vec{w}$ f) $-2\vec{u} \cdot 3\vec{v}$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (0, 2) \cdot (1, -1) = -2$

b) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (0, 2) \cdot ((1, -1) + (0, -1)) =$
$= (0, 2) \cdot (1, -2) = -4$

c) $\vec{w} \cdot \vec{v} = (0, -1) \cdot (1, -1) = 1$

d) $\vec{u} \cdot \vec{w} = (0, 2) \cdot (0, -1) = -2$

e) $\vec{u} \cdot (\vec{v} - 2\vec{w}) = (0, 2) \cdot ((1, -1) - (0, -2)) =$
$= (0, 2) \cdot (1, 1) = 2$

f) $-2\vec{u} \cdot 3\vec{v} = (0, -4) \cdot (3, -3) = 12$

12 Señala cuáles de los siguientes vectores son perpendiculares entre sí y cuáles no.

$\vec{u} = (-1, 3)$ $\quad \vec{v} = (12, 4)$ $\quad \vec{w} = \left(\dfrac{1}{3}, -1\right)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = -1 \cdot 12 + 3 \cdot 4 = 0$

$\vec{u} \cdot \vec{w} = -1 \cdot \dfrac{1}{3} + 3 \cdot (-1) = -\dfrac{10}{3} \neq 0$

$\vec{v} \cdot \vec{w} = 12 \cdot \dfrac{1}{3} + 4 \cdot (-1) = 0$

Son perpendiculares $\vec{u}$ y $\vec{w}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

13 Halla el ángulo que forman los siguientes vectores.

a) $\vec{a} = (2, -1)$ y $\vec{b} = (3, 2)$

b) $\vec{a} = (5, 2)$ y $\vec{b} = (-1, 1)$

c) $\vec{a} = (-3, -1)$ y $\vec{b} = (2, 3)$

d) $\vec{a} = (-1, 5)$ y $\vec{b} = (4, -2)$

a) $\cos\alpha = \dfrac{2 \cdot 3 + 2 \cdot (-1)}{\sqrt{2^2 + 1^2}\sqrt{3^2 + 2^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{65}} \rightarrow$

$\rightarrow \alpha = 60{,}3°$

b) $\cos\alpha = \dfrac{-1 \cdot 5 + 2 \cdot 1}{\sqrt{5^2 + 2^2}\sqrt{1^2 + 1^2}} = \dfrac{-3}{\sqrt{58}} \rightarrow$

$\rightarrow \alpha = 113{,}2°$

c) $\cos\alpha = \dfrac{-3 \cdot 2 + 3 \cdot (-1)}{\sqrt{(-3)^2 + (-1)^2}\sqrt{2^2 + 3^2}} =$

$= \dfrac{-9}{\sqrt{130}} \rightarrow \alpha = 217{,}9°$

d) $\cos\alpha = \dfrac{-1 \cdot 4 + 5 \cdot (-2)}{\sqrt{(-1)^2 + 5^2}\sqrt{4^2 + (-2)^2}} =$

$= \dfrac{-14}{\sqrt{520}} \rightarrow \alpha = 232{,}1°$

14 Encuentra tres vectores perpendiculares y otros tres paralelos a cada uno de los siguientes vectores.

a) $\vec{a} = (1, 1)$ b) $\vec{b} = (3, 2)$ c) $\vec{c} = (0, 1)$

Indica, para cada apartado, cómo son entre sí los vectores que has calculado.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $\vec{a} = (1, 1)$

Vectores paralelos: (2, 2), (3, 3) y (4, 4)

Vectores perpendiculares: $(-1, 1)$, $(-2, 2)$ y $(-3, 3)$

b) $\vec{b} = (3, 2)$

Vectores paralelos: (6, 4), (9, 6) y (12, 8)

Vectores perpendiculares: $(2, -3)$, $(4, -6)$ y $(6, -9)$

c) $\vec{c} = (0, 1)$

Vectores paralelos: (0, 2), (0, 3) y (0, 4)

Vectores perpendiculares: (1, 0), (2, 0) y (3, 0)

15 Dados los puntos $A(-1, 3)$, $B(5, 1)$ y $C(0, 3)$, calcula la distancia del punto C al punto medio de A y B.

Punto medio de A y B:

$M\left(\dfrac{-1+5}{2}, \dfrac{3+1}{2}\right) = (2, 2)$

$d(C, M) = |\overrightarrow{CM}| = \sqrt{(2-0)^2 + (2-3)^2} =$

$= \sqrt{5}$

16 Halla los simétricos de los puntos $A(2, -5)$ y $B(-1, 3)$ respecto del punto $C(2, -1)$.

$(2, -1) = \left(\dfrac{2+x}{2}, \dfrac{-5+y}{2}\right) \rightarrow x = 2,\ y = 3$

El simétrico respecto de A es (2, 3).

$(2, -1) = \left(\dfrac{-1+x}{2}, \dfrac{3+y}{2}\right) \rightarrow$

$\rightarrow x = 5,\ y = -5$

El simétrico respecto de B es $(5, -5)$.

17 Escribe las ecuaciones vectorial y paramétricas de la recta que pasa por los puntos $A(7, 3)$ y $B(2, 2)$.

$\overrightarrow{AB} = (-5, -1)$

Ecuación vectorial:

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} \rightarrow$

$\rightarrow (x, y) = (7, 3) + t(-5, -1)$

Ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = 7 - 5t \\ y = 3 - t \end{array}\right\}$$

18 Halla las ecuaciones paramétricas de la recta cuyo vector director es $\vec{v} = (-1, 0)$ y pasa por el punto $A(3, 2)$.

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 - t \\ y = 2 \end{array}\right\}$$

19 Calcula las ecuaciones vectorial y paramétricas de las rectas bisectrices de los cuadrantes.

Bisectriz del primer y tercer cuadrantes

Ecuación vectorial: $(x, y) = t(1, 1)$

Ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = t \end{array}\right\}$$

Bisectriz del segundo y cuarto cuadrantes

Ecuación vectorial: $(x, y) = t(1, -1)$

Ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = -t \end{array}\right\}$$

20 Halla las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto medio de $A(3, 1)$ y $B(5, -3)$ y por el punto $C(0, 3)$.

$$\left.\begin{array}{r} M\left(\dfrac{3+5}{2}, \dfrac{1-3}{2}\right) = (4, -1) \\ \overrightarrow{CM} = (4, -4) \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 4t \\ y = 3 - 4t \end{array}\right\}$$

21 Halla la ecuación continua de la recta que pasa por $A(2, -1)$ y tiene la dirección del vector $\vec{d} = (2, -1)$.

Averigua si el punto $P(3, 1)$ está en la recta.

Calculamos la ecuación continua de la recta.

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-(-1)}{-1}$$

Comprobamos si el punto P cumple la ecuación de la recta.

$$\frac{3-2}{2} = \frac{1}{2} \qquad \frac{1-(-1)}{-1} = -2$$

Luego el punto P no pertenece a la recta.

22 Calcula la recta que pasa por el punto $A(2, 7)$ y forma con el eje de abscisas un ángulo de 60°. Explica cómo lo haces.

Calculamos la pendiente.

$tg\ 60° = m \rightarrow m = \sqrt{3}$

Hallamos la ecuación punto-pendiente.

$y - 7 = \sqrt{3}(x - 2)$

23 Halla la ecuación explícita de la recta que pasa por $A(2, -3)$ y tiene la dirección del vector $\vec{v} = (-2, 1)$.

Calculamos la pendiente.

$$m = \frac{d_2}{d_1} = -\frac{1}{2}$$

Ecuación punto-pendiente:

$$y + 3 = -\frac{1}{2}(x - 2)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + n \rightarrow -3 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + n \rightarrow$$

$$\rightarrow n = -2$$

Ecuación explícita:

$$y = -\frac{1}{2}x - 2$$

24 Escribe la ecuación general de la recta que pasa por $A(0, -2)$ y $B(4, -1)$.

$$\overrightarrow{AB} = (4, 1) \rightarrow \frac{x-0}{4} = \frac{y-(-2)}{1} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{x}{4} - (y + 2) = 0 \rightarrow x - 4y - 8 = 0$$

25 Estudia la posición relativa de las rectas r y s a partir de los coeficientes de sus ecuaciones generales.

$$r: \frac{x}{3} = y - 5 \qquad s: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3t \end{cases}$$

Las ecuaciones generales de r y s son:

$r: x - 3y + 15 = 0 \qquad s: 3x + y - 6 = 0$

Como $\dfrac{1}{3} \neq \dfrac{-3}{1}$, las rectas son secantes.

26 Estudia la posición relativa de dos rectas que tienen vectores directores no proporcionales. ¿Qué condición han de verificar para que las rectas sean perpendiculares?

Si los vectores directores no son proporcionales, las rectas son secantes.

Sea $\vec{d} = (d_1, d_2)$ el vector director de la recta r, y sea $\vec{c} = (c_1, c_2)$ el vector director de la recta s.

Las rectas son perpendiculares si el producto escalar de los vectores es cero.

$d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2 = 0 \rightarrow d_1 \cdot c_1 = -d_2 \cdot c_2 \rightarrow$
$\rightarrow \vec{c} = (-d_2, d_1)$

27 Halla la distancia que existe entre el punto $P(2, -1)$ y la recta r, cuya ecuación es la siguiente:

$$r: \frac{x-1}{3} = \frac{2-y}{2}$$

Expresamos la recta en forma general.

$$r: \frac{x-1}{3} = \frac{2-y}{2} \rightarrow 2x + 3y - 8 = 0$$

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} =$$

$$= \frac{|2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) - 8|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} =$$

$$= \frac{7}{\sqrt{13}} = \frac{7\sqrt{13}}{13}\ \text{u}$$

28 Calcula la distancia que separa la siguiente recta del origen de coordenadas.

$$r: \left.\begin{array}{l} x = 3 - t \\ y = 2 + 2t \end{array}\right\}$$

Expresamos la recta en forma general.

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 - t \\ y = 2 + 2t \end{array}\right\} \rightarrow -x + 3 = \frac{y-2}{2} \rightarrow$$
$$\rightarrow -2x - y + 8 = 0$$

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} =$$
$$= \frac{|-2 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 8|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{5}} =$$
$$= \frac{8\sqrt{5}}{5} \text{ u}$$

29 Halla la distancia entre estas dos rectas paralelas.

$$r: 5x - 2y + 2 = 0 \qquad s: \frac{x}{2} = \frac{y-3}{5}$$

Tomamos el punto $P(0, 1)$, que pertenece a la recta r.

La ecuación general de la recta s es $5x - 2y + 6 = 0$.

$$d(P, s) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} =$$
$$= \frac{|5 \cdot 0 - 2 \cdot 1 + 6|}{\sqrt{5^2 + 2^2}} = \frac{4}{\sqrt{29}} =$$
$$= \frac{4\sqrt{29}}{29}$$

30 Calcula el ángulo que forman estas dos rectas al cortarse.

$$r: y = x - 3$$
$$s: \frac{x-1}{-2} = y + 3$$

$r: -x + y + 3 = 0 \qquad s: x + 2y + 5 = 0$

$$\cos\alpha = \frac{|A \cdot A' + B \cdot B'|}{\sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sqrt{(A')^2 + (B')^2}} =$$
$$= \frac{|-1 \cdot 1 + 1 \cdot 2|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} =$$
$$= \frac{\sqrt{10}}{10} \rightarrow \alpha = 71{,}57°$$

PRACTICA

31 Determina si los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman una base y halla las coordenadas del vector $\vec{w}$ respecto de ella en cada caso.

a) $\vec{u} = (-1, 0)$, $\vec{v} = (2, -3)$ y $\vec{w} = (3, -3)$

b) $\vec{u} = (3, -3)$, $\vec{v} = (1, -4)$ y $\vec{w} = (5, -2)$

a) Forman una base, pues $\frac{-1}{2} \neq \frac{0}{-3}$.

$(3, -3) = a(-1, 0) + b(2, -3)$

$$\left.\begin{array}{r} 3 = -a + 2b \\ -3 = -3b \end{array}\right\} \rightarrow b = 1,\ a = -1 \rightarrow$$
$$\rightarrow \vec{w} = -\vec{u} + \vec{v}$$

b) Forman una base, pues $\frac{3}{1} \neq \frac{-3}{-4}$.

$(5, -2) = a(3, -3) + b(1, -4)$

$$\left.\begin{array}{r} 5 = 3a + b \\ -2 = -3a - 4b \end{array}\right\} \rightarrow b = -1,\ a = 2 \rightarrow$$
$$\rightarrow \vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$$

32 Si los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son equipolentes, con $A(2, 1)$ y $B(0, -2)$, calcula el extremo desconocido en cada caso.

a) $C(-5, 7)$	e) $C(7, -5)$
b) $D(-5, 7)$	f) $D(7, -5)$
c) $C(0, -2)$	g) $C(0, 0)$
d) $D(0, -2)$	h) $D(0, 0)$

$\overrightarrow{AB} = (-2, -3)$

a) $\overrightarrow{CD} = (a + 5, b - 7) = (-2, -3) \rightarrow$
$\rightarrow D(-7, 4)$

b) $\overrightarrow{CD} = (-5 - a, 7 - b) = (-2, -3) \rightarrow$
$\rightarrow C(-3, 10)$

c) $\overrightarrow{CD} = (a, b + 2) = (-2, -3) \rightarrow$
$\rightarrow D(-2, -5)$

d) $\overrightarrow{CD} = (-a, -2 - b) = (-2, -3) \rightarrow C(2, 1)$

e) $\overrightarrow{CD} = (a - 7, b + 5) = (-2, -3) \rightarrow$
$\rightarrow D(5, -8)$

f) $\overrightarrow{CD} = (7 - a, -5 - b) = (-2, -3) \rightarrow$
$\rightarrow C(9, -2)$

g) $\overrightarrow{CD} = (a, b) = (-2, -3) \rightarrow D(-2, -3)$

h) $\overrightarrow{CD} = (-a, -b) = (-2, -3) \rightarrow C(2, 3)$

33 Halla las coordenadas de dos vectores sabiendo que su suma y su diferencia son:

a) $\vec{u} + \vec{v} = (2, 3)$ y $\vec{u} - \vec{v} = (-1, 4)$
b) $\vec{u} + \vec{v} = (1, 0)$ y $\vec{u} - \vec{v} = (0, 1)$
c) $\vec{u} + \vec{v} = (2, 5)$ y $\vec{u} - \vec{v} = (2, -3)$
d) $\vec{u} + \vec{v} = (6, 10)$ y $\vec{u} - \vec{v} = (0, 0)$

a) $\begin{cases} \vec{u} + \vec{v} = (2, 3) \\ \vec{u} - \vec{v} = (-1, 4) \end{cases} \rightarrow 2\vec{u} = (1, 7) \rightarrow \rightarrow \vec{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$

$\vec{v} = (2, 3) - \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{-1}{2}\right)$

b) $\begin{cases} \vec{u} + \vec{v} = (1, 0) \\ \vec{u} - \vec{v} = (0, 1) \end{cases} \rightarrow 2\vec{u} = (1, 1) \rightarrow \rightarrow \vec{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$\vec{v} = (1, 0) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$

c) $\begin{cases} \vec{u} + \vec{v} = (2, 5) \\ \vec{u} - \vec{v} = (2, -3) \end{cases} \rightarrow 2\vec{u} = (4, 2) \rightarrow \rightarrow \vec{u} = (2, 1)$

$\vec{v} = (2, 5) - (2, 1) = (0, 4)$

d) $\begin{cases} \vec{u} + \vec{v} = (6, 10) \\ \vec{u} - \vec{v} = (0, 0) \end{cases} \rightarrow 2\vec{u} = (6, 10) \rightarrow \rightarrow \vec{u} = (3, 5)$

$\vec{v} = (6, 10) - (3, 5) = (3, 5)$

34 Halla los vectores que se piden a continuación.

a) Perpendicular a $\vec{u} = (-2, 1)$ y de módulo 2.
b) Perpendicular a $\vec{u} = (3, 1)$ y de módulo 1.
c) Perpendicular a $\vec{u} = (-3, 4)$ y de módulo 5.

a) Un vector perpendicular a $\vec{u} = (-2, 1)$ es $\vec{v} = (1, 2)$.

Para obtener el vector de módulo 2, multiplicamos por 2 y dividimos entre el módulo del vector $\vec{v}$.

$$\vec{w} = \frac{2(1, 2)}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$$

b) Un vector perpendicular a $\vec{u} = (3, 1)$ es $\vec{v} = (-1, 3)$.

Para obtener el vector de módulo 1, dividimos entre el módulo del vector $\vec{v}$.

$$\vec{w} = \frac{(-1, 3)}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

c) Un vector perpendicular a $\vec{u} = (-3, 4)$ es $\vec{v} = (4, 3)$.

Para obtener el vector de módulo 5, multiplicamos por 5 y dividimos entre el módulo del vector $\vec{v}$.

$$\vec{w} = \frac{5(4, 3)}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = (4, 3)$$

35 Comprueba que los vértices $A(2, 1)$, $B(5, 4)$, $C(4, 5)$ y $D(1, 2)$ forman un rectángulo.

Para comprobar que es un rectángulo, vamos a estudiar cómo son los vectores entre sí.

$\overrightarrow{AB} = (3, 3)$
$\overrightarrow{CD} = (-3, -3)$
$\overrightarrow{BC} = (-1, 1)$
$\overrightarrow{AD} = (-1, 1)$

$\overrightarrow{AB}$ es paralelo a $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BC}$ es paralelo a $\overrightarrow{AD}$; a su vez, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son perpendiculares a $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AD}$.

Por tanto, se trata de un rectángulo. No es un cuadrado porque los módulos de los vectores son distintos.

36 Divide el segmento AB en tres partes iguales.

a) $A(-2, 3)$ y $B(0, -1)$
b) $A(1, 1)$ y $B(3, 6)$

a) $\overrightarrow{AB} = (2, -4)$

$$P_1 = A + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = (-2, 3) + \frac{1}{3}(2, -4) = \left(-\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

$$P_2 = A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = (-2, 3) + \frac{2}{3}(2, -4) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

b) $\overrightarrow{AB} = (2, 5)$

$$P_1 = A + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = (1, 1) + \frac{1}{3}(2, 5) = \left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

$$P_2 = A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = (1, 1) + \frac{2}{3}(2, 5) = \left(\frac{7}{3}, \frac{13}{3}\right)$$

37 Comprueba si los puntos A, B y C están alineados.

a) $A(-2, 0)$, $B(1, -1)$ y $C(-5, -1)$

b) $A(0, 0)$, $B(3, -1)$ y $C(2, -2)$

a) $\overrightarrow{AB} = (3, -1)$ $\quad\overrightarrow{AC} = (-3, -1)$

No están alineados, pues $\frac{3}{-3} \neq \frac{-1}{-1}$.

b) $\overrightarrow{AB} = (3, -1)$ $\quad\overrightarrow{AC} = (2, -2)$

No están alineados, pues $\frac{3}{2} \neq \frac{-1}{-2}$.

38 Halla todas las ecuaciones de la recta que pasa por $O(0, 0)$:

a) Y pasa también por el punto $A(-5, 2)$.

b) Y tiene pendiente $m = -2$.

c) Y tiene como vector director $\vec{d} = (2, -1)$.

d) Y pasa por el punto medio del segmento definido por $A(3, 4)$ y $B(5, 2)$.

a) El vector director es $\vec{d} = (-5, 2)$ y pasa por el punto O.

Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = -5t \\ y = 2t \end{array}\right\}$

b) Ecuación punto-pendiente: $y = -2x$

c) $\vec{d} = (2, -1) \rightarrow m = \frac{-1}{2} \rightarrow y = \frac{-1}{2}x$

d) Hallamos el punto medio.

$$M = \left(\frac{3+5}{2}, \frac{4+2}{2}\right) = (4, 3)$$

El vector director de la recta es $\overrightarrow{OM} = (4, 3)$.

Por tanto, $\frac{x}{4} = \frac{y}{3} \rightarrow 3x - 4y = 0$.

39 Determina la ecuación de la recta paralela a r: $3x - y - 3 = 0$ que pasa por el punto $P(0, -4)$.

El vector director es $\vec{d} = (1, 3)$.

Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = -4 + 3t \end{array}\right\}$

40 Halla la recta s paralela a r: $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{4}$ que está a 2 unidades de distancia.

La ecuación de la recta s es $4x - 3y + C = 0$.

Un punto de la recta r es $P(1, 1)$.

$$d(P, s) = \frac{|4 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + C|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|1 + C|}{5} =$$
$$= 2 \rightarrow C_1 = 9, \; C_2 = -11$$

Hay dos rectas que cumplen las condiciones.

s_1: $4x - 3y + 9 = 0$

s_2: $4x - 3y - 11 = 0$

41 Determina la ecuación de la recta perpendicular a r: $3x - y - 3 = 0$ que pasa por el punto $P(0, -4)$.

El vector perpendicular al vector director de r es $(3, -1)$.

Ecuación continua:

$$\frac{x}{3} = \frac{y+4}{-1}$$

42 Halla la ecuación de la recta que pasa por $P(0, 1)$ y forma un ángulo de 45° con r: $x + y - 1 = 0$.

El vector director de la recta r es $(-1, 1)$.

La recta que hay que hallar tiene pendiente m y pasa por el punto $(0, 1)$. Por tanto:

$y - 1 = m(x - 0) \rightarrow mx - y + 1 = 0$

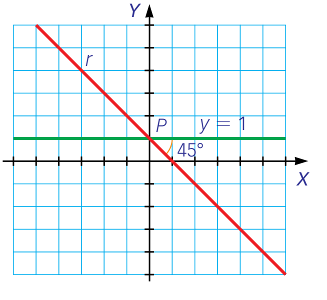
El vector director de esta recta es $(1, m)$.

Aplicamos la definición de producto escalar a los dos vectores directores.

$$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(-1) \cdot 1 + 1 \cdot m}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + m^2}} =$$
$$= \frac{m - 1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + m^2}}$$

$m - 1 = \sqrt{1 + m^2} \rightarrow m = 0$

Por tanto, la recta que buscamos es $y = 1$.



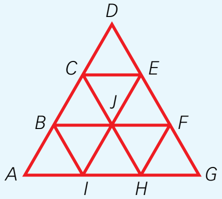
Si representamos gráficamente el resultado, observamos que también la recta $x = 0$ cumple los requisitos.

ACTIVIDADES FINALES

1. Conoce y maneja las operaciones con vectores

ACTIVIDADES FLASH

43 A la vista de la siguiente figura, realiza las operaciones indicadas.



a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}$

b) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{EF}$

c) $\overrightarrow{IH} + 2\overrightarrow{BC}$

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{JF} + \overrightarrow{DC}$

e) $\overrightarrow{HG} - 2\overrightarrow{CJ} + 2\overrightarrow{CB}$

f) $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{DC}$

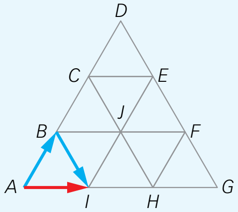
g) $\overrightarrow{BF} - \overrightarrow{JE}$

h) $2\overrightarrow{HI} + 2\overrightarrow{CD}$

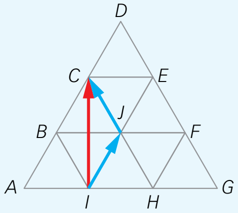
i) $\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC}$

j) $\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{BC}$

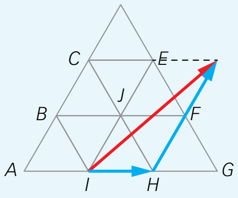
a)



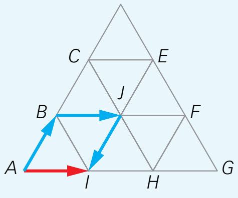
b)



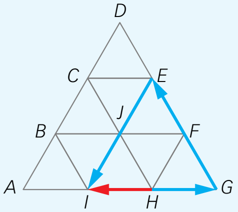
c)



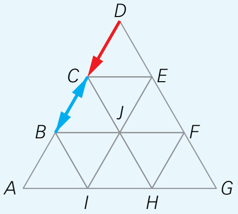
d)



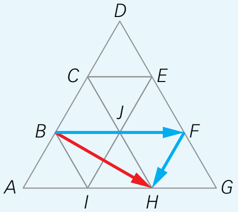
e)



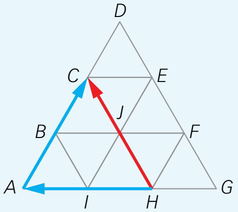
f)



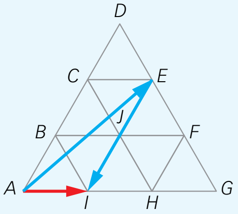
g)



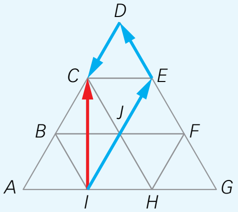
h)



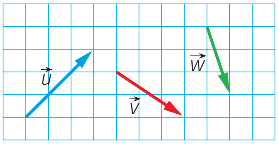
i)



j)

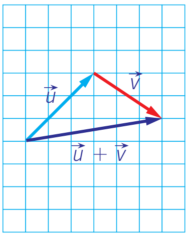


44 Realiza gráficamente estas operaciones.

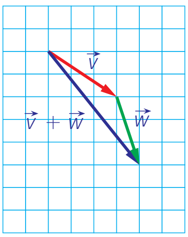


a) $\vec{u} + \vec{v}$
b) $\vec{v} + \vec{w}$
c) $\vec{u} + \vec{w}$
d) $\vec{u} - \vec{v}$
e) $\vec{v} - \vec{w}$
f) $\vec{u} - \vec{w}$
g) $2\vec{u} - \vec{v}$
h) $-\vec{v} + 2\vec{w}$
i) $-\vec{u} - 2\vec{w}$

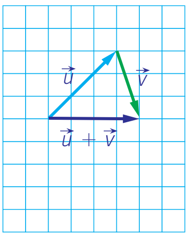
a)



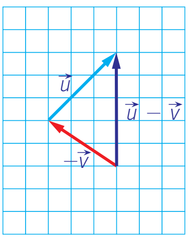
b)



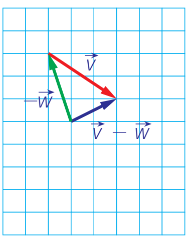
c)



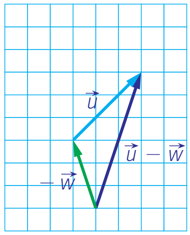
d)



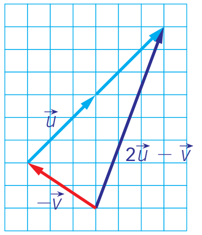
e)



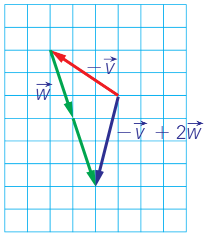
f)



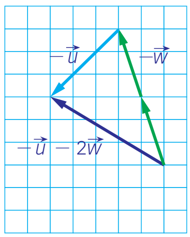
g)



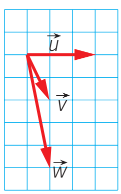
h)



i)

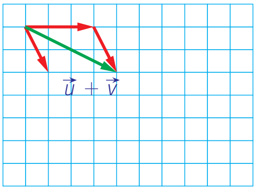


45 Realiza las operaciones con vectores gráficamente.

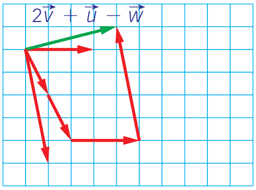


a) $\vec{u} + \vec{v}$
b) $2\vec{v} + \vec{u} - \vec{w}$
c) $2\vec{w} - \vec{u} + 3\vec{v}$
d) $\vec{v} - 2\vec{u} - \vec{w}$
e) $2\vec{u} + \vec{w}$

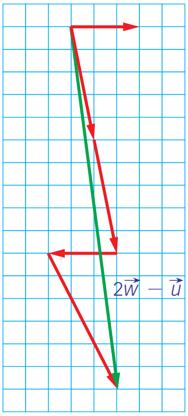
a)



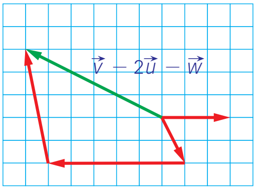
b)



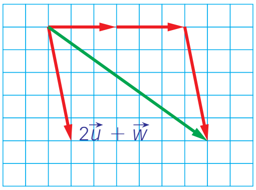
c)



d)

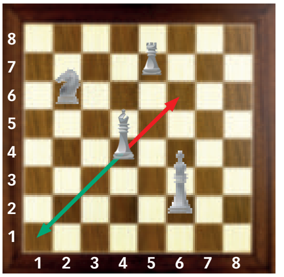


e)



INTERNET

46 ●●○ **MATEMÁTICAS Y… AJEDREZ.** Para describir el movimiento de una pieza de ajedrez podemos indicar el número de cuadrados que se desplaza hacia la derecha y hacia arriba. Si el desplazamiento fuese hacia la izquierda o hacia abajo, se indicará con números negativos.



Así, el alfil blanco que está colocado en la posición (4, 4), para pasar a la posición (6, 6), se desplaza dos cuadrículas hacia la derecha y dos hacia arriba.

$$(6, 6) - (4, 4) = (2, 2)$$

Describe estos movimientos:

a) El rey que está en la posición (6, 2) se desplaza a la posición (7, 3).

b) El rey se desplaza 1 cuadrado hacia la izquierda y 1 hacia arriba.

c) El caballo se desplaza a la posición (4, 7).

d) La torre se desplaza dos cuadraditos hacia la izquierda.

a) $(7, 3) - (6, 2) = (1, 1)$

b) $(6, 2) + (-1, 1) = (5, 3)$

c) $(4, 7) - (2, 6) = (2, 1)$

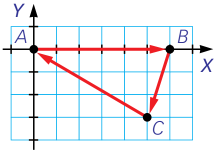
d) $(5, 7) + (-2, 0) = (3, 7)$

47 ●●○ Dados los puntos $A(3, 7)$, $B(4, 9)$, $C(-4, 3)$ y $D(4, 9)$, ¿son paralelos los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$?

Los vectores $\overrightarrow{AB} = (1, 2)$ y $\overrightarrow{CD} = (8, 6)$ no son proporcionales puesto que $\frac{1}{8} \neq \frac{2}{6}$; por tanto, no son paralelos.

48 ●●○ **INVESTIGA.** Dibuja un diagrama para demostrar que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$. Formula un resultado similar para cualquier número de puntos.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0 \rightarrow$
$\rightarrow B - A + C - B + A - C = 0$



Siempre se van a anular los puntos dos a dos.

49 Si (4, 2) es el punto medio del segmento de extremos $(x, 4)$ y $(3, y)$, ¿cuánto vale $x + y$?

Aplicamos la fórmula del punto medio.

$$(4, 2) = \frac{(x+3,\ 4+y)}{2} \to x = 5 \to$$
$$\to y = 0 \to x + y = 5$$

50 Calcula las coordenadas del punto B de forma que los vectores $\vec{u}$ y $\overrightarrow{AB}$ sean equipolentes, sabiendo que $\vec{u} = (2, -3)$ y $A(-1, 2)$.

$$B(x, y) \to \overrightarrow{AB} = (x+1,\ y-2) = (2, -3) \to$$
$$\to \begin{cases} x + 1 = 2 \\ y - 2 = -3 \end{cases} \to B = (1, -1)$$

51 **INVENTA.** Escribe dos valores distintos para A y B tales que $\overrightarrow{AB} = (3, -1)$.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$A(1, 5)$ y $B(4, 4)$

$A(0, -3)$ y $B(3, -4)$

52 Expresa el vector $\vec{u} = (7, 6)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{a} = (6, -3)$ y $\vec{b} = (-1, 3)$.

$$(7, 6) = a(6, -3) + b(-1, 3) \to$$
$$\to \left.\begin{array}{r} 7 = 6a - b \\ 6 = -3a + 3b \end{array}\right\} \to a = \frac{27}{15},\ b = \frac{19}{5}$$

53 Comprueba si los vectores $\vec{u} = (-1, -3)$ y $\vec{v} = (4, 2)$ forman una base y, si es así, halla las coordenadas de los siguientes vectores respecto de ella.

a) $\vec{a} = (2, 1)$

b) $\vec{b} = (3, -1)$

c) $\vec{c} = (-2, 3)$

Forman una base, pues $\dfrac{-1}{4} \neq \dfrac{-3}{2}$.

a) $(2, 1) = a(-1, -3) + b(4, 2)$

$$\left.\begin{array}{r} 2 = -a + 4b \\ 1 = -3a + 2b \end{array}\right\} \to a = 0,\ b = \frac{1}{2}$$

b) $(3, -1) = a(-1, -3) + b(4, 2)$

$$\left.\begin{array}{r} 3 = -a + 4b \\ -1 = -3a + 2b \end{array}\right\} \to a = 1,\ b = 1$$

c) $(-2, 3) = a(-1, -3) + b(4, 2)$

$$\left.\begin{array}{r} -2 = -a + 4b \\ 3 = -3a + 2b \end{array}\right\} \to a = -\frac{8}{5},\ b = -\frac{9}{10}$$

54 **INVENTA.** Para cada punto medio del segmento AB, indica dos posibles valores de los puntos A y B.

a) $M(0, 0)$

b) $M(1, 3)$

c) $M(-1, -4)$

d) $M(2, -5)$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $A(1, -1)$ y $B(-1, 1)$

b) $A(2, -1)$ y $B(0, 7)$

c) $A(3, 5)$ y $B(-5, -13)$

d) $A(0, 3)$ y $B(4, -13)$

55 Si el punto medio del segmento AB es $M(3, 5)$, dado $A(9, 7)$, calcula el punto B. Luego, obtén A con $M(-1, 5)$ y $B(4, -9)$.

Sea $B(x, y)$.

$$(3, 5) = \left(\frac{9+x}{2}, \frac{7+y}{2}\right) \to$$
$$\to \left.\begin{array}{r} 3 = \dfrac{9+x}{2} \\ 5 = \dfrac{7+y}{2} \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x = -3 \\ y = 3 \end{array}\right\} \to B(-3, 3)$$

Sea $A(x, y)$.

$$(-1, 5) = \left(\frac{4+x}{2}, \frac{-9+y}{2}\right) \to$$
$$\to \left.\begin{array}{r} -1 = \dfrac{4+x}{2} \\ 5 = \dfrac{-9+y}{2} \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x = -6 \\ y = 19 \end{array}\right\} \to A(-6, 19)$$

56 Dos vértices consecutivos de un cuadrado son $A(-2, 3)$ y $B(1, -2)$. Si sus dos diagonales se cortan en $P(2, 2)$, calcula los dos vértices que faltan.

Sean C y D los vértices que faltan, C el opuesto a A y D el opuesto a B.

$$P = \frac{A + C}{2} \to$$
$$\to C = 2P - A = (4, 4) - (-2, 3) = (6, 1)$$
$$P = \frac{B + D}{2} \to$$
$$\to D = 2P - B = (4, 4) - (1, -2) = (3, 6)$$

57 Calcula las coordenadas de los puntos que dividen el segmento de extremos $A(5, -1)$ y $B(17, 8)$ en tres partes iguales.

Sean P y Q los puntos buscados.

$$P = A + \frac{\overrightarrow{AB}}{3} = (5, -1) + \left(\frac{12}{3}, \frac{9}{3}\right) = (9, 2)$$

$$Q = A + \frac{\overrightarrow{AB}}{3} \cdot 2 = (5, -1) + \left(\frac{24}{3}, \frac{18}{3}\right) = (13, 5)$$

58 Determina el valor de k para que los puntos $A(2, -3)$, $B(9, k)$ y $C(6, -1)$ estén alineados.

Los vectores paralelos han de ser proporcionales.

$\overrightarrow{AB} = (7, k + 3)$ $\quad\overrightarrow{AC} = (4, 2)$

$$\frac{7}{4} = \frac{k+3}{2} \rightarrow k = \frac{1}{2}$$

59 En el segmento BC marca los puntos D y E que lo dividen en tres segmentos iguales. ¿Cuánto vale k si $\overline{BD}^2 + \overline{BE}^2 = k \cdot \overline{BC}^2$?

Sea $x = BD$. Entonces se cumple que $BE = 2x$ y $BC = 3x$

$$BD^2 + BE^2 = k \cdot BC^2 \rightarrow$$
$$\rightarrow x^2 + (2x)^2 = k(3x)^2 \rightarrow 5x^2 = 9kx^2 \rightarrow$$
$$\rightarrow 5 = 9k \rightarrow k = \frac{5}{9}$$

2. Conoce y maneja el producto escalar de dos vectores y sus propiedades

ACTIVIDADES FLASH

60 Considera que A, B, C y D son los vértices consecutivos de un cuadrado de lado 1 cm. Calcula los siguientes productos escalares.

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$

c) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB}$

d) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$

Tomamos el punto A como origen, por lo que obtenemos las siguientes coordenadas: $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(1, 1)$ y $D(0, 1)$.

a) $\overrightarrow{AB} = (1, 0)$, $\overrightarrow{BC} = (0, 1)$

$(1, 0) \cdot (0, 1) = 0$

b) $\overrightarrow{AC} = (1, 1)$, $\overrightarrow{DB} = (1, -1)$

$(1, 1) \cdot (1, -1) = 1 - 1 = 0$

c) $\overrightarrow{AD} = (0, 1)$, $\overrightarrow{CB} = (0, -1)$

$(0, 1) \cdot (0, -1) = -1$

d) $\overrightarrow{AC} = (1, 1)$, $\overrightarrow{CB} = (0, -1)$

$(1, 1) \cdot (0, -1) = -1$

61 Si $\vec{u} = (3, 1)$ y $\vec{v} = (2, -1)$, calcula.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$

b) $\vec{u} \cdot 2\vec{v}$

c) $(2\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot \vec{v}$

d) $\vec{u} \cdot (\vec{u} - \vec{v})$

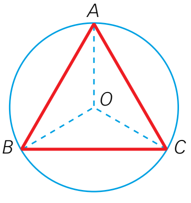
a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, 1) \cdot (2, -1) = 6 - 1 = 5$

b) $\vec{u} \cdot 2\vec{v} = (3, 1) \cdot (4, -2) = 12 - 2 = 10$

c) $(2\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot \vec{v} =$
$= ((6, 2) + (6, -3)) \cdot (2, -1) =$
$= (12, -1) \cdot (2, -1) = 24 + 1 = 25$

d) $\vec{u} \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = (3, 1) \cdot ((3, 1) + (-2, 1)) =$
$= (3, 1) \cdot (1, 2) = 3 + 2 = 5$

62 El siguiente triángulo equilátero está inscrito en una circunferencia de radio 5 cm.



Calcula los siguientes productos escalares.

a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$

b) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$

a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos\alpha =$
$= 25 \cdot \cos(-120°) = -12{,}5$

b) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OC}| \cdot \cos\alpha =$
$= 25 \cdot \cos 120° = -12{,}5$

63 Calcula el valor de t para que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 7$ si $\vec{u} = (-1, 2)$ y $\vec{v} = (3, t)$. Halla el módulo de los dos vectores.

$(-1, 2) \cdot (3, t) = 7 \rightarrow -3 + 2t = 7 \rightarrow t = 5$

$|\vec{u}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$

3. Normaliza vectores y estudia la ortogonalidad de dos vectores

ACTIVIDADES FLASH

64 Calcula los vectores unitarios con la misma dirección que estos vectores cuyo módulo es 5.

a) $\vec{u} = (3, 4)$

b) $\vec{u} = (4, -3)$

c) $\vec{u} = (\sqrt{10}, \sqrt{15})$

d) $\vec{u} = (-2\sqrt{6}, -1)$

Para hallar el vector unitario solo hay que dividir el vector por su módulo.

a) $\vec{u} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

b) $\vec{u} = \left(\frac{4}{5}, \frac{-3}{5}\right)$

c) $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{10}}{5}, \frac{\sqrt{15}}{5}\right)$

d) $\vec{u} = \left(\frac{-2\sqrt{6}}{5}, \frac{-1}{5}\right)$

65 Calcula un vector perpendicular a cada vector.

a) $\vec{u} = (-1, 3)$

b) $\vec{u} = (2, -5)$

c) $\vec{u} = (0, 2)$

d) $\vec{u} = (3, 0)$

e) $\vec{u} = (\sqrt{2}, 1)$

f) $\vec{u} = (-1, 2)$

Para ser perpendiculares, su producto escalar ha de ser cero: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

a) $\vec{v} = (3, 1)$

b) $\vec{v} = (5, 2)$

c) $\vec{v} = (1, 0)$

d) $\vec{v} = (0, 3)$

e) $\vec{v} = \left(-1, \sqrt{2}\right)$

f) $\vec{v} = (2, 1)$

66 Decide si los siguientes vectores son perpendiculares o paralelos entre sí.

a) $\vec{a} = (-2, 4)$ y $\vec{b} = (3, 2)$

b) $\vec{c} = (4, -3)$ y $\vec{d} = (6, 8)$

a) $\frac{-2}{3} = \frac{4}{2} \rightarrow -4 \neq 12 \rightarrow$

$\rightarrow$ No son paralelos.

$(-2, 4) \cdot (3, 2) = -6 + 8 = 2 \rightarrow$

$\rightarrow$ No son perpendiculares.

b) $\frac{4}{6} = \frac{-3}{8} \rightarrow 32 \neq -18 \rightarrow$

$\rightarrow$ No son paralelos.

$(4, -3) \cdot (6, 8) = 24 - 24 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow$ Son perpendiculares.

67 Encuentra un vector perpendicular a $\vec{u} = (-3, 2)$ con módulo 2.

Un vector perpendicular a $\vec{u}$ es $\vec{v} = (2, 3)$. Para que tenga módulo 2, multiplicamos por 2 y dividimos entre el módulo de $\vec{v}$.

$$\vec{w} = \frac{2(2, 3)}{\sqrt{13}} = \left(\frac{4}{\sqrt{13}}, \frac{6}{\sqrt{13}}\right)$$

68 Demuestra que el cuadrilátero formado por los puntos A (2, −2), B (5, 3), C (0, 6) y D (−3, 1) es un cuadrado.

Comprobamos que los lados son perpendiculares.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \rightarrow$

$\rightarrow (3, 5) \cdot (-5, 3) = 0$

$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \rightarrow$

$\rightarrow (-5, 3) \cdot (-3, -5) = 0$

$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \rightarrow$

$\rightarrow (-5, 3) \cdot (3, 5) = 0$

$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \rightarrow$

$\rightarrow (-3, -5) \cdot (-5, 3) = 0$

Comprobamos si son iguales los módulos de los vectores que conforman los lados.

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$

$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{(-5)^2 + 3^2} = \sqrt{34}$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-5)^2 + 3^2} = \sqrt{34}$

$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$

Por tanto, el cuadrilátero *ABCD* es un cuadrado.

69 Calcula el valor de k para que los vectores sean perpendiculares entre sí.

a) $\vec{u} = (2, k), \vec{v} = (1, -6)$

b) $\vec{u} = (2, -3), \vec{v} = (1, k)$

c) $\vec{u} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right), \vec{v} = (k, -1)$

d) $\vec{u} = \left(-\frac{2}{3}, k\right), \vec{v} = (5, -1)$

a) $(2, k) \cdot (1, -6) = 2 - 6k = 0 \rightarrow k = \frac{1}{3}$

b) $(2, -3) \cdot (1, k) = 2 - 3k = 0 \rightarrow k = \frac{2}{3}$

c) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right) \cdot (k, -1) = \frac{1}{3}k - \frac{2}{5} = 0 \rightarrow$

$\rightarrow k = \frac{6}{5}$

d) $\left(-\frac{2}{3}, k\right) \cdot (5, -1) = -\frac{10}{3} - k = 0 \rightarrow$

$\rightarrow k = -\frac{10}{3}$

70 Halla m para que $\vec{v} = (7, -2)$ y $\vec{w} = (m, 6)$:

a) Sean perpendiculares.

b) Sean paralelos.

c) Tengan el mismo módulo.

a) $(7, -2) \cdot (m, 6) = 7m - 12 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow m = \frac{12}{7}$

b) $\frac{7}{m} = \frac{-2}{6} \rightarrow m = -21$

c) $|\vec{v}| = \sqrt{7^2 + (-2)^2} = \sqrt{53}$

$|\vec{w}| = \sqrt{m^2 + 6^2}$

$53 = m^2 + 36 \rightarrow m = \sqrt{17}$

71 Dados $\vec{a} = (6, -2)$ y $\vec{b} = (16, 12)$, calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u} = m\vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{v} = m\vec{a} - \vec{b}$ sean perpendiculares. ¿Hay una solución única?

$\vec{u} = m(6, -2) + (16, 12) =$

$= (16 + 6m, 12 - 2m)$

$\vec{v} = m(6, -2) - (16, 12) =$

$= (-16 + 6m, -12 - 2m)$

Para que los vectores sean perpendiculares, su producto escalar debe ser cero.

$(16 + 6m, 12 - 2m) \cdot (-16 + 6m, -12 - 2m) =$

$= 36m^2 - 256 + 4m^2 - 144 = 0$

$\rightarrow m = \pm\sqrt{10}$

La solución no es única.

4. Calcula el producto escalar, el módulo y el coseno del ángulo

72 Halla el perímetro de un triángulo cuyos vértices están situados en los puntos $A(1, 2)$, $B(3, 2)$ y $C(-1, 3)$.

Calculamos los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{CA}$.

$\overrightarrow{AB} = (2, 0)$, $\overrightarrow{BC} = (-4, 1)$ y $\overrightarrow{CA} = (2, -1)$

Hallamos el módulo de los vectores.

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2} = \sqrt{17}$

$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

El perímetro mide:

$2 + \sqrt{17} + \sqrt{5} = 8{,}36$ u.

73 Calcula el ángulo que forma cada uno de los siguientes pares de vectores.

a) $\vec{a} = (0, -2)$ y $\vec{b} = (-4, -3)$

b) $\vec{a} = \left(\frac{1}{3}, 5\right)$ y $\vec{b} = (3, -1)$

c) $\vec{a} = (-4, -3)$ y $\vec{b} = (1, 1)$

d) $\vec{a} = \left(1, -\sqrt{3}\right)$ y $\vec{b} = \left(1, \sqrt{3}\right)$

a) $\cos\alpha = \frac{(0, -2) \cdot (-4, -3)}{2 \cdot 5} = \frac{3}{5} \rightarrow$

$\rightarrow \alpha = 306{,}87°$

b) $\cos\alpha = \frac{\left(\frac{1}{3}, 5\right) \cdot (3, -1)}{\sqrt{\frac{226}{9}} \cdot \sqrt{10}} = \frac{-12}{\sqrt{2\,260}} \rightarrow$

$\rightarrow \alpha = 255{,}38°$

c) $\cos\alpha = \frac{(-4, -3) \cdot (1, 1)}{5\sqrt{2}} = \frac{-7}{5\sqrt{2}} \rightarrow$

$\rightarrow \alpha = 188{,}13°$

d) $\cos\alpha = \frac{\left(1, -\sqrt{3}\right) \cdot \left(1, \sqrt{3}\right)}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{2} \rightarrow$

$\rightarrow \alpha = 120°$

74 Halla el valor de k para que los vectores $\vec{a} = (2, -3)$ y $\vec{b} = (1, k)$ formen un ángulo de 120°.

$$\cos 120° = \frac{2-3k}{\sqrt{1+k^2}\sqrt{13}} \rightarrow$$

$$\rightarrow -\frac{1}{2} = \frac{2-3k}{\sqrt{1+k^2}\sqrt{13}} \rightarrow$$

$$\rightarrow k = \frac{24+13\sqrt{3}}{23}$$

75 Encuentra un vector $\vec{a}$ que forme un ángulo de 30° con $\vec{b} = (3, -4)$ y tal que $|\vec{a}| = \sqrt{3} \cdot |\vec{b}|$.

Sea $\vec{a} = (x, y)$ el vector pedido.

$$\cos 30° = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\sqrt{3}|\vec{b}|^2} =$$

$$= \frac{3x-4y}{\sqrt{3}\cdot(3^2+4^2)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow 6x - 8y = 75$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{3} \quad |\vec{b}| \rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 5\sqrt{3} \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 = 75$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones que hemos obtenido.

$$\left.\begin{array}{r} 6x - 8y = 75 \\ x^2 + y^2 = 75 \end{array}\right\} \xrightarrow{x = \frac{75+8y}{6}}$$

$$\rightarrow \left(\frac{75+8y}{6}\right)^2 + y^2 = 75 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4y^2 + 48y + 117 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} y_1 = \dfrac{-12+3\sqrt{3}}{2} \rightarrow x_1 = \dfrac{9+4\sqrt{3}}{2} \\ y_2 = \dfrac{-12-3\sqrt{3}}{2} \rightarrow x_2 = \dfrac{9-4\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Los vectores solución son:

$$\vec{a}_1 = \left(\frac{9+4\sqrt{3}}{2}, -6 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\vec{a}_2 = \left(\frac{9-4\sqrt{3}}{2}, -6 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

76 Halla m y n para que los vectores $\vec{u} = (3, m)$ y $\vec{v} = (n, -1)$ sean perpendiculares y se verifique que $|\vec{u}| = 5$.

$$(3, m)\cdot(n, -1) = 3n - m = 0$$

$$\sqrt{3^2+m^2} = 5 \rightarrow 9 + m^2 = 25 \rightarrow$$

$$\rightarrow m^2 = 16 \rightarrow \begin{cases} m_1 = 4 \rightarrow n_1 = \dfrac{4}{3} \\ m_2 = -4 \rightarrow n_2 = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

77 Determina si el triángulo de vértices $A(12, 10)$, $B(20, 16)$ y $C(8, 32)$ es rectángulo.

Calculamos los vectores formados por los vértices del triángulo.

$\overrightarrow{AB} = (8, 6)$, $\overrightarrow{BC} = (-12, 16)$ y $\overrightarrow{AC} = (-4, 22)$

Hallamos los módulos de los vectores.

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{64+36} = 10 \text{ u}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{144+256} = \sqrt{400} = 20 \text{ u}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{16+484} = \sqrt{500} \text{ u}$$

Si el triángulo es rectángulo, debe verificar el teorema de Pitágoras.

$$|\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2$$

$$10^2 + 20^2 = 500$$

Luego el triángulo es rectángulo.

78 Demuestra que los puntos $A(3, -2)$, $B(9, 6)$ y $C(10, 5)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

$\overrightarrow{AB} = (6, 8)$

$\overrightarrow{BC} = (1, -1)$

$\overrightarrow{AC} = (7, 7)$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC} = 7 - 7 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BC}$ son perpendiculares.

79 **INVESTIGA.** Tres de los vértices de un paralelogramo son $A(2, 1)$, $B(6, -1)$ y $C(7, 1)$. ¿Cuáles son las posibles coordenadas del otro vértice?

Sea $D(a, b)$.

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \rightarrow (4, -2) = (7-a, 1-b) \rightarrow$
  $\rightarrow D(3, 3)$
- $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB} \rightarrow (5, 0) = (6-a, -1-b) \rightarrow$
  $\rightarrow D(1, -1)$
- $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} \rightarrow (5, 0) = (a-6, b+1) \rightarrow$
  $\rightarrow D(11, -1)$

80 Dados los vectores $\vec{a} = (1, 5)$ y $\vec{b} = (-4, -3)$, calcula.

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ y $\vec{b} \cdot \vec{a}$

b) $|\vec{a}|$ y $|\vec{b}|$

c) El ángulo que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

d) El valor de k para que el vector $(3, k)$ sea perpendicular al vector $\vec{a}$.

e) El valor de k para que el vector $(k, -1)$ sea paralelo al vector $\vec{b}$.

f) Un vector perpendicular al vector $\vec{b}$.

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = (1, 5) \cdot (-4, -3) = -19$

b) $|\vec{a}| = \sqrt{26} \qquad |\vec{b}| = 5$

c) $\cos \alpha = \dfrac{-19}{5\sqrt{26}} \rightarrow \alpha = 138{,}18°$

d) $(3, k) \cdot (1, 5) = 3 + 5k = 0 \rightarrow k = -\dfrac{3}{5}$

e) $\dfrac{k}{-4} = \dfrac{-1}{-3} \rightarrow k = -\dfrac{4}{3}$

f) Respuesta abierta. Por ejemplo: Un vector perpendicular a $\vec{b}$ es $\vec{c} = (3, -4)$.

81 **INVESTIGA.** ¿Qué condiciones tienen que cumplir los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ para que $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0$?

Con este resultado, demuestra que, si un paralelogramo tiene las diagonales perpendiculares, solo puede ser un cuadrado o un rombo.

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) =$$
$$= \vec{u}\,\vec{u} + \vec{u}\,\vec{v} - \vec{v}\,\vec{u} - \vec{v}\,\vec{v} =$$
$$= |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 = 0 \rightarrow |\vec{u}| = |\vec{v}|$$

Por tanto, los vectores miden lo mismo.

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son los lados de un paralelogramo, $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ son sus diagonales. Por tanto, si las diagonales son perpendiculares entre sí, los módulos miden lo mismo, por lo que solo puede ser un cuadrado o un rombo.

82 Demuestra que el triángulo de vértices $A(3, 1)$, $B(9, -1)$ y $C(5, -5)$ es isósceles. ¿Cuáles son sus lados iguales? Calcula su área.

Hallamos los vectores formados por los vértices del triángulo.

$\overrightarrow{AB} = (6, -2)$, $\overrightarrow{BC} = (-4, -4)$ y $\overrightarrow{AC} = (2, -6)$

Calculamos los módulos de los vectores.

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40}\ \text{u}$$
$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32}\ \text{u}$$
$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40}\ \text{u}$$

Como el triángulo tiene dos lados iguales, AB y AC, es un triángulo isósceles.

Calculamos la altura, h, sobre el lado BC aplicando el teorema de Pitágoras.

$$h = \sqrt{\left(\sqrt{40}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{32}}{2}\right)^2} = \sqrt{40 - 8} =$$
$$= \sqrt{32}\ \text{u}$$
$$A = \frac{B \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{32} \cdot \sqrt{32}}{2} = 16\ \text{u}^2$$

83 Dos vértices de un triángulo equilátero son $A(3, 1)$ y $B(5, -2)$. Calcula cuáles pueden ser las coordenadas del vértice que falta.

$\overrightarrow{AB} = (2, -3)$

La recta que pasa por el tercer vértice, $C(x, y)$, y por el punto medio de A y B tiene como vector director $\vec{d} = (3, 2)$. El punto medio del vector $\overrightarrow{AB}$ es $M\left(4, -\dfrac{1}{2}\right)$. Así, esta recta tiene como ecuación:

$$\frac{x - 4}{3} = \frac{y + \frac{1}{2}}{2} \rightarrow 4x - 6y - 19 = 0$$

Además, el módulo de $\overrightarrow{AC}$ es igual que el módulo de $\overrightarrow{AB}$.

$$\sqrt{13} = \sqrt{(c_x - 3)^2 + (c_y - 1)^2} \rightarrow$$
$$\rightarrow c_x^2 - 6c_x + c_y^2 - 2c_y - 3 = 0$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} c_x = \dfrac{19 + 6c_y}{4} \\ c_x^2 - 6c_x + c_y^2 - 2c_y - 3 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = 4 - \dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ y_1 = -\dfrac{1}{2} - \sqrt{3} \\ x_2 = 4 + \dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ y_2 = -\dfrac{1}{2} + \sqrt{3} \end{array}\right.$$

Serían las posibles coordenadas del punto C.

84 ●●● **RETO.** Dados los puntos $A(3, 0)$ y $B(-3, 0)$, determina un punto C sobre el eje de ordenadas, de modo que el triángulo que describan sea equilátero. ¿Hay una solución única?

Halla el área de los triángulos que resulten.

Los vectores formados por los vértices deben tener la misma longitud.

Sea $C(0, c)$.

$|\overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{CB}| = \sqrt{9 + c^2}$ $|\overrightarrow{AB}| = 6$

$6 = \sqrt{9 + c^2} \rightarrow c = \sqrt{27}$

Los puntos pedidos son:

$C_1\left(0, 3\sqrt{3}\right)$ y $C_2\left(0, -3\sqrt{3}\right)$

Calculamos el área de los triángulos.

$$A = \frac{B \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}\ \text{u}^2$$

5. Obtiene las ecuaciones de una recta e identifica sus elementos característicos

ACTIVIDADES FLASH

85 ●○○ Indica un punto y un vector en estas rectas.

a) $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+2}{3}$

b) $(x, y) = (-1, 2) + t(4, -2)$

c) $\left.\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 2\lambda - 3 \end{array}\right\}$

d) $5x + y = 0$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $P(2, -2)$
$\vec{v} = (-1, 3)$

b) $P(-1, 2)$
$\vec{v} = (4, -2)$

c) $P(0, -3)$
$\vec{v} = (1, 2)$

d) $P(0, 0)$
$\vec{v} = (1, -5)$

86 ●○○ Escribe las ecuaciones vectorial, paramétricas, continua, explícita y general de la recta que:

a) Pasa por el punto $P(0, -3)$ y cuyo vector director es $\vec{v} = (3, -1)$.

b) Pasa por los puntos $P(-2, 3)$ y $Q(5, 1)$.

a) Vectorial: $(x, y) = (0, -3) + t(3, -1)$

Paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = 3t \\ y = -3 - t \end{array}\right\}$

Continua: $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y+3}{-1}$

Explícita: $y = -\dfrac{1}{3}x - 3$

General: $x + 3y + 9 = 0$

b) El vector director es $\vec{v} = (7, -2)$.

Vectorial: $(x, y) = (-2, 3) + t(7, -2)$

Paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = -2 + 7t \\ y = 3 - 2t \end{array}\right\}$

Continua: $\dfrac{x+2}{7} = \dfrac{y-3}{-2}$

Explícita: $y = -\dfrac{2}{7}x + \dfrac{17}{7}$

General: $2x + 7y - 17 = 0$

87 ●○○ Escribe las ecuaciones vectorial y paramétricas de las rectas que cumplen estas condiciones.

a) Pasa por los puntos $(-3, 1)$ y $(5, 3)$.

b) Pasa por el punto $P(3, -4)$ y su vector director es $\vec{v} = (-2, 7)$.

c) Su ecuación explícita es $y = -3x + 4$.

a) El vector director es $\vec{v} = (8, 2) = (4, 1)$.

Vectorial: $(x, y) = (-3, 1) + t(4, 1)$

Paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = -3 + 4t \\ y = 1 + t \end{array}\right\}$

b) Vectorial: $(x, y) = (3, -4) + t(-2, 7)$

Paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = 3 - 2t \\ y = -4 + 7t \end{array}\right\}$

c) Vectorial: $(x, y) = (0, 4) + t(1, -3)$

Paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = 4 - 3t \end{array}\right\}$

88 Escribe las siguientes ecuaciones de rectas en la forma que se pide.

a) $y = -3x + 4$ en forma paramétrica.

b) $-2x + y + 7 = 0$ en forma continua.

c) $\dfrac{x}{-2} = \dfrac{y-3}{5}$ en forma explícita.

d) $\left.\begin{array}{l} x = 3t \\ y = -2 - t \end{array}\right\}$ en forma general.

a) Un punto de la recta es (0, 4) y el vector director es (1, −3).

$$\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = 4 - 3t \end{array}\right\}$$

b) Un punto de la recta es (0, −7) y el vector director es (1, 2).

$$x = \frac{y+7}{2}$$

c) La pendiente de la recta es $-\dfrac{5}{2}$ y la ordenada en el origen es 3.

$$y = -\frac{5}{2}x + 3$$

d) Un punto de la recta es (0, −2) y el vector normal es (1, 3).

$$x + 3y + 6 = 0$$

89 Dada la recta r: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{-2}$, contesta.

a) Si la coordenada x de un punto de esta recta es 4, ¿cuánto vale la coordenada y?

b) Si la coordenada y de un punto de esta recta es −3, ¿cuánto vale la coordenada x?

c) ¿Pertenece $P(4, -5)$ a la recta r? ¿Y $Q(5, -3)$?

Sustituimos en la ecuación de la recta.

a) $y = -5$ b) $x = 3$

c) P pertenece a r, pero Q no.

90 Comprueba si los puntos $A(-3, 2)$ y $B(5, -1)$ están en las siguientes rectas.

a) $\left.\begin{array}{l} x = 3 - 2t \\ y = 3 + 4t \end{array}\right\}$

b) $y = \dfrac{5x-3}{3}$

c) $5x - 2y + 19 = 0$

d) $\dfrac{x+4}{3} = \dfrac{y+7}{2}$

a) $\left.\begin{array}{r} -3 = 3 - 2t \\ 2 = 3 + 4t \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} t = 3 \\ t = \dfrac{-1}{4} \end{array}\right\}$

El punto (−3, 2) no pertenece a la recta.

$\left.\begin{array}{r} 5 = 3 - 2t \\ -1 = 3 + 4t \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} t = -1 \\ t = -1 \end{array}\right\}$

El punto (5, −1) pertenece a la recta.

b) $2 \neq \dfrac{-15-3}{3}$

El punto (−3, 2) no pertenece a la recta.

$-1 \neq \dfrac{25-3}{3}$

El punto (5, −1) no pertenece a la recta.

c) $-15 - 4 + 19 = 0$

El punto (−3, 2) pertenece a la recta.

$25 + 2 + 19 \neq 0$

El punto (5, −1) no pertenece a la recta.

d) $\dfrac{-3+4}{3} \neq \dfrac{2+7}{2}$

El punto (−3, 2) no pertenece a la recta.

$\dfrac{5+4}{3} = \dfrac{-1+7}{2}$

El punto (5, −1) pertenece a la recta.

91 Calcula m para que el punto $(2, m)$ pertenezca a estas rectas.

a) $y = 5x + 2$

b) $\dfrac{x-2}{-5} = \dfrac{y+3}{-1}$

c) $2x + y - 3 = 0$

d) $\left.\begin{array}{l} x = 2 + 3t \\ y = 5t \end{array}\right\}$

a) $m = 10 + 2 = 12$

b) $0 = \dfrac{m+3}{-1} \rightarrow m = -3$

c) $4 + m - 3 = 0 \rightarrow m = -1$

d) $\left.\begin{array}{l} 2 = 2 + 3t \\ m = 5t \end{array}\right\} \rightarrow t = 0 \rightarrow m = 0$

92 **INVENTA.** Escribe dos puntos de cada recta.

a) $y = -x + 1$

b) $5x + 3y + 15 = 0$

c) $y + 2 = -2(x - 1)$

d) $\left.\begin{array}{l} x = 2 + t \\ y = -1 - 3t \end{array}\right\}$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) (0, 1) y (1, 0)

b) (0, −5) y (−3, 0)

c) (0, 0) y (1, −2)

d) (4, −7) y (2, −1)

93 Calcula las siguientes ecuaciones.

a) Ecuaciones implícitas de los ejes *OX* y *OY*.

b) Ecuaciones explícitas de las bisectrices del primer y tercer cuadrantes y del segundo y cuarto cuadrantes.

a) Eje *OX*: $y = 0$

Eje *OY*: $x = 0$

b) Bisectriz del primer cuadrante: $y = x$

Bisectriz del segundo cuadrante: $y = -x$

94 Halla el valor de *k* para que la recta $3x + 7y + k = 0$ pase por el punto $P(-1, 4)$.

$-3 + 28 + k = 0 \rightarrow k = -25$

95 Calcula el valor de *k* para que la recta $4x - y + k = 0$ pase por el origen de coordenadas.

$0 - 0 + k = 0 \rightarrow k = 0$

96 Escribe la ecuación punto-pendiente de la recta que cumple las siguientes condiciones.

a) Pasa por los puntos $A(2, -3)$ y $B(0, -2)$.

b) Pasa por el punto $A(0, 3)$ y tiene por dirección la del vector $\vec{v} = (3, -1)$.

a) $\left.\begin{array}{l} A(2, -3) \\ B(0, -2) \end{array}\right\} \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-2, 1) \rightarrow$

$\rightarrow m = -\dfrac{1}{2} \rightarrow y + 3 = -\dfrac{1}{2}(x - 2)$

b) $\left.\begin{array}{l} m = -\dfrac{1}{3} \\ A(0, 3) \end{array}\right\} \rightarrow y - 3 = -\dfrac{1}{3}x$

97 Calcula el valor de *k* para que la recta $8x - ky + 7 = 0$ tenga pendiente 2.

El vector director es $(k, 8)$. →

$\rightarrow m = \dfrac{8}{k} = 2 \rightarrow k = 4$

98 Halla la ecuación de una recta que pasa por los puntos $(-1, -10)$ y $(2, c)$, sabiendo que su pendiente es 7.

Hallamos el vector director: $(3, c + 10)$

Como sabemos que la pendiente es:

$7 = \dfrac{c + 10}{3} \rightarrow 21 = c + 10 \rightarrow c = 11$

$\vec{u}_r = (3, 21)$

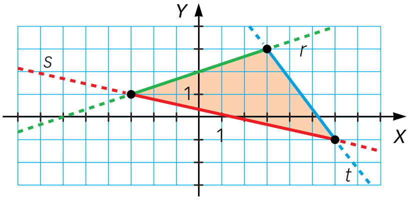
Expresamos la recta en forma continua.

$\dfrac{x + 1}{3} = \dfrac{y + 10}{21}$

En forma general.

$21x + 21 = 3y + 30 \rightarrow 21x - 3y - 9 = 0$

99 Escribe las ecuaciones, en la forma general, de las rectas que forman el siguiente triángulo.



La recta *r* pasa por $(-3, 1)$ y $(3, 3)$ →

$\rightarrow \vec{u}_r = (6, 2) \rightarrow r: -2x + 6y - 12 = 0$

La recta *s* pasa por $(-3, 1)$ y $(6, -1)$ →

$\rightarrow \vec{u}_s = (9, -2) \rightarrow s: 2x + 9y - 3 = 0$

La recta *t* pasa por $(6, -1)$ y $(3, 3)$ →

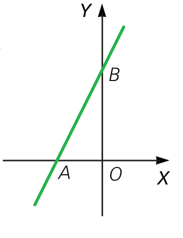
$\rightarrow \vec{v}_t = (-3, 4) \rightarrow t: 4x + 3y - 21 = 0$

100 **INVESTIGA.** Una recta que pasa por los puntos $(m, -9)$ y $(7, m)$ tiene pendiente *m*. ¿Cuánto vale *m*?

$m = \dfrac{m + 9}{7 - m} \rightarrow -m^2 + 6m - 9 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow m = 3$

101 La recta $y = 2x + 4$ pasa por los puntos *A* y *B*, según se muestra en la figura.



Si *M* es el punto medio entre *A* y *B*, determina cuáles son las coordenadas del punto *M*.

$$A:\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ 0 = 2x + 4 \end{array}\right\} \rightarrow x = -2 \rightarrow A(-2, 0)$$

$$B:\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 4 \end{array}\right\} \rightarrow B(0, 4)$$

$$M = \frac{A + B}{2} = (-1, 2)$$

INTERNET

102 ●●○ **MATEMÁTICAS Y... TRÁFICO.** Observa el significado de estas señales de tráfico.

Se suben 5 m por cada 100 m que se avanza en la horizontal. Se dice que la pendiente es del 5 %.

Se bajan 7 m por cada 100 m que se avanza en la horizontal. Se dice que la pendiente es del −7 %.

a) ¿Cuál es la pendiente de una carretera en la que al avanzar 100 m en la horizontal se sube 3 m? ¿Cuál es el ángulo que forma la carretera con la horizontal?

b) Si avanzas 10 m en la horizontal y subimos 2,5 m, ¿qué pendiente tiene la carretera?

c) Si se avanzan 3 m en la horizontal y se bajan 3 m, ¿qué ángulo forma la carretera con la horizontal?

d) ¿Es posible que en una carretera se suba mayor distancia que se avanza en horizontal?

a) La pendiente es del 3 %.

$$tg\,\alpha = \frac{3}{100} \rightarrow$$

$$\rightarrow \alpha = arc\,tg\left(\frac{3}{100}\right) = 1{,}718°$$

b) $\frac{2{,}5}{10} = \frac{25}{100} \rightarrow$

$\rightarrow$ La pendiente sería del 25 %.

c) $tg\,\alpha = \frac{3}{3} \rightarrow \alpha = 45°$

d) No, porque el ángulo que formaría sería mayor de 45°, es decir, la carretera sería impracticable.

6. Reconoce y diferencia analíticamente las posiciones relativas de las rectas

ACTIVIDADES FLASH

103 ●○○ Estudia la posición relativa de $r: -x + 2y + 3 = 0$ con cada una de las siguientes rectas.

a) $s: -x + 2y + 5 = 0$

b) $s: -2x + 4y + 6 = 0$

c) $s: 2x + y = 0$

d) $s: 5x - y - 1 = 0$

e) $s: -2x + 4y + 3 = 0$

f) $s: x - 2y - 3 = 0$

a) $\vec{v}_r = (-2, -1)$

$\vec{v}_s = (-2, -1)$

$P_r = (3, 0) \rightarrow P_r \in s \rightarrow$

$\rightarrow -3 + 0 + 5 \neq 0 \rightarrow P_r \notin s$

r y s son paralelas.

b) $\vec{v}_r = (-2, -1)$

$\vec{v}_s = (-4, -2)$

$P_r = (3, 0) \rightarrow P_r \in s \rightarrow$

$\rightarrow -6 + 0 + 6 = 0 \rightarrow P_r \in s$

r y s son coincidentes.

c) $\vec{v}_r = (-2, -1)$

$\vec{v}_s = (-1, 2)$

r y s son secantes.

d) $\vec{v}_r = (-2, -1)$

$\vec{v}_s = (1, 5)$

r y s son secantes.

e) $\vec{v}_r = (-2, -1)$

$\vec{v}_s = (-4, -2)$

$P_r = (3, 0) \rightarrow P_r \in s \rightarrow$

$\rightarrow -6 + 0 + 3 \neq 0 \rightarrow P_r \notin s$

r y s son paralelas.

f) $\vec{v}_r = (-2, -1)$

$\vec{v}_s = (2, 1)$

$P_r = (3, 0) \rightarrow P_r \in s \rightarrow$

$\rightarrow 3 - 0 - 3 = 0 \rightarrow P_r \in s$

r y s son coincidentes.

104 ●○○ **INVENTA.** Modifica un solo número para encontrar dos rectas paralelas a cada una de las siguientes.

a) $2x + 3y - 4 = 0$

b) $y = 5x - 2$

c) $y - 3 = 2(x - 4)$

d) $(x, y) = (1, 2) + t(3, -1)$

e) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{5}$

Se trata de mantener el mismo vector director.

Respuesta libre. Por ejemplo:

a) $2x + 3y + 1 = 0$
$2x + 3y - 3 = 0$

b) $y = 5x + 1$
$y = 5x + 2$

c) $y - 3 = 2(x - 5)$
$y - 3 = 2(x + 2)$

d) $(x, y) = (1, 3) + t(3, -1)$
$(x, y) = (1, -3) + t(3, -1)$

e) $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y+3}{5}$
$\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+3}{5}$

105 ●○○ Estudia la posición relativa que tienen estas rectas.

a) $r: \left.\begin{array}{l} x = 1 - 4\lambda \\ y = 3 - 2\lambda \end{array}\right\}$ $\qquad s: \left.\begin{array}{l} x = 2 + 3\mu \\ y = 7 - 2\mu \end{array}\right\}$

b) $r: \left.\begin{array}{l} x = 1 - 6\lambda \\ y = -3 + 2\lambda \end{array}\right\}$ $\qquad s: \left.\begin{array}{l} x = 2 + 3\mu \\ y = -\mu \end{array}\right\}$

a) $\vec{u}_r = (-4, -2)$ $\qquad \vec{u}_s = (3, -2)$

Como los vectores no son proporcionales, las rectas son secantes.

b) $\vec{u}_r = (-6, 2)$ $\qquad \vec{u}_s = (3, -1)$

Como los vectores son proporcionales, las rectas son paralelas o coincidentes.

Veamos si el punto $A_r(1, -3)$, de la recta r, pertenece a la recta s.

$$\left.\begin{array}{l} 1 = 2 + 3\mu \\ -3 = -\mu \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \mu = -\dfrac{1}{3} \\ \mu = 3 \end{array}\right\}$$

Las rectas son paralelas.

106 ●○○ Decide qué posición relativa tienen las rectas.

a) $r: \dfrac{x-2}{6} = \dfrac{y+1}{-2}$

$s: \dfrac{x+1}{-3} = \dfrac{y+3}{1}$

b) $r: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{-3}$

$s: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+3}{-3}$

a) $\vec{u}_r = (6, -2)$ $\qquad \vec{u}_s = (-3, 1)$

Como los vectores son proporcionales, las rectas son paralelas o coincidentes.

Veamos si el punto $A_r(2, -1)$, de la recta r, pertenece a la recta s.

$$\frac{2+1}{-3} \neq \frac{-1+3}{1}$$

Las rectas son paralelas.

b) $\vec{u}_r = (2, -3)$ $\qquad \vec{u}_s = (2, -3)$

Como los vectores son iguales, las rectas son paralelas o coincidentes.

Veamos si el punto $A_r(-1, 2)$, de la recta r, pertenece a la recta s.

$$\frac{-1+1}{2} \neq \frac{-2+3}{-3}$$

Las rectas son paralelas.

107 ●○○ Averigua qué posición relativa tienen los siguientes pares de rectas.

a) $r: 3x - 5y + 9 = 0$
$s: x + 4y - 3 = 0$

b) $r: 6x - 4y + 11 = 0$
$s: -9x + 6y - 1 = 0$

c) $r: 4x - y + 1 = 0$
$s: 2x - 3y + 13 = 0$

a) $\dfrac{3}{1} \neq \dfrac{-5}{4} \rightarrow$ Las rectas son secantes.

b) $\dfrac{-9}{6} = \dfrac{6}{-4} \neq \dfrac{-1}{11} \rightarrow$
$\rightarrow$ Las rectas son paralelas.

c) $\dfrac{4}{2} \neq \dfrac{-1}{-3} \rightarrow$ Las rectas son secantes.

108 ¿En qué posición relativa están estas parejas de rectas?

a) $r\colon \left.\begin{array}{l} x = -1 + 4t \\ y = 3 - 2t \end{array}\right\}$ $\quad s\colon x + 2y - 7 = 0$

b) $r\colon \dfrac{x}{2} = y - 3$ $\quad s\colon 3x - 6y + 4 = 0$

c) $r\colon y = 3x - 1$ $\quad s\colon \left.\begin{array}{l} x = 4 - 3t \\ y = -2t \end{array}\right\}$

d) $r\colon y = \dfrac{5x + 1}{-2}$ $\quad s\colon \dfrac{x + 3}{2} = \dfrac{y - 7}{-5}$

a) Expresamos la recta r en forma general:

$$\frac{x+1}{4} = \frac{y-3}{-2} \rightarrow$$
$$\rightarrow -2x - 2 = 4y - 12 \rightarrow$$
$$\rightarrow -2x - 4y + 10 = 0$$

Las rectas son paralelas.

b) Expresamos la recta r en forma general.

$r\colon x - 2y + 6 = 0$

Las rectas son paralelas.

c) Expresamos las rectas en forma general.

$r\colon 3x - y - 1 = 0$

$s\colon 2x - 3y - 8 = 0$

Las rectas son secantes.

d) Expresamos las rectas en forma general.

$r\colon \quad -2y = 5x + 1$

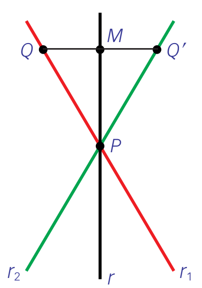
$\quad 5x + 2y + 1 = 0$

$s\colon \quad -5x - 15 = 2y - 14$

$\quad 5x + 2y + 1 = 0$

Las rectas son coincidentes.

109 **RETO.** Las rectas r_1 y r_2 son simétricas respecto de la recta $y = x$. Calcula la ecuación de r_2 si la ecuación de r_1 es $y = ax + b$.



Las rectas se cortan en el mismo punto con la bisectriz del primer y tercer cuadrante, $y = x$.

Calculamos el punto P en el que se corta r_1 con $y = x$.

$$\left.\begin{array}{l} y = ax + b \\ y = x \end{array}\right\} \rightarrow ax - x = -b \rightarrow$$
$$\rightarrow x = \frac{b}{1-a} \rightarrow y = \frac{b}{1-a} \rightarrow$$
$$\rightarrow P\left(\frac{b}{1-a}, \frac{b}{1-a}\right)$$

Elegimos un punto cualquiera Q de la recta r_1, para hallar su simétrico Q' en la recta r_2, y así poder obtener la ecuación de la recta pedida.

Elegimos, por ejemplo, el punto $Q(0, b)$ y calculamos la ecuación de la recta que pasa por este punto y es perpendicular a la recta $y = x$, siendo su vector director $\vec{u} = (1, 1)$.

$$\vec{v} \perp \vec{u} \rightarrow \vec{v} = (1, -1) \rightarrow$$
$$\rightarrow \frac{x-0}{1} = \frac{y-b}{-1}$$

Calculamos el punto de intersección entre esta recta y la recta $y = x$.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-0}{1} = \dfrac{y-b}{-1} \\ y = x \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{b}{2} \rightarrow y = \frac{b}{2} \rightarrow$$
$$\rightarrow M\left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right)$$

Como M es el punto medio entre Q y Q', podemos calcular Q'.

$$M = \frac{Q + Q'}{2} \rightarrow$$
$$\rightarrow Q' = 2M - Q = 2\left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right) - (0, b) =$$
$$= (b, 0)$$

Ahora ya podemos calcular la recta pedida, ya que sabemos que pasa por Q' y por P.

$$\overrightarrow{Q'P} = \left(\frac{b}{1-a} - b, \frac{b}{1-a} - 0\right) =$$
$$= \left(\frac{ab}{1-a}, \frac{b}{1-a}\right)$$

$$\frac{x-b}{\dfrac{ab}{1-a}} = \frac{y-0}{\dfrac{b}{1-a}} \rightarrow y = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}$$

110 A partir de las rectas, contesta.

$r\colon \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y+3}{-1}$ $\quad s\colon -x + 2y + 4 = 0$

a) Resuelve el sistema de ecuaciones que forman.

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y+3}{-1} \\ -x + 2y + 4 = 0 \end{array}\right\}$$

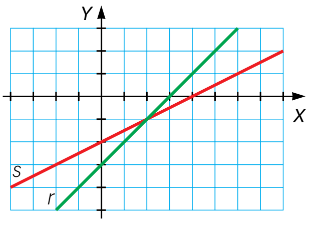
b) Representa cada una de las rectas en los mismos ejes de coordenadas.

c) ¿En qué punto se cortan? ¿Qué relación encuentras con la solución del sistema de ecuaciones?

a) $\left.\begin{array}{r} -x = -y - 3 \\ -x + 2y + 4 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x = y + 3 \\ -(y+3) + 2y + 4 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 2 \\ y = -1 \end{array}\right\}$

b)



c) Se cortan en el punto $P(2, -1)$.
Es la solución del sistema de ecuaciones del primer apartado.

111 Determina si las rectas r y s se cortan. En caso afirmativo calcula el punto de corte.

a) $r\colon 2x + 3y - 3 = 0$
$s\colon 3x - 4y - 13 = 0$

b) $r\colon 6x + 9y - 3 = 0$
$s\colon 2x + 3y - 1 = 0$

c) $r\colon x - 2y + 3 = 0$
$s\colon -3x + 6y - 8 = 0$

a) $\dfrac{2}{3} \neq \dfrac{3}{-4} \rightarrow$ Se cortan.

Para calcular el punto de corte, resolvemos el sistema de ecuaciones.

$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y - 3 = 0 \\ 3x - 4y - 13 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow x = 3,\ y = -1$

El punto de corte es $(3, -1)$

b) $\dfrac{6}{2} = \dfrac{9}{3} = \dfrac{-3}{-1} \rightarrow$ Son rectas coincidentes.

c) $\dfrac{1}{-3} = \dfrac{-2}{6} \neq \dfrac{3}{-8} \rightarrow$ No se cortan, son rectas paralelas.

112 Indica, si es posible, los puntos de corte de los siguientes pares de rectas.

a) $r\colon \left.\begin{array}{l} x = 3 - \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \end{array}\right\}$ $\quad s\colon \left.\begin{array}{l} x = -1 - 4\mu \\ y = 5 + 3\mu \end{array}\right\}$

b) $r\colon \left.\begin{array}{l} x = 7 - 2\lambda \\ y = 3\lambda \end{array}\right\}$ $\quad s\colon \left.\begin{array}{l} x = 5 - 4\mu \\ y = 3 - 6\mu \end{array}\right\}$

c) $r\colon \left.\begin{array}{l} x = 1 - 2\lambda \\ y = -4 + 4\lambda \end{array}\right\}$ $\quad s\colon \left.\begin{array}{l} x = -3 + \mu \\ y = -1 + 2\mu \end{array}\right\}$

Igualamos las coordenadas correspondientes y resolvemos el sistema obtenido.

a) $\left.\begin{array}{r} 3 - \lambda = -1 - 4\mu \\ -1 + 2\lambda = 5 + 3\mu \end{array}\right\} \xrightarrow{\lambda = 4(\mu + 1)}$

$\rightarrow -1 + 8(\mu + 1) = 5 + 3\mu \rightarrow$

$\rightarrow \mu = -\dfrac{2}{5} \rightarrow \lambda = \dfrac{12}{5} \rightarrow$

$\rightarrow$ El punto de corte es $\left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{19}{5}\right)$.

b) $\left.\begin{array}{r} 7 - 2\lambda = 5 - 4\mu \\ 3\lambda = 3 - 6\mu \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} \lambda - 2\mu = 1 \\ \lambda + 2\mu = 1 \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow \lambda = 1 \rightarrow \mu = 0 \rightarrow$

$\rightarrow$ El punto de corte es $(5, 3)$.

c) $\left.\begin{array}{r} 1 - 2\lambda = -3 + \mu \\ -4 + 4\lambda = -1 + 2\mu \end{array}\right\} \rightarrow$

$\left.\begin{array}{r} 2\lambda + \mu = 4 \\ 4\lambda - 2\mu = 3 \end{array}\right\} \xrightarrow{\mu = 4 - 2\lambda}$

$\rightarrow 4\lambda - 2(4 - 2\lambda) = 3 \rightarrow$

$\rightarrow \lambda = \dfrac{11}{8} \rightarrow \mu = \dfrac{5}{4} \rightarrow$

$\rightarrow$ El punto de corte es $\left(-\dfrac{7}{4}, \dfrac{3}{2}\right)$.

113 ●○○ Calcula los puntos de corte, si es posible, de las parejas de rectas.

a) $r\colon 2x - y + 8 = 0$

$s\colon \left.\begin{array}{l} x = 2 + 3t \\ y = 7 + t \end{array}\right\}$

b) $r\colon y = \dfrac{-2x + 7}{3}$

$s\colon \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{-2}$

c) $r\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{-6}$

$s\colon 3x + y + 2 = 0$

d) $r\colon \left.\begin{array}{l} x = -1 - 3t \\ y = 5 + 8t \end{array}\right\}$

$s\colon \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+7}{-4}$

e) $r\colon y = \dfrac{6x+3}{2}$

$s\colon \left.\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = \dfrac{3}{2} + 3t \end{array}\right\}$

a) $2(2 + 3t) - (7 + t) + 8 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow 4 + 6t - 7 - t + 8 = 0 \rightarrow t = -1$

El punto de corte es $P(-1, 6)$.

b) $\left.\begin{array}{l} 3y = -2x + 7 \\ -2x + 4 = 3y - 3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 7 \\ -2x - 3y = -7 \end{array}\right\}$

Hay infinitos puntos de corte. Las rectas son coincidentes.

c) $\left.\begin{array}{l} -6x + 6 = 2y + 6 \\ 3x + y + 2 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow \left.\begin{array}{l} -6x - 2y = 0 \\ 3x + y = -2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x + y = 0 \\ 3x + y = -2 \end{array}\right\}$

No hay puntos de corte. Las rectas son paralelas.

d) $\dfrac{-1 - 3t - 3}{1} = \dfrac{5 + 8t + 7}{-4} \rightarrow$

$\rightarrow 12t + 16 = 8t + 12 \rightarrow t = -1$

El punto de corte es $P(2, -3)$.

e) $\dfrac{3}{2} + 3t = \dfrac{6 + 6t + 3}{2} \rightarrow$

$\rightarrow 3 + 6t = 6t + 9$

No hay puntos de corte. Las rectas son paralelas.

114 ●○○ Halla los puntos de corte de estas rectas.

a) $r\colon x + 2y - 5 = 0$

$s\colon \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{-1}$

b) $r\colon \left.\begin{array}{l} x = 2 - 3t \\ y = 5 + t \end{array}\right\}$

$s\colon x + 3y - 2 = 0$

c) $r\colon \left.\begin{array}{l} x = 2 + t \\ y = 3 - 5t \end{array}\right\}$

$s\colon 2x - y + 5 = 0$

a) $s\colon \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{-1} \rightarrow$

$\rightarrow -x + 3 = 2y - 2 \rightarrow$

$\rightarrow x + 2y - 5 = 0$

$\rightarrow$ Son rectas coincidentes. Los puntos de corte son todos los pertenecimientes a ellas.

b) $(2 - 3t) + 3(5 + t) - 2 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 2 - 3t + 15 + 3t - 2 \neq 0 \rightarrow$

$\rightarrow$ No se cortan.

c) $2(2 + t) - (3 - 5t) + 5 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 4 + 2t - 3 + 5t + 5 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow t = -\dfrac{6}{7} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{8}{7} \\ y = \dfrac{51}{7} \end{array}\right. \rightarrow$

$\rightarrow$ El punto de corte es $\left(\dfrac{8}{7}, \dfrac{51}{7}\right)$.

115 ●●○ Calcula el valor de k para que estas tres rectas se corten en un solo punto. Determina las coordenadas del punto.

$$2x + 5y - 1 = 0$$
$$-x + 2y + k = 0$$
$$4x + 7y - 5 = 0$$

Calculamos el punto de corte entre dos de las rectas.

$\left.\begin{array}{l} 2x + 5y - 1 = 0 \\ 4x + 7y - 5 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow x = 3 \rightarrow y = -1$

Sustituimos estos valores en la tercera recta.

$-x + 2y + k = 0 \rightarrow$

$\rightarrow -3 - 2 + k = 0 \rightarrow$

$\rightarrow k = 5$

116 Considera las rectas que representan a los ejes de coordenadas y resuelve.

a) Calcula el vector director del eje *OX*.
b) Halla el vector director del eje *OY*.
c) Escribe la ecuación vectorial de cada eje de coordenadas.
d) Calcula la ecuación vectorial de la recta paralela al eje *OX* que pasa por el punto (3, 2).
e) Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta paralela al eje *OY* que pasa por el punto (3, 2).

a) $\vec{v} = (1, 0)$

b) $\vec{v} = (0, 1)$

c) Eje *X*: $(x, y) = (0, 0) + t(1, 0)$
Eje *Y*: $(x, y) = (0, 0) + t(0, 1)$

d) $(x, y) = (3, 2) + t(1, 0)$

e) $\left.\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 2 + t \end{array}\right\}$

117 Expresa en forma vectorial, paramétrica y continua la ecuación de la recta que:

a) Pasa por el punto (1, 3) y es paralela a la recta $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{-4}$.
b) Es paralela a la recta $5x - 2y + 12 = 0$ y pasa por el punto $(-2, 5)$.
c) Es paralela a la bisectriz del tercer cuadrante y pasa por el punto (0, 1).

a) Vectorial: $(x, y) = (1, 3) + t(2, -4)$

Paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 4t \end{array}\right\}$

Continua: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{-4}$

b) Vectorial: $(x, y) = (-2, 5) + t(2, 5)$

Paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = -2 + 2t \\ y = 5 + 5t \end{array}\right\}$

Continua: $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-5}{5}$

c) Vectorial: $(x, y) = (0, 1) + t(1, 1)$

Paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = 1 + t \end{array}\right\}$

Continua: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{1}$

118 Expresa en forma explícita la recta que:

a) Pasa por el punto $(0, -1)$ y es paralela a la recta $\left.\begin{array}{l} x = 2 + 3t \\ y = -4 \end{array}\right\}$.
b) Es paralela a la recta $\dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y}{-1}$ y pasa por el punto $(5, -2)$.
c) Es paralela al eje de abscisas y pasa por el punto $(-3, 7)$.

a) Vector director de la recta: (3, 0)
Pendiente: $m = 0$
$-1 = 0x + n \rightarrow n = -1$
Ecuación explícita $\rightarrow y = -1$

b) Vector director de la recta: $(4, -1)$
Pendiente: $m = -\dfrac{1}{4}$
$-2 = -\dfrac{5}{4} + n \rightarrow n = -\dfrac{3}{4}$
Ecuación explícita $\rightarrow y = -\dfrac{1}{4}x - \dfrac{3}{4}$

c) Si es paralela al eje *X*, su pendiente es nula; por tanto, se trata de una recta horizontal que pasa por el punto $(-3, 7)$, es decir: $y = 7$.

119 Escribe en forma vectorial y paramétrica la ecuación de la recta que:

a) Pasa por el punto $(0, -3)$ y es perpendicular a la recta
$$\frac{x+2}{-3} = \frac{y+1}{4}.$$
b) Pasa por el punto $(-5, 0)$ y es perpendicular a la recta $-3x - 2y + 7 = 0$.

a) Un vector perpendicular a $(-3, 4)$ es $(4, 3)$.
Ecuación vectorial:
$(x, y) = (0, -3) + t(4, 3)$
Ecuaciones paramétricas:
$\left.\begin{array}{l} x = 4t \\ y = -3 + 3t \end{array}\right\}$

b) Calculamos el vector director de la recta:
$A(1, 2), B(-1, 5) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-2, 3)$
Un vector perpendicular a $(-2, 3)$ es $(-3, -2)$.

Ecuación vectorial:
$(x, y) = (-5, 0) + t(-3, -2)$
Ecuaciones paramétricas:
$$\left.\begin{array}{l} x = -5 - 3t \\ y = -2t \end{array}\right\}$$

120 ●○○ Discute la posición relativa de estas rectas.

a) $r: y = \dfrac{6x - 1}{4}$ $\qquad s: y = \dfrac{-3x + 5}{-2}$

b) $r: y = \dfrac{-3x + 1}{2}$ $\qquad s: y = \dfrac{x - 3}{-3}$

a) La pendiente de la recta r es
$m_r = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$.

La pendiente de la recta s es $m_s = \dfrac{3}{2}$.

Como las pendientes son iguales, las rectas son paralelas o coincidentes.

Veamos si el punto $A_s(1, -1)$, de la recta s, pertenece a la recta r.

$$-1 \neq \frac{6 - 1}{4}$$

Las rectas son paralelas.

b) La pendiente de la recta r es $m_r = -\dfrac{3}{2}$

y la de la recta s es $m_s = -\dfrac{1}{3}$.

Como las pendientes son distintas, son rectas secantes.

121 ●●○ Halla el valor que debe tomar k para que la recta $\dfrac{x + 1}{k} = \dfrac{y - 2}{3}$ sea paralela a $\left.\begin{array}{l} x = 3 - t \\ y = 2 + 5t \end{array}\right\}$.

Para que las rectas sean paralelas, los vectores directores deben ser proporcionales.

$$\frac{k}{-1} = \frac{3}{5} \rightarrow k = -\frac{3}{5}$$

122 ●●○ Encuentra el valor de a para que la recta $ax + 3y - 7 = 0$ sea paralela a $\dfrac{x - 1}{5} = y + 2$.

Para que las rectas sean paralelas, los vectores directores deben ser proporcionales.

$$\frac{-3}{5} = \frac{a}{1} \rightarrow a = -\frac{3}{5}$$

123 ●●○ **INVESTIGA.** Demuestra que todas las rectas cuya ecuación es del tipo $y = ax + a$ pasan por el mismo punto.

a) Halla dicho punto.

b) Escribe la ecuación de la recta de ese tipo que es paralela a:
$$\left.\begin{array}{l} x = 21 - 3t \\ y = -1 + 2t \end{array}\right\}$$

a) Hallamos el punto de corte.

$$\left.\begin{array}{l} y = ax + a \\ y = bx + b \end{array}\right\} \rightarrow ax + a = bx + b \rightarrow$$
$$\rightarrow (a - b)x = -(a - b) \rightarrow x = -1 \rightarrow$$
$$\rightarrow y = 0$$

Todas las rectas $y = ax + a$ pasan por $(-1, 0)$.

b) Como la recta es paralela a la recta dada, su vector director es $(-3, 2)$.

$$m = -\frac{2}{3}$$

$$y = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$$

124 ●●○ Calcula el valor de k para que las rectas r y s sean paralelas.

$$r: kx + (k + 1)y + 8 = 0$$
$$s: 5x + 6y - 12 = 0$$

$$\frac{k}{5} = \frac{k + 1}{6} \neq \frac{8}{-12} \rightarrow 6k = 5k + 5 \rightarrow$$
$$\rightarrow k = 5$$

125 ●●○ Determina el valor de k para que las rectas r y s sean perpendiculares.

$$r: k^2x + (k + 1)y + 8 = 0$$
$$s: 16x - 9y - 5 = 0$$

$\vec{v}_r = (-k - 1, k^2)$
$\vec{v}_s = (9, 16)$
$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = -9k - 9 + 16k^2 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow k = \dfrac{9 \pm 3\sqrt{73}}{32}$

7. Calcula distancias entre puntos, de un punto a una recta, y ángulos entre dos rectas

ACTIVIDADES FLASH

126 Calcula la distancia entre estos pares de puntos.

a) $A(1, 0), B(2, 0)$

b) $A(1, 2), B(1, 3)$

c) $A(-5, 4), B(-3, 4)$

d) $A(0, 2), B(-1, 2)$

a) $d(A, B) = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$

b) $d(A, B) = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$

c) $d(A, B) = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$

d) $d(A, B) = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$

127 Halla la distancia del punto $P(1, 0)$ a estas rectas.

a) $x + 1 = 0$

b) $y - 3 = 0$

c) $5x + 4 = 0$

d) $3y - 2 = 0$

a) $d(P, r) = \dfrac{|1 + 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = 2$

b) $d(P, r) = \dfrac{|0 - 3|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = 3$

c) $d(P, r) = \dfrac{|5 + 4|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = 9$

d) $d(P, r) = \dfrac{|0 - 2|}{\sqrt{0^2 + 3^2}} = \dfrac{2}{3}$

128 Halla la distancia del punto $P(4, -2)$ a estas rectas.

a) $-6x + 8y - 5 = 0$

b) $\left.\begin{array}{l} x = 2 - t \\ y = 2 + 2t \end{array}\right\}$

c) $\dfrac{x - 1}{3} = \dfrac{y - 2}{6}$

d) $y = \dfrac{4x - 5}{3}$

a) $d(P, r) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \dfrac{|-6 \cdot 4 + 8 \cdot (-2) - 5|}{\sqrt{(-6)^2 + 8^2}} = \dfrac{45}{10} = \dfrac{9}{2}$ u

b) Calculamos la ecuación general de la recta.

$-x + 2 = \dfrac{y - 2}{2} \rightarrow 2x + y - 6 = 0$

$d(P, r) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \dfrac{|2 \cdot 4 + 1 \cdot (-2) - 6|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 0$ u

c) Hallamos la ecuación general de la recta.

$6x - 6 = 3y - 6 \rightarrow 6x - 3y = 0 \rightarrow$
$\rightarrow 2x - y = 0$

$d(P, r) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \dfrac{|2 \cdot 4 - 1 \cdot (-2)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \dfrac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$ u

d) Determinamos la ecuación general de la recta.

$3y = 4x - 5 \rightarrow -4x + 3y + 5 = 0$

$d(P, r) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \dfrac{|-4 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) + 5|}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = \dfrac{17}{5}$ u

129 Determina la distancia entre la recta que pasa por los puntos $A(-2, 4)$ y $B(4, -2)$ y el punto $P(-3, 2)$.

$\overrightarrow{AB} = (6, -6) = (1, -1)$

Escribimos la ecuación de la recta en forma general.

$\dfrac{x + 2}{1} = \dfrac{y - 4}{-1} \rightarrow x + y - 2 = 0$

$d(P, r) = \dfrac{|1 \cdot (-3) + 1 \cdot 2 - 2|}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

130 Comprueba que las siguientes rectas son paralelas y calcula la distancia entre ellas.

a) $r: 4x - 3y + 1 = 0$
   $s: 8x - 6y - 5 = 0$

b) $r: x + 2y - 5 = 0$
   $s: 4x + 8y + 2 = 0$

c) $r: 5x - y - 16 = 0$
   $s: 5x - y + 16 = 0$

a) $\frac{4}{8} = \frac{-3}{-6} \neq \frac{1}{5} \rightarrow$ Son paralelas.

Un punto de la recta r es $P(2, 3)$.

$$d(P, s) = \frac{|8 \cdot 2 - 6 \cdot 3 - 5|}{10} = \frac{7}{10}$$

b) $\frac{1}{4} = \frac{2}{8} \neq \frac{-5}{2} \rightarrow$ Son paralelas.

Un punto de la recta r es $P(-1, 3)$.

$$d(P, s) = \frac{|4 \cdot (-1) + 8 \cdot 3 + 2|}{\sqrt{96}} = \frac{11\sqrt{6}}{12}$$

c) $\frac{5}{5} = \frac{-1}{-1} \neq \frac{-16}{16} \rightarrow$ Son paralelas.

Un punto de la recta r es $P(3, -1)$.

$$d(P, s) = \frac{|5 \cdot 3 - 1 \cdot (-1) + 16|}{\sqrt{26}} = \frac{16\sqrt{26}}{13}$$

131 Calcula cuánto debe valer a para que la distancia entre el punto $A(2, a)$ y la recta $r: 13x - 12y + 2 = 0$ sea de 3 unidades.

$$d(A, r) = \frac{|13 \cdot 2 - 12 \cdot a + 2|}{\sqrt{313}} = 3 \rightarrow$$

$$\rightarrow |28 - 12a| = 3\sqrt{313}$$

- Si $28 - 12a \geq 0$:

  $28 - 12a = 3\sqrt{313} \rightarrow a = \frac{28 - 3\sqrt{313}}{12}$

- Si $28 - 12a \leq 0$:

  $-28 + 12a = 3\sqrt{313} \rightarrow$

  $\rightarrow a = \frac{3\sqrt{313} + 28}{12}$

132 Sean los puntos $A(4, 4)$ y $B(0, 8)$ y la recta $3x - 4y = 0$, halla las coordenadas del punto P que está sobre el segmento AB y su distancia a la recta es 3 unidades.

El punto P pertenece a la recta que une los puntos A y B: $\overrightarrow{AB} = (-4, 4) = (-1, 1)$.

Escribimos la ecuación recta que pasa por $(4, 4)$ y tiene vector director $(-1, 1)$.

$$\frac{x - 4}{-1} = \frac{y - 4}{1} \rightarrow x + y - 8 = 0$$

Ahora, la distancia de $P(x, y)$ a la recta $3x - 4y = 0$ es 3.

$$d(P, r) = \frac{|3x - 4y + 0|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 3 \rightarrow$$

$$\rightarrow |3x - 4y| = 15$$

Resolvemos el sistema para hallar las coordenadas del punto $P(x, y)$.

$$\left.\begin{array}{l} x + y - 8 = 0 \\ |3x - 4y| = 15 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow |3x - 4(8 - x)| = 15 \rightarrow$$

$$\rightarrow |7x - 32| = 15$$

- $7x - 32 = 15 \rightarrow x = \frac{47}{7} \rightarrow P\left(\frac{47}{7}, \frac{8}{7}\right)$

- $7x - 32 = -15 \rightarrow x = \frac{17}{7} \rightarrow$

  $\rightarrow P\left(\frac{17}{7}, \frac{39}{7}\right)$

133 Determina el punto de la recta $\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 1}{-1}$ que dista 2 unidades del punto $P(-2, 2)$.

Calculamos un punto genérico de la recta r.

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \end{array}\right\} \rightarrow P_r(1 + 2t, -1 - t)$$

$$d(P_r, P) = \sqrt{(1 + 2t + 2)^2 + (-1 - t - 2)^2} =$$

$$= 2 \rightarrow 5t^2 + 18t + 14 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow t = \frac{-9 \pm \sqrt{11}}{5}$$

- $t_1 = \frac{-9 + \sqrt{11}}{5} \rightarrow$

  $\rightarrow P_1\left(\frac{2\sqrt{11} - 13}{5}, \frac{4 - \sqrt{11}}{5}\right)$

- $t_2 = \frac{-9 - \sqrt{11}}{5} \rightarrow$

  $\rightarrow P_2\left(\frac{-2\sqrt{11} - 13}{5}, \frac{4 + \sqrt{11}}{5}\right)$

134 ●●● **RETO.** Si (a, b) y (c, d) son dos puntos de la recta $y = mx + k$, calcula la distancia entre ellos en función de a, c y m.

Sean $P(a, b)$ y $Q(c, d)$.

$d(P, Q) = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$

Teniendo en cuenta que ambos puntos pertenecen a la recta dada, se verifican las siguientes ecuaciones:

$b = am + k \qquad d = cm + k$

Por tanto:

$$d(P, Q) = \sqrt{(c-a)^2 + (cm + k - am - k)^2} = (a + c)\sqrt{1 + m^2}$$

135 ●●○ Calcula el valor de k para que la distancia entre las rectas $r: 3x + 4y + k = 0$ y $s: 6x + 8y - 10 = 0$ sea 4 unidades.

Los vectores directores de las rectas son $\vec{v}_r = (-4, 3)$ y $\vec{v}_s = (-8, 6)$, respectivamente. Por tanto, son paralelas.

La distancia entre ambas rectas es la distancia de un punto de ellas a la otra.

Consideramos la distancia del punto $P(3, -1) \in s$ a la recta r.

$$d(P, r) = \frac{|3 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) + k|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 4 \rightarrow$$

$$\rightarrow |5 + k| = 20 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 5 + k = 20 \rightarrow k = 15 \\ 5 + k = -20 \rightarrow k = -25 \end{cases}$$

136 ●●○ Determina las coordenadas de un punto P, sabiendo que pertenece a la recta $r: x - y + 1 = 0$ y dista 5 unidades del origen de coordenadas.

Sea P un punto cualquiera de la recta, $P(x, x + 1)$.

$$d(P, O) = 5 \rightarrow \sqrt{x^2 + (x+1)^2} = 5 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2x^2 + 2x - 24 = 0 \rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -3$$

Hay dos puntos que cumplen los requisitos: $P_1(2, 3)$ y $P_2(-3, -2)$.

137 ●●○ Encuentra las coordenadas de los puntos pertenecientes a la recta $r: 2x + 3y + 4 = 0$ que están a una distancia de 2 unidades de la recta $s: 3x + 4y - 6 = 0$.

Se denota por $P(a, b)$ al punto o puntos buscados.

- Por un lado, $P \in r \rightarrow 2a + 3b + 4 = 0$
- Por otro lado, imponiendo la condición de la distancia:

$$d(P, s) = \frac{|3a + 4b - 6|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{|3a + 4b - 6|}{5} = 2$$

Resolviendo el sistema formado por ambas ecuaciones, se obtiene P.

$$\left.\begin{array}{r} 2a + 3b + 4 = 0 \\ \dfrac{3a + 4b - 6}{5} = 2 \end{array}\right\} \rightarrow x = 64 \rightarrow$$

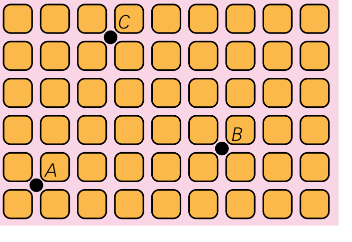
$$\rightarrow y = -44 \rightarrow P_1(64, -44)$$

$$\left.\begin{array}{r} 2a + 3b + 4 = 0 \\ \dfrac{-3a - 4b + 6}{5} = 2 \end{array}\right\} \rightarrow x = 4 \rightarrow$$

$$\rightarrow y = -4 \rightarrow P_2(4, -4)$$

INTERNET

138 ●○○ **MATEMÁTICAS Y... URBANISMO.** En muchos barrios del mundo, las calles son paralelas y se cortan en perpendicular. Esto sucede en barrios como el Eixample (Barcelona) o Russafa (Valencia), incluso fuera de España, en Nueva York o Montevideo.



Sabiendo que cada cuadrícula tiene de lado 50 m:

a) ¿Qué distancia hay del punto A al B? ¿Y al C?

b) Si no hubiera edificios, ¿qué distancia habría entre A y B? ¿Y entre A y C?

c) Determina el área del triángulo ABC.

d) ¿Se trata de un triángulo equilátero, isósceles o escaleno?

a) Para ir de A a B: 250 m a la derecha y 50 m hacia arriba. En total, 300 m.

Para ir de A a C: 100 m a la derecha y 200 m hacia arriba. En total, 300 m.

b) Consideramos estas coordenadas: $A(1, 1)$, $B(6, 2)$ y $C(3, 5)$.

$d(A, B) = |(6, 2) - (1, 1)| = |(5,1)| =$
$= \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$ u

$d(A, C) = |(3, 5) - (1, 1)| = |(2, 4)| =$
$= \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ u

c) Podemos calcular el área del triángulo a partir de la fórmula de Herón, con las longitudes de los tres lados (a, b y c) y el semiperímetro (s).

$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

Sean $a = d(A, B)$; $b = d(A, C)$ y $c = d(B, C)$.

$d(B, C) = |(3, 5) - (6, 2)| = |(-3, 3)| =$
$= \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ u

$$s = \frac{a+b+c}{2} =$$
$$= \frac{\sqrt{26} + 2\sqrt{5} + 3\sqrt{2}}{2} \approx 6{,}9 \text{ u}$$

$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} =$
$= \sqrt{80{,}17} \approx 8{,}95$ u^2

d) Es un triángulo escaleno porque las longitudes de los tres lados son distintas.

139 Determina el ángulo que forman las rectas r y s.

a) $r: \left.\begin{matrix} x = 2 - 3\lambda \\ y = -1 - 2\lambda \end{matrix}\right\}$

$s: \left.\begin{matrix} x = 2\mu \\ y = 5 + 3\mu \end{matrix}\right\}$

b) $r: y = 3x + 2$

$s: y = \dfrac{4x+1}{-2}$

c) $r: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-4}{6}$

$s: \dfrac{2x+3}{-1} = \dfrac{y}{2}$

d) $r: 20x - 4y + 1 = 0$

$s: -15x + 3y + 7 = 0$

a) $\vec{u}_r = (3, 2)$, $\vec{u}_s = (2, 3)$

$$\cos\alpha = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} =$$
$$= \frac{|3 \cdot 2 + 2 \cdot 3|}{\sqrt{3^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{12}{13}$$

$\alpha = 22{,}62°$

b) $\vec{u}_r = (1, 3)$, $\vec{u}_s = (-4, 8)$

$$\cos\alpha = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 \cdot d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} =$$
$$= \frac{|1 \cdot (-4) + 3 \cdot 8|}{\sqrt{1^2 + 3^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + 8^2}} =$$
$$= \frac{20}{\sqrt{800}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\alpha = 45°$

c) $\vec{u}_r = (2, 6)$, $\vec{u}_s = (-1, 4)$

$$\cos\alpha = \frac{|2 \cdot (-1) + 6 \cdot 4|}{\sqrt{40} \cdot \sqrt{17}} = \frac{11}{\sqrt{170}} \rightarrow$$

$\rightarrow \alpha = 32{,}47°$

d) $\vec{u}_r = (4, 20)$, $\vec{u}_s = (3, 15)$

$$\cos\alpha = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} =$$
$$= \frac{|4 \cdot 3 + 20 \cdot 15|}{\sqrt{4^2 + 20^2} \cdot \sqrt{3^2 + 15^2}} =$$
$$= \frac{312}{312} = 1$$

$\alpha = 0°$

140 Calcula el ángulo que forman entre sí las rectas $r: y = x + 1$, $s: x + 4y + 4 = 0$ y $t: \dfrac{x-6}{2} = \dfrac{y+3}{-3}$.

$r: x - y + 1 = 0$

$s: x + 4y + 4 = 0$

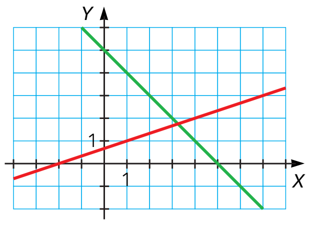
$t: 3x + 2y - 12 = 0$

$$\cos\left(\widehat{r, s}\right) = \frac{|1 \cdot 1 - 1 \cdot 4|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{17}} = \frac{3}{\sqrt{34}} \rightarrow$$
$\rightarrow \left(\widehat{r, s}\right) = 59°$

$$\cos\left(\widehat{r, t}\right) = \frac{|1 \cdot 3 - 1 \cdot 2|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{26}} \rightarrow$$
$\rightarrow \left(\widehat{r, t}\right) = 78{,}69°$

$$\cos\left(\widehat{s, t}\right) = \frac{|1 \cdot 3 + 4 \cdot 2|}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{13}} = \frac{11}{\sqrt{221}} \rightarrow$$
$\rightarrow \left(\widehat{s, t}\right) = 42{,}27°$

141 Halla la ecuación de cada una de estas rectas y calcula el ángulo que forman.



Recta roja:
$P(-2, 0)$; $Q(1, 1) \rightarrow \vec{v}_r = (3, 1)$

Recta verde:
$P(0, 5)$; $Q(5, 0) \rightarrow \vec{v}_s = (1, -1)$

El ángulo que forman las rectas es el que forman los vectores directores.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{v}_s|} = \frac{3 \cdot 1 + 1 \cdot (-1)}{\sqrt{3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2}}$$

$\alpha = 63{,}43°$

142 Obtén la medida de los ángulos que forman las parejas de rectas r y s.

a) $r\colon y = \dfrac{4x - 3}{2}$

s: pasa por $(-1, 6)$ y es paralela a $4x + 2y + 7 = 0$.

b) $r\colon x + 3 = \dfrac{y}{2}$

s: pasa por $(3, 8)$ y es paralela a $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+9}{4}$.

c) $r\colon 8x - 2y - 3 = 0$

s: es perpendicular a $\left.\begin{array}{l} x = 6 - t \\ y = -1 + 3t \end{array}\right\}$ y pasa por $(3, -2)$.

a) $\vec{u}_r = (2, 4)$ $\quad \vec{u}_s = (2, -4)$

$$\cos\alpha = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{|2 \cdot 2 + 4 \cdot (-4)|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{4^2 + 2^2}} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

$\alpha = 53{,}13°$

b) $\vec{u}_r = (1, 2)$ $\quad \vec{u}_s = (2, 4)$

$$\cos\alpha = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{|1 \cdot 2 + 2 \cdot 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{10}{10} = 1$$

$\alpha = 0° \rightarrow$ Las rectas son paralelas.

c) $\vec{u}_r = (2, 8)$

El vector $\vec{u}_s$ debe ser perpendicular a $(-1, 3)$; por tanto, puede ser, por ejemplo, $\vec{u}_s = (3, 1)$.

$$\cos\alpha = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{|2 \cdot 3 + 8 \cdot 1|}{\sqrt{2^2 + 8^2} \cdot \sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{14}{\sqrt{680}} = \frac{7\sqrt{170}}{170}$$

$\alpha = 57{,}53°$

143 Obtén el valor del parámetro b para que la recta $3x + by + 6 = 0$ forme un ángulo de 60° con la recta $y = \dfrac{x+4}{-3}$.

$\vec{u}_r = (-3, 1)$
$\vec{u}_s = (b, -3)$

$$\cos 60° = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} = \frac{|-3 \cdot b + 1 \cdot (-3)|}{\sqrt{(-3)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{b^2 + (-3)^2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow 13b^2 + 36b - 27 = 0 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} b_1 = \dfrac{-18 - 15\sqrt{3}}{13} \\[2ex] b_2 = \dfrac{-18 + 15\sqrt{3}}{13} \end{array}\right.$$

144 Halla el valor de k para que las rectas r y s formen un ángulo de 45°.

$$r\colon \left.\begin{array}{l} x = 2 + t \\ y = -3 + 2t \end{array}\right\}$$

$$s\colon kx - 2y + 1 = 0$$

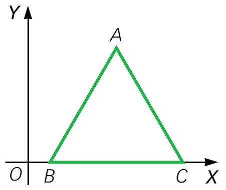
$\vec{u}_r = (1, 2) \quad \vec{u}_s = (2, k)$

$$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|2k + 2|}{\sqrt{k^2 + 4}\sqrt{5}} \rightarrow$$

$$\rightarrow 3k^2 + 16k - 12 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow k_1 = \frac{2}{3} \quad k_2 = -6$$

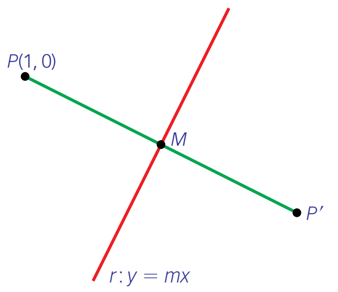
145 **INVESTIGA.** En la figura está representado el triángulo equilátero *ABC*. Determina la ecuación de la recta *AB* sabiendo que la abscisa de *B* es 1.



Al ser un triángulo equilátero, el ángulo que forma *AB* con el eje *X* es de 60°. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} B(1, 0) \\ m = tg\ 60° \end{array}\right\} \rightarrow y - 0 = tg\ 60°(x - 1) \rightarrow$$
$$\rightarrow y = \sqrt{3}(x - 1)$$

146 **RETO.** Indica las coordenadas del punto simétrico a (1, 0) respecto de la recta $y = mx$.



Para hallar el punto simétrico a $P(1, 0)$, calculamos primero el punto *M* que se halla a mitad de camino sobre la recta perpendicular a la recta dada.

$$\vec{u}_r = (1, m) \rightarrow \vec{v} \perp \vec{u}_r \rightarrow \vec{v} = (m, -1)$$

$$P(1, 0) \rightarrow \frac{x - 1}{m} = \frac{y - 0}{-1}$$

M es el punto de intersección de esta recta con $y = mx$.

$$M\left(\frac{1}{m^2 + 1}, \frac{m}{m^2 + 1}\right)$$

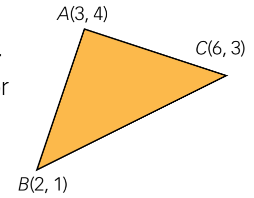
M es el punto medio entre *P* y *P′*.

$$M = \frac{P + P'}{2} \rightarrow P' = 2M - P =$$

$$= 2\left(\frac{1}{m^2 + 1}, \frac{m}{m^2 + 1}\right) - (1, 0) =$$

$$= \left(\frac{1 - m^2}{1 + m^2}, \frac{2m}{1 + m^2}\right)$$

147 Observa este triángulo y calcula.



a) El vector director de la recta que pasa por los vértices *B* y *C*.

b) Un vector perpendicular al lado *BC*.

c) La ecuación de la altura del triángulo que pasa por el vértice *A*.

d) El punto medio, *M*, del lado *BC*, y el punto medio, *N*, del lado *AB*.

e) La ecuación de la mediatriz correspondiente al lado *AB*.

f) El vector formado por el punto *A* y el punto medio del lado *AB*.

g) La ecuación de la mediana del triángulo que pasa por el punto *A*.

a) $\overrightarrow{BC} = (4, 2)$

b) $\vec{u} \perp \overrightarrow{BC} \rightarrow \vec{u} = (2, -4)$

c) Es la recta que pasa por *A* y tiene como vector director el hallado en b).

$$\frac{x - 3}{2} = \frac{y - 4}{-4} \rightarrow -4x - 2y + 20 = 0$$

d) $M = \dfrac{B + C}{2} = (4, 2)$

$$N = \frac{A + B}{2} = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

e) Pasa por el punto medio de *AB*, *N*, y es perpendicular a *AB*.

$$\left.\begin{array}{l} N = \left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{5}{2}\right) \\ \overrightarrow{AB} = (-1, -3) \rightarrow \overrightarrow{AB}^{\perp} = (3, -1) \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{5}{2} + 3t \\ y = \dfrac{5}{2} - t \end{array}\right.$$

f) $\overrightarrow{AN} = \left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{3}{2}\right)$

g) $\begin{cases} \overrightarrow{AM} = (1, -2) \\ A(3, 4) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 4 - 2t \end{cases}$

148 Dado el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1, 0)$, $B(2, 1)$ y $C(0, 3)$, calcula.

a) La ecuación de la recta sobre la que se apoya su lado AC.

b) La ecuación de su altura por el vértice B.

c) La ecuación de la mediatriz correspondiente al lado AB.

d) La ecuación de la mediana correspondiente al lado BC.

e) Las coordenadas de su baricentro.

a) $\begin{cases} \overrightarrow{AC} = (-1, 3) \\ A(1, 0) \end{cases} \rightarrow \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y}{3} \rightarrow$
$\rightarrow 3x + y - 3 = 0$

b) $\vec{u} \perp \overrightarrow{AC} \rightarrow \begin{cases} \vec{u} = (3, 1) \\ B(2, 1) \end{cases} \rightarrow$
$\rightarrow \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{1} \rightarrow$
$\rightarrow x - 3y + 1 = 0$

c) $\overrightarrow{AB} = (1, 1)$

$\vec{u} \perp \overrightarrow{AB} \rightarrow \begin{cases} \vec{u} = (-1, 1) \\ M = \dfrac{A+B}{2} = \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right) \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{x - \frac{3}{2}}{-1} = \dfrac{y - \frac{1}{2}}{1} \rightarrow x + y - 2 = 0$

d) La mediana une un vértice con el punto medio del lado opuesto.

$\begin{cases} A = (1, 0) \\ M = \dfrac{B+C}{2} = (1, 2) \end{cases} \rightarrow$
$\rightarrow \overrightarrow{AM} = (0, 2) \rightarrow x = 1$

e) Las coordenadas del baricentro de un triángulo son la media aritmética de las coordenadas de los tres vértices:

$G = \left(\dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}, \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}\right) =$
$= \left(1, \dfrac{4}{3}\right)$

149 **INVENTA.** Elige tres puntos diferentes que formen un triángulo.

a) Halla las tres rectas definidas por las alturas de cada lado.

b) Comprueba que las tres rectas se cortan en un solo punto.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Sean $A(1, 2)$, $B(0, 1)$ y $C(2, -1)$.

a) Recta de la altura correspondiente al vértice A.

$\begin{cases} A(1, 2) \\ \overrightarrow{BC} = (2, -2) \perp \vec{u} = (2, 2) \end{cases} \rightarrow$
$\rightarrow \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{2} \rightarrow x - y + 1 = 0$

Recta de la altura correspondiente al vértice B.

$\begin{cases} B(0, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (1, -2) \perp \vec{v} = (3, 1) \end{cases} \rightarrow$
$\rightarrow \dfrac{x}{3} = \dfrac{x-1}{1} \rightarrow x - 3y + 3 = 0$

Recta de la altura correspondiente al vértice C.

$\begin{cases} C(2, -1) \\ \overrightarrow{AB} = (-1, -1) \perp \vec{v} = (-1, 1) \end{cases} \rightarrow$
$\rightarrow \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+1}{1} \rightarrow x + y - 1 = 0$

b) Resolvemos el sistema.

$\left.\begin{matrix} x - y + 1 = 0 \\ x - 3y + 3 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

Las tres rectas se cortan en el punto $(0, 1)$.

150 La recta $12x + 5y = 60$ forma un triángulo con los ejes de coordenadas. ¿Cuánto mide cada una de las tres alturas del triángulo?

Punto de corte de la recta con el eje X: $(5, 0)$

Corte con el eje Y: $(0, 12)$

Se trata de un triángulo rectángulo, así que dos de las alturas podemos saberlas directamente. La tercera la calculamos como distancia del vértice a la recta.

$d(O, r) = \dfrac{|0 + 0 - 60|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = \dfrac{60}{13}$ u

Las alturas miden 5 u, 12 u y $\frac{60}{13}$ u, respectivamente.

151 **INVESTIGA.** Si la recta $y = mx$ divide el triángulo de vértices (0, 0), (1, 1) y ($6m$, 0) en dos triángulos de igual área, ¿cuál es la suma de los posibles valores de m?

El área del triángulo completo sería:

$$A = \frac{6m \cdot 1}{2} = 3m \text{ u}^2$$

Ahora calculamos el área del triángulo cuya base está sobre el eje X. Para ello necesitamos hallar la intersección de la recta que une los puntos (1, 1) y ($6m$, 0) y la recta $y = mx$.

Calculamos la recta que une los puntos (1, 1) y ($6m$, 0). El vector director es ($6m - 1$, -1).

$$\frac{x-1}{6m-1} = \frac{y-1}{-1} \rightarrow$$

$$\rightarrow -x + 1 = (6m-1)y - 6m + 1$$

Hallamos la intersección de esta recta con $y = mx$.

$$-\frac{y}{m} + 1 = (6m-1)y - 6m + 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow 6m = \left(6m - 1 + \frac{1}{m}\right)y \rightarrow$$

$$\rightarrow y = \frac{6m^2}{6m^2 - m + 1}$$

Este valor de y es la altura de ese triángulo inferior, que tendría por base $6m$. Por tanto, el área del triángulo inferior es la mitad del triángulo completo.

$$\frac{\frac{6m^2}{6m^2 - m + 1} \cdot 6m}{2} = \frac{3m}{2}$$

Despejamos m en esta expresión.

$$36m^3 = 18m^3 - 3m^2 + 3m \rightarrow$$

$$\rightarrow 18m^3 + 3m^2 - 3m = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow m_1 = 0 \qquad m_2 = -\frac{1}{2} \qquad m_3 = \frac{1}{3}$$

Por tanto, la suma de los posibles valores de m sería:

$$0 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$$

152 Los puntos $A(2, 2)$ y $B(-10, -2)$ son los vértices correspondientes al lado desigual de un triángulo isósceles. Otro de los lados está sobre la recta:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 - 6t \\ y = 1 + 2t \end{array}\right\}$$

Determina el vértice que falta y el área del triángulo.

El vértice que falta tiene de coordenadas $C(1 - 6t, 1 + 2t)$, siendo $d(A, C) = d(B, C)$.

$$d(A, C) = \sqrt{(1 - 6t - 2)^2 + (1 + 2t - 2)^2} =$$

$$= \sqrt{(1 + 6t)^2 + (2t - 1)^2} = \sqrt{40t^2 + 8t + 2}$$

$$d(B, C) = \sqrt{(1 - 6t + 10)^2 + (1 + 2t + 2)^2} =$$

$$= \sqrt{(11 - 6t)^2 + (2t + 3)^2} =$$

$$= \sqrt{40t^2 - 120t + 130}$$

Igualando ambas distancias resulta:

$128t = 128 \rightarrow t = 1$

Por tanto, el vértice que falta es $C(-5, 3)$.

Ahora calculamos la longitud de la base.

$$d(A, B) = \sqrt{(-10 - 2)^2 + (-2 - 2)^2} =$$

$$= \sqrt{160} \text{ u}$$

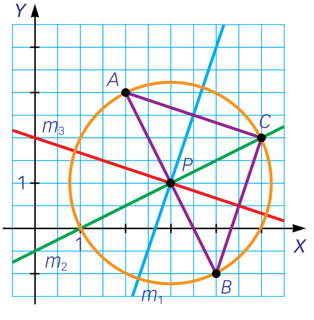
Y la altura podemos calcularla como la distancia entre el punto C y el punto medio M del segmento $\overline{AB}$.

$$M\left(\frac{-10 + 2}{2}, \frac{-2 + 2}{2}\right) = (-4, 0)$$

$$d(C, M) = \sqrt{(-4 + 5)^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{10} \text{ u}$$

$$\text{Área} = \frac{\sqrt{160} \cdot \sqrt{10}}{2} = 20 \text{ u}^2$$

153 Halla las coordenadas del circuncentro del triángulo de vértices $A(2, 3)$, $B(4, -1)$ y $C(5, 2)$, sabiendo que el circuncentro equidista de los vértices.



Para hallar las coordenadas del circuncentro calculamos las ecuaciones de dos de las mediatrices del triángulo y hallamos su intersección:

- Mediatriz 1:

$$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{AC}=(3,-1)\to \vec{V}_{m_1}=(1,3)\\ M_1=\dfrac{A+C}{2}\to M_1=\left(\dfrac{7}{2},\dfrac{5}{2}\right)\end{array}\right.\to$$

$$\to m_1\colon 3x-y=8$$

- Mediatriz 2:

$$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(2,-4)\to \vec{V}_{m_2}=(4,2)\\ M_2=\dfrac{A+B}{2}\to M_2=(3,1)\end{array}\right.\to$$

$$\to m_2\colon x-2y=1$$

Así, el circuncentro es este punto:

$$P=m_1\cap m_2\to \left.\begin{array}{l}3x-y=8\\ x-2y=1\end{array}\right\}\xrightarrow{x=2y+1}$$

$$\to P(3,1)$$

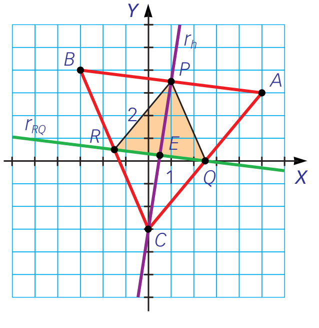
Obteniendo la tercera mediatriz, y viendo si pasa por el circuncentro, se comprueba si está bien calculado:

$$m_3\colon x+3y=6\xrightarrow{P(3,1)}3+3=6$$

Es correcto.

154 ●●○ Calcula el área del triángulo formado al unir los puntos medios de los lados de un triángulo cuyos vértices son los puntos $A(5, 3)$, $B(-3, 4)$ y $C(0, -3)$.

Localizamos los vértices del triángulo y calculamos los puntos medios de sus lados.



- Punto medio de $\overline{AB}$:

$$P=\left(\frac{5-3}{2},\frac{3+4}{2}\right)=\left(1,\frac{7}{2}\right)$$

- Punto medio de $\overline{AC}$:

$$Q=\left(\frac{5+0}{2},\frac{3-3}{2}\right)=\left(\frac{5}{2},0\right)$$

- Punto medio de $\overline{BC}$:

$$R=\left(\frac{-3+0}{2},\frac{4-3}{2}\right)=\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Tomamos como base el segmento $\overline{RQ}$ y calculamos su longitud:

$$b=|\overrightarrow{RQ}|=\sqrt{4^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{65}}{2}\approx$$

$$\approx 4{,}03$$

$$r_{RQ}\colon \left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{RQ}=\left(4,-\dfrac{1}{2}\right)\\ Q=\left(\dfrac{5}{2},0\right)\end{array}\right.\to 2x+16y=5$$

La recta que definirá h cumple que:

$$r_h\colon \left\{\begin{array}{l}\vec{V}_h\perp\overrightarrow{RQ}\\ P\left(1,\dfrac{7}{2}\right)\end{array}\right.\to r_h\colon \left\{\begin{array}{l}\vec{V}_h=\left(\dfrac{1}{2},4\right)\\ P\left(1,\dfrac{7}{2}\right)\end{array}\right.\to$$

$$\to \frac{x-1}{\dfrac{1}{2}}=\frac{y-\dfrac{7}{2}}{4}\to 16x-2y=9$$

El punto de intersección de r_h con r_{RQ} permite obtener la longitud de la altura.

$$\left.\begin{array}{l}2x+16y=5\\ 16x-2y=9\end{array}\right\}\to E\left(\frac{31}{130},-\frac{337}{130}\right)\to$$

$$\to h=|\overrightarrow{EP}|=\left|\left(\frac{99}{130},\frac{396}{65}\right)\right|\approx 6{,}14\text{u}$$

$$\text{Área}=\frac{b\cdot h}{2}=$$

$$=\frac{4{,}03\cdot 6{,}14}{2}=12{,}3721\ \text{u}^2$$

155 ●●○ Los puntos $P(3, 3)$ y $Q(6, -1)$ son simétricos respecto de una recta. Halla la ecuación general de esta recta.

$\overrightarrow{PQ}=(3,-4)$ es el vector normal de la recta.

$$M\left(\frac{3+6}{2},\frac{-1+3}{2}\right)=\left(\frac{9}{2},1\right)$$

$$r\colon 3x-4y-\frac{19}{2}=0\to 6x-8y-19=0$$

156 ●○○ Comprueba si están alineados los puntos $P(-1, 4)$, $Q(3, 1)$ y $R(11, -5)$. En caso afirmativo, escribe la ecuación de la recta que los contiene.

Calculamos los vectores formados por los puntos.

$\overrightarrow{PQ} = (4, -3)$

$\overrightarrow{PR} = (12, -9)$

Como los vectores son proporcionales, los puntos están alineados.

Calculamos la ecuación de la recta que los contiene.

$$r: \begin{cases} x = -1 + 4\lambda \\ y = 4 - 3\lambda \end{cases}$$

157 ●●○ Calcula las coordenadas del centro de un paralelogramo sabiendo que $(5, -1)$, $(9, 5)$ y $(-1, -5)$ son tres de sus vértices. ¿Cuántas soluciones tiene este problema? ¿Por qué? Haz un dibujo en el que se muestren todas las soluciones.

Llamamos a los puntos $A(5, -1)$, $B(9, 5)$ y $C(-1, -5)$.

No sabemos cómo están unidos los vértices entre sí. Supongamos que un lado del paralelogramo es $\overline{AB}$.

$\overrightarrow{AB} = (4, 6)$

Hacemos una traslación de C con vector $(4, 6)$ y obtenemos un punto D, que forma un paralelogramo.

$(-1, -5) + (4, 6) = (3, 1) \rightarrow D(3, 1)$

Calculamos el centro del paralelogramo, E.

$$(x, y) = \left(\frac{9-1}{2}, \frac{5-5}{2}\right) \rightarrow E(4, 0)$$

Hacemos una traslación de C con vector $(-4, -6)$ y obtenemos un punto D', que forma un paralelogramo.

$(-1, -5) + (-4, -6) = (-5, -11) \rightarrow$
$\rightarrow D'(-5, -11)$

Calculamos el centro del paralelogramo, E'.

$$(x, y) = \left(\frac{9-5}{2}, \frac{5-11}{2}\right) \rightarrow E'(2, -3)$$

Supongamos que un lado del paralelograma es $\overline{CB}$.

$\overrightarrow{CB} = (10, 10)$

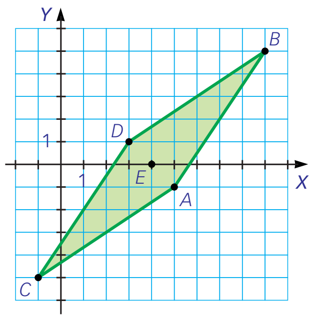
Hacemos una traslación de A con vector $(10, 10)$ y obtenemos un punto D'', que forma un paralelogramo.

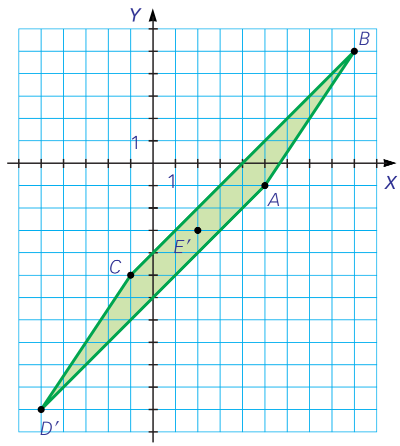
$(5, -1) + (10, 10) = (15, 9) \rightarrow D''(15, 9)$

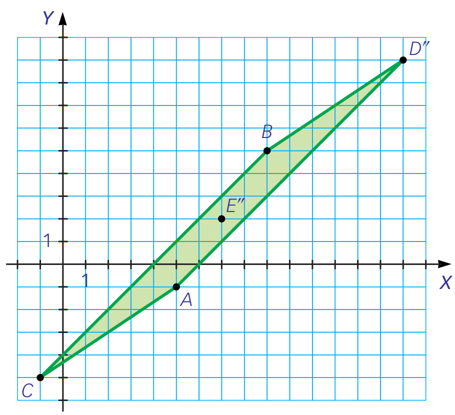
Calculamos el centro del paralelogramo, E''.

$$(x, y) = \left(\frac{15-1}{2}, \frac{9-5}{2}\right) \rightarrow E''(7, 2)$$

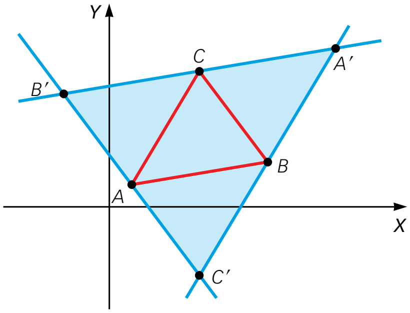
Este problema tiene tres soluciones.







158 Sea el triángulo de vértices $A(1, 1)$, $B\,(7, 2)$ y $C(4, 6)$. Las rectas paralelas por cada vértice al lado opuesto forman un triángulo $A'B'C'$.



Determina las coordenadas de los vértices A', B' y C' y comprueba que los dos triángulos son semejantes calculando los ángulos de ambos triángulos.

Calculamos las rectas determinadas por los puntos A', B' y C' dos a dos.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}_{AB} = \vec{v}_{A'B'} = B - A = (3, 5)\\ C(7, 2)\end{array}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow r_{A'B'}\colon 5x - 3y = 29$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}_{AC} = \vec{v}_{A'C'} = C - A = (6, 1)\\ B(4, 6)\end{array}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow r_{A'C'}\colon x - 6y = -32$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}_{BC} = \vec{v}_{B'C'} = C - B = (3, -4)\\ A(1, 1)\end{array}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow r_{B'C'}\colon 4x + 3y = 7$

Obtenemos A', B' y C' hallando las intersecciones de las rectas anteriores.

$A' = r_{A'B'} \cap r_{A'C'} \rightarrow$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r}5x - 3y = 29\\ x - 6y = -32\end{array}\right\} \xrightarrow{x = 6y - 32}$$

$\rightarrow 5(6y - 32) - 3y = 29 \rightarrow 27y = 189 \rightarrow$
$\rightarrow y = 7 \rightarrow x = 10 \rightarrow A'(10, 7)$

$B' = r_{A'B'} \cap r_{B'C'} \rightarrow$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r}5x - 3y = 29\\ 4x + 3y = 7\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Reducción}} 9x = 36 \rightarrow$$

$\rightarrow x = 4 \rightarrow y = -3 \rightarrow B'(4, -3)$

$$C' = r_{A'C'} \cap r_{B'C'} \rightarrow \left.\begin{array}{r}x - 6y = -32\\ 4x + 3y = 7\end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r}-4x + 24y = 128\\ 4x + 3y = 7\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Reducción}} 27y = 135 \rightarrow$$

$\rightarrow y = -2 \rightarrow x = 5 \rightarrow C'(-2, 5)$

Para terminar, se comprueba que los dos triángulos son semejantes.

$$\cos\beta = \frac{\vec{v}_{AB} \cdot \vec{v}_{BC}}{|\vec{v}_{AB}| \cdot |\vec{v}_{BC}|} = \frac{\vec{v}_{A'B'} \cdot \vec{v}_{B'C'}}{|\vec{v}_{A'B'}| \cdot |\vec{v}_{B'C'}|} =$$

$$= \cos\beta' = \frac{-11}{\sqrt{9 + 25} \cdot \sqrt{9 + 16}} \rightarrow$$

$\rightarrow \beta = \beta' = 67{,}83° \rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{v}_{AC} \cdot \vec{v}_{BC}}{|\vec{v}_{AC}| \cdot |\vec{v}_{BC}|} = \frac{\vec{v}_{A'C'} \cdot \vec{v}_{B'C'}}{|\vec{v}_{A'C'}| \cdot |\vec{v}_{B'C'}|} =$$

$$= \cos\gamma' = \frac{14}{\sqrt{36 + 1} \cdot \sqrt{9 + 16}} \rightarrow$$

$\rightarrow \gamma = \gamma' = 62{,}59° \rightarrow \widehat{BCA} = \widehat{B'C'A'}$

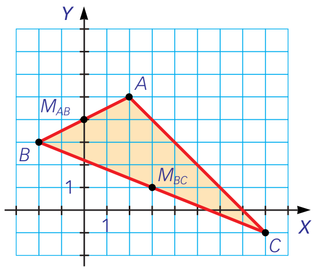
$$\cos\alpha = \frac{\vec{v}_{AB} \cdot \vec{v}_{AC}}{|\vec{v}_{AB}| \cdot |\vec{v}_{AC}|} = \frac{\vec{v}_{A'B'} \cdot \vec{v}_{A'C'}}{|\vec{v}_{A'B'}| \cdot |\vec{v}_{A'C'}|} =$$

$$= \cos\alpha' = \frac{23}{\sqrt{9 + 25} \cdot \sqrt{36 + 1}} \rightarrow$$

$\rightarrow \alpha = 49{,}57° \rightarrow \widehat{CAB} = \widehat{C'A'B'}$

159 En un triángulo ABC, un vértice es $A(2, 5)$. El punto medio del lado BC es $(3, 1)$ y el punto medio del lado AB es $(0, 4)$.

Calcula las coordenadas de los vértices B y C del triángulo.



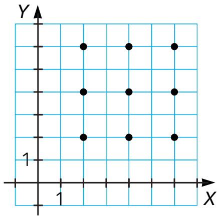
$$M_{AB} = \frac{A + B}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow (0, 4) = \frac{(2, 5) + (b_1, b_2)}{2} \rightarrow B(-2, 3)$$

$$M_{BC} = \frac{B + C}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow (3, 1) = \frac{(-2, 3) + (c_1, c_2)}{2} \rightarrow C(8, -1)$$

160 **RETO.** Encuentra las ecuaciones de cuatro rectas que tengan al menos cuatro puntos de corte y que pasen por estos nueve puntos.



Serían las rectas:

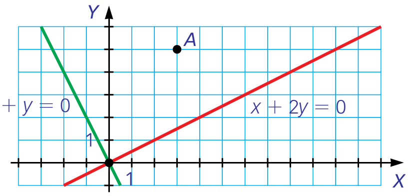
- $x = 2$, que pasa por (2, 2), (2, 4) y (2, 6).
- $y = 2$, que pasa por (2, 2), (4, 2) y (4, 6).
- $y = x$, que pasa por (2, 2), (4, 4) y (6, 6).
- La recta que pasa por (4, 6) y (6, 4), con vector director $(2, -2) = (1, -1)$.

$$\frac{x-4}{1} = \frac{y-6}{-1} \rightarrow y = -x + 10$$

Efectivamente, tienen 4 puntos de corte entre ellas.

161 Uno de los vértices de un paralelogramo es el origen de coordenadas y otro es el punto (3, 5).

Halla las coordenadas de los otros dos vértices si uno está en la recta de ecuación $x - 2y = 0$ y el otro está en la recta de ecuación $2x + y = 0$.



Sean $A(3, 5)$, r: $x - 2y = 0$ y s: $2x + y = 0$ el punto y las rectas conocidas.

Las rectas dadas son perpendiculares, pues el producto escalar de sus vectores es: $(2, 1) \cdot (-1, 2) = -2 + 2 = 0$

Calculamos las ecuaciones de los lados que faltan.

- t: paralela a s que pasa por A.

$\vec{v}_s = (-1, 2) \rightarrow \vec{v}_t = (-1, 2) \xrightarrow{A \in t}$

$\rightarrow t$: $2x + y = 11$

- z: paralela a r que pasa por A.

$\vec{v}_r = (2, 1) \rightarrow \vec{v}_z = (2, 1) \xrightarrow{A \in z}$

z: $x - 2y = -7$

Entonces, los vértices desconocidos del rectángulo son los puntos de intersección siguientes:

$$B = r \cap t \rightarrow \left.\begin{array}{r} x - 2y = 0 \\ 2x + y = 11 \end{array}\right\} \rightarrow B\left(\frac{22}{5}, \frac{11}{5}\right)$$

$$C = s \cap z \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + y = 0 \\ x - 2y = -7 \end{array}\right\} \rightarrow C\left(-\frac{7}{5}, \frac{14}{5}\right)$$

162 **MATEMÁTICAS Y… AVIACIÓN.** Las rutas de los aviones se monitorean continuamente. Las torres de control avisan a los pilotos para que cambien su rumbo si se acercan a la ruta de otro avión. Un avión viaja desde el punto $A(-400, 400)$ hacia $B(800, 400)$ en una hora. Otro avión viaja desde $C(-500, 800)$ hacia $D(700, -700)$ en una hora. Si los dos parten de sus orígenes a la misma hora, ¿cuándo estarán más cerca el uno del otro?

Estarán más cerca en el punto en el que se cortan las rectas por las que viaja cada uno.

La trayectoria del primer avión viene dada por la recta $y = 400$.

Calculamos la ecuación de la recta que sigue el segundo avión.

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{CD} = (1\,200, -1\,500) \\ C(-500, 800) \end{array}\right. \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{x + 500}{1\,200} = \frac{y - 800}{-1\,500} \rightarrow$$

$$\rightarrow -1\,500x - 750\,000 = 1\,200y - 960\,000 \rightarrow$$
$$\rightarrow 5x - 2\,500 = 4y - 3\,200$$

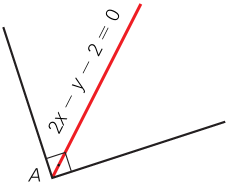
$$\left.\begin{array}{r} y = 400 \\ 5x - 250 = 4y - 320 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = -180 \qquad y = 400$$

Ambos aviones comparten un punto de sus trayectorias $(-180, 400)$; por tanto, será en ese instante cuando la torre de control dé el aviso.

Esta actividad puede utilizarse para trabajar el ODS 9, industria, innovación e infraestructura.

163 Un ángulo recto tiene su vértice en el punto $A(3, 4)$ y su bisectriz tiene por ecuación $2x - y - 2 = 0$. Halla las ecuaciones de sus lados.



La bisectriz tiene por vector director (1, 2).

Escribimos la ecuación punto-pendiente de los lados.

$y - 4 = m(x - 3) \rightarrow$
$\rightarrow -mx + y - 4 + 3m = 0$

Aplicamos la fórmula del ángulo entre dos rectas.

$$\cos 45° = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot m|}{\sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + m^2}}$$

$$\rightarrow -6m^2 - 16m + 6 = 0$$

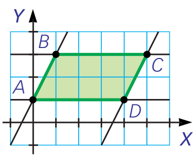
Las ecuaciones de los lados son:

r_1: $3x + y - 13 = 0$

r_2: $-\frac{1}{3}x + y - 3 = 0$

164 Halla los vértices del paralelogramo tal que la ecuación de la recta sobre la que está el lado AB es $2x - y = -1$, la del lado AD es $y = 1$ y el punto C es (5, 3).

Representamos el paralelogramo.



A es la intersección de las rectas AB y AD.

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y + 1 = 0 \\ y = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 \end{array}\right. \rightarrow A(0, 1)$$

Hallamos una recta paralela a $y = 1$ que pase por $C(5, 3)$: $y = 3$.

Es la recta que pasa por B y C.

Ahora intersecamos esta nueva recta con la que pasa por A y B para hallar B.

$$\left.\begin{array}{r} y = 3 \\ 2x - y = -1 \end{array}\right\} \rightarrow B(1, 3)$$

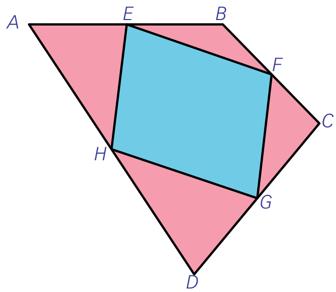
Hallamos la recta paralela a $2x - y = -1$, con vector director $\vec{v} = (1, 2)$ que pasa por $C(5, 3)$. Es la recta que pasa por D y C.

$$\left\{\begin{array}{l} C(5, 3) \\ \vec{v} = (1, 2) \end{array}\right. \rightarrow \frac{x - 5}{1} = \frac{y - 3}{2} \rightarrow$$
$$\rightarrow 2x - y - 7 = 0$$

Intersecamos esta nueva recta con la que pasa por A y D para hallar D.

$$\left.\begin{array}{r} y = 1 \\ 2x - y - 7 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow D(4, 1)$$

165 **RETO.** Sea $ABCD$ un cuadrilátero, demuestra que el área del cuadrilátero formado por los puntos medios de sus lados es la mitad del área de $ABCD$.



$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} =$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$$

Los triángulos ABD y AEH son semejantes con razón de semejanza $\frac{1}{2}$. Por tanto:

$\text{Área}_{AEH} = \frac{1}{4} \cdot \text{Área}_{ABD}$

Análogamente con los otros vértices:

$\text{Área}_{BFE} = \frac{1}{4} \cdot \text{Área}_{ABC}$

$\text{Área}_{CGF} = \frac{1}{4} \cdot \text{Área}_{BCD}$

$\text{Área}_{DGH} = \frac{1}{4} \cdot \text{Área}_{ACD}$

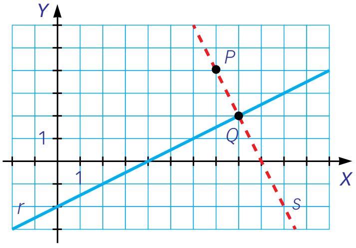
Si sumamos las áreas de estos triángulos:

$$\text{Área}_{AEH} + \text{Área}_{BFE} + \text{Área}_{CGF} + \text{Área}_{DGH} =$$
$$= \frac{1}{4} \cdot (\text{Área}_{ABD} + + \text{Área}_{ABC} + \text{Área}_{BCD} +$$
$$+ \text{Área}_{ACD}) = \frac{1}{2} \cdot \text{Área}_{ABCD}$$

Por tanto: $\text{Área}_{EFGH} = \frac{1}{2} \cdot \text{Área}_{ABCD}$.

166 Halla la proyección ortogonal del punto $P(7, 4)$ sobre la recta $x - 2y - 4 = 0$.

Hacemos la representación gráfica.



Sea r: $x - 2y - 4 = 0$.

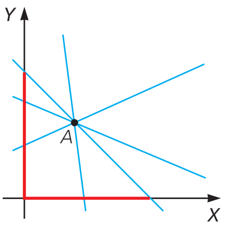
Primero se calcula la recta s, perpendicular a r que pasa por P:

$\vec{v}_r = (2, 1) \rightarrow \vec{v}_s = (-1, 2) \xrightarrow{P \in s}$
$\rightarrow s$: $2x + y = 18$

Así, la proyección ortogonal del punto P sobre la recta r es otro punto Q, que viene determinado por la intersección entre r y s.

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y = 4 \\ 2x + y = 18 \end{array}\right\} \xrightarrow{x = 2y + 4}$$
$\rightarrow 2(2y + 4) + y = 18 \rightarrow Q(8, 2)$

167 De todas las rectas que pasan por el punto $A(2, 3)$, calcula la que determina segmentos iguales al cortar a los dos ejes cartesianos.



Las rectas que pasan por A son de la forma: $y - 3 = m(x - 2)$.

Estas rectas cortan a los ejes en los puntos:

$(0, 3 - 2m)$ y $\left(\dfrac{-3 + 2m}{m}, 0\right)$.

La distancia al origen debe ser la misma:

$$\sqrt{(3 - 2m)^2} = \sqrt{\left(\frac{-3 + 2m}{m}\right)^2} \rightarrow$$

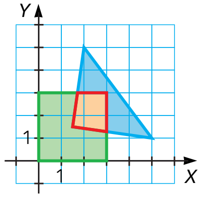
$\rightarrow$ Hay tres soluciones.

$m_1 = -1 \rightarrow y = -x + 5$

$m_2 = 1 \rightarrow y = x + 1$

$m_3 = \dfrac{3}{2} \rightarrow y = \dfrac{3}{2}x$

168 **INVESTIGA.** El triángulo rectángulo e isósceles de la figura tiene un vértice en el centro del cuadrado. ¿Cuánto mide la superficie roja?

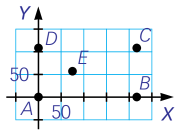


Si el triángulo azul se gira sobre su vértice para que su base sea paralela al eje X, la superficie roja ocuparía la cuarta parte del cuadrado, es decir, $\dfrac{9}{4}$ u².

169 **MATEMÁTICAS Y... DEPORTE.** En el billar es importante conseguir que la bola vaya al lugar deseado. En una mesa de billar cuyos vértices están situados en los puntos (0, 0), (213, 0), (213, 107) y (0, 107), la bola blanca está en el punto (80, 60).

a) Si se lanza la bola blanca en la dirección del vector (1, 1), ¿en qué tres puntos rebotará?

b) ¿En qué dirección se debe lanzar la bola para que rebote dos veces y vaya al vértice (0, 0)?



$A(0, 0)$, $B(213, 0)$; $C(213, 107)$; $D(0, 107)$; $E(80, 60)$.

La bola está en el punto E.

a) $\left\{\begin{array}{l} E(80, 60) \\ \vec{u}_1 = (1, 1) \end{array}\right. \rightarrow \dfrac{x - 80}{1} = \dfrac{y - 60}{1} \rightarrow$
$\rightarrow x - y - 20 = 0$

Intersecamos esta recta con $y = 107$.

$$\left.\begin{array}{r} x - y - 20 = 0 \\ y = 107 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow x = 127 \rightarrow \\ \rightarrow P(127, 107) \end{array}$$

P es el primer punto de rebote.

Rebota con un ángulo de 90°; por tanto, en la dirección del vector $\vec{u}_2 = (1, -1)$.

Hallamos la siguiente recta.

$\left\{\begin{array}{l} P(127, 107) \\ \vec{u}_2 = (1, -1) \end{array}\right. \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{x - 127}{1} = \dfrac{y - 107}{-1} \rightarrow$

$\rightarrow x + y - 234 = 0$

La intersecamos con la recta $x = 213$.

$$\left.\begin{array}{r} x + y - 234 = 0 \\ x = 213 \end{array}\right\} \to y = 21 \to \to P'(213, 21)$$

P' es el segundo punto de rebote.

Rebota en la dirección del vector $\vec{u}_3 = (-1, -1)$, que es perpendicular al anterior.

Hallamos la última recta.

$$\begin{cases} P'(213, 21) \\ \vec{u}_3 = (-1, -1) \end{cases} \to$$

$$\to \frac{x - 213}{-1} = \frac{y - 21}{-1} \to$$

$$\to -x + y + 192 = 0$$

Calculamos la intersección de la recta con $y = 0$.

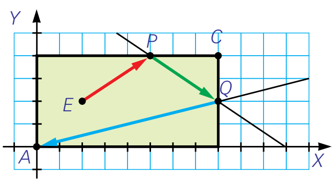
$$\left.\begin{array}{r} -x + y + 192 = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} \to x = 192 \to \to P''(192, 0)$$

P'' es el tercer punto de rebote.

Consideramos que el vector director de la recta que indica la dirección en la que debemos lanzar la bola es $\vec{v} = (a, b)$.

Hay dos soluciones.

Primera solución:



Calculamos la recta que pasa por $E(80, 60)$ y tiene vector director $\vec{v}$.

$$\begin{cases} E(80, 60) \\ \vec{v} = (a, b) \end{cases} \to \frac{x - 80}{a} = \frac{y - 60}{b}$$

Calculamos el punto P como intersección de la recta anterior con la recta $y = 107$.

$$\begin{cases} \dfrac{x - 80}{a} = \dfrac{y - 60}{b} \\ y = 107 \end{cases} \to P\left(\frac{47a + 80b}{b}, 107\right)$$

Hallamos la recta que pasa por P y tiene vector director el verde.

$$\begin{cases} P \\ \vec{u} = (a, -b) \end{cases} \to \frac{x - \dfrac{47a + 80b}{b}}{a} = \frac{y - 107}{-b}$$

Calculamos Q como la intersección de esta recta con la recta $x = 213$.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x - \dfrac{47a + 80b}{b}}{a} = \dfrac{y - 107}{-b} \\ x = 213 \end{array}\right\} \to$$

$$\to Q\left(213, \frac{60a - 293b}{b}\right)$$

Calculamos la recta que pasa por Q y tiene vector director el azul.

$$\begin{cases} Q \\ \vec{w} = \left(-213, \dfrac{60a - 293b}{a}\right) \end{cases} \to$$

$$\to \frac{x - 213}{-213} = \frac{ay - 60a + 293b}{60a - 293b}$$

Por último, hallamos la intersección de esta recta con la recta $x = 0$.

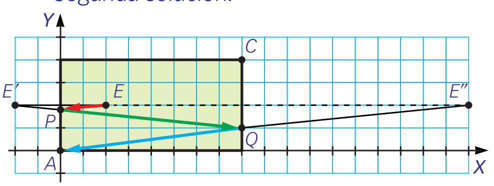
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x - 213}{-213} = \dfrac{ay - 60a + 293b}{60a - 293b} \\ x = 0 \end{array}\right\} \to$$

$$\to \left(0, \frac{120a - 586b}{a}\right) = (0, 0) \to$$

$$\to \frac{120a - 586b}{a} = 0 \to b = \frac{60}{293}a$$

Por tanto, la bola debe lanzarse en la dirección dada por el vector $\left(1, \dfrac{60}{293}\right)$.

Segunda solución:



Calculamos la recta con vector director $\vec{v}$ y que pasa por $E(80, 60)$.

$$\begin{cases} E(80, 60) \\ \vec{v} = (a, b) \end{cases} \to \frac{x - 80}{a} = \frac{y - 60}{b}$$

Calculamos el punto P como intersección de la recta anterior con la recta $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x - 80}{a} = \dfrac{y - 60}{b} \\ x = 0 \end{array}\right\} \to P\left(0, 60 - \frac{80b}{a}\right)$$

Hamos la recta que pasa por P y tiene vector director $\overrightarrow{E'P}$, siendo E' el punto simétrico de E respecto a $x = 0$.

$$\overrightarrow{E'P} = \left(0 + 80, 60 - \frac{80b}{a} - 60\right) = \\ = \left(80, -\frac{80b}{a}\right)$$

$$\begin{cases} P \\ \overrightarrow{E'P} \end{cases} \to \frac{x - 0}{80} = \frac{y - \left(60 - \frac{80b}{a}\right)}{\frac{-80b}{a}}$$

Calculamos Q como la intersección de esta recta con la recta $x = 213$.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{80} = \dfrac{y - \left(60 - \frac{80b}{a}\right)60}{\frac{-80b}{a}} \\ x = 213 \end{array}\right\} \to$$

$$\to Q\left(213, 60 - \frac{293b}{a}\right)$$

Por último, calculamos la recta que pasa por Q y tiene vector director $\overrightarrow{E''Q}$.

$E''\,(2 \cdot 213 + 80, 60) \to$

$$\to \overrightarrow{E''Q} = \left(-293, \frac{-293b}{a}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x - 213}{-293} = \dfrac{y - \left(60 - \frac{293b}{a}\right)}{\frac{-293b}{a}} \\ x = 0 \end{array}\right\} \to$$

Por último, hallamos la intersección de esta recta con la recta $x = 0$.

$$\to \left(0, 60 - \frac{80b}{a}\right) = (0, 0) \to$$

$$\to 60 - \frac{80a}{b} = 0 \to b = \frac{3}{4}a$$

Por tanto, la bola debe lanzarse en la dirección dada por el vector $\left(-1, -\frac{3}{4}\right)$.

Esta actividad puede utilizarse para trabajar el ODS 3, salud y bienestar.

170 ●●○ Halla la ecuación de la recta que corta el eje OX en el punto (3, 0) y el eje OY en (0, 5). Confirma que esa ecuación puede escribirse en la forma $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$.

Comprueba que, si una recta corta a los ejes en los puntos $(a, 0)$ y $(0, b)$, su ecuación puede escribirse en la forma $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Esta manera de escribir una recta se llama **forma canónica** o **segmentaria**.

Sean $A\,(3, 0)$ y $B\,(0, 5)$. La recta r que pasa por A y B es:

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (3, 0) - (0, 5) = (3, -5) \\ A\,(3, 0) \end{cases} \to$$

$$\to r\colon\ 5x + 3y = 15$$

En general, si una recta, s, corta a los ejes en los puntos $P\,(a, 0)$ y $Q\,(0, b)$ es:

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ} = Q - P = (-a, b) \\ P\,(a, 0) \end{cases} \to$$

$$\to \frac{x - a}{-a} = \frac{y}{b} \to -\frac{x}{a} + 1 = \frac{y}{b} \to$$

$$\to s\colon \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

171 ●●● Dado el segmento AB, donde $A(-2, 1)$ y $B(2, 3)$, construye los posibles triángulos equiláteros en los que AB es uno de sus lados.

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (4, 2) \\ A\,(-2, 1) \end{cases} \to \quad r_{AB}\colon x - 2y = -4$$

La ecuación genérica de las rectas que pasan por A es:

$$y + 2 = m(x - 1) \to$$

$$\to mx - y - (2 + m) = 0$$

Así, aplicando la condición del ángulo, se obtienen las posibles pendientes.

$$\cos 60° = \frac{|m + 2|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{1 + m^2}} \to$$

$$\to \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{|m + 2|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{1 + m^2}}\right)^2 \to$$

$$\to m^2 - 16m - 11 = 0 \to$$

$$\to \begin{cases} m_1 = 8 - 5\sqrt{3} \\ m_2 = 8 + 5\sqrt{3} \end{cases}$$

Usando las pendientes halladas, se tiene que:

$$m_1 = 8 - 5\sqrt{3} \to$$

$$\to r_{AC}\colon \left(8 - 5\sqrt{3}\right)x - y - \left(10 - 5\sqrt{3}\right) = 0$$

$m_2 = 8 + 5\sqrt{3} \rightarrow$

$\rightarrow r_{AD}: \left(8 + 5\sqrt{3}\right)x - y - \left(10 + 5\sqrt{3}\right) = 0$

La ecuación genérica de las rectas buscadas que pasan por B es

$y - 3 = m(x - 2) \rightarrow$

$\rightarrow mx - y + (3 - 2m) = 0.$

Así, teniendo en cuenta las pendientes halladas anteriormente se tiene que:

$m_1 = 8 - 5\sqrt{3} \rightarrow$

$\rightarrow r_{BD}: \left(8 - 5\sqrt{3}\right)x - y + \left(-13 + 10\sqrt{3}\right) = 0$

$m_2 = 8 + 5\sqrt{3} \rightarrow$

$\rightarrow r_{CB}: \left(8 + 5\sqrt{3}\right)x - y + \left(-13 - 10\sqrt{3}\right) = 0$

Realizando las correspondientes intersecciones se obtienen los puntos C y D, vértices de los dos triángulos posibles:

$C = r_{AC} \cap r_{CB} \rightarrow$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} \left(8 - 5\sqrt{3}\right)x - y - \left(10 - 5\sqrt{3}\right) = 0 \\ \left(8 + 5\sqrt{3}\right)x - y + \left(-13 - 10\sqrt{3}\right) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$$

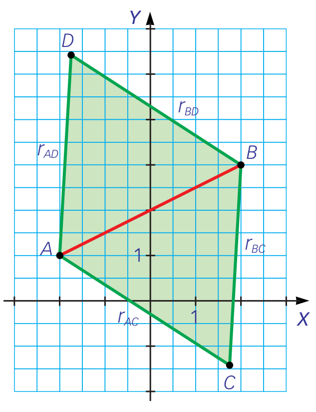
$$\rightarrow C\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{10}, \frac{1}{2} - \frac{17\sqrt{3}}{10}\right)$$

$D = r_{AD} \cap r_{BD} \rightarrow$

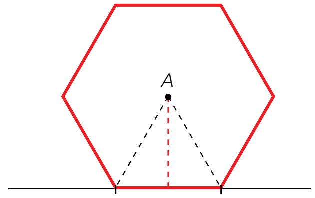
$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} \left(8 + 5\sqrt{3}\right)x - y - \left(10 + 5\sqrt{3}\right) = 0 \\ \left(8 - 5\sqrt{3}\right)x - y + \left(-13 + 10\sqrt{3}\right) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow D\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{10}, \frac{1}{2} + \frac{17\sqrt{3}}{10}\right)$$

Realizamos la representación gráfica.



172 El centro de un hexágono regular es el punto $A(6, -2)$ y un lado se halla sobre la recta de ecuación $-4x + 3y + 5 = 0$.



Determina las coordenadas de los vértices y su área.

Primero calculamos la longitud de la apotema.

$$d(A, r) = \frac{|-4 \cdot 6 + 3 \cdot (-2) + 5|}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = 5\text{ u}$$

Hallamos la longitud del lado.

$$l = \sqrt{5^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} \rightarrow l = \frac{10\sqrt{3}}{3}\text{ u}$$

Determinamos el área.

$$\text{Área} = \frac{P \cdot a_p}{2} = \frac{6 \cdot \frac{10\sqrt{3}}{3} \cdot 5}{2} =$$

$$= 50\sqrt{3}\text{ u}^2$$

Calculamos los puntos que distan $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ u de A y pertenecen a la recta dada:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{10\sqrt{3}}{3} = \sqrt{(6 - x)^2 + (-2 - y)^2} \\ -4x + 3y + 5 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = \sqrt{3} + 2,\ y_1 = 1 + \frac{4\sqrt{3}}{3} \\ x_2 = -\sqrt{3} + 2,\ y_2 = 1 - \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$$

$$B\left(\sqrt{3} + 2, 1 + \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$C\left(-\sqrt{3} + 2, 1 - \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$$

Para hallar los siguientes vértices, tenemos en cuenta que dos vértices son los puntos simétricos a los vértices calculados respecto de A.

$$(6, -2) = \left(\frac{\sqrt{3} + 2 + x}{2}, \frac{1 + \frac{4\sqrt{3}}{3} + y}{2}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow D\left(10 - \sqrt{3}, -5 - \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$(6, -2) = \left(\frac{-\sqrt{3}+2+x}{2}, \frac{1-\frac{4\sqrt{3}}{3}+y}{2}\right) \to$$

$$\to E\left(10+\sqrt{3}, -5+\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$$

Por último, la distancia de los dos vértices restantes a los vértices adyacentes coincide con la longitud del lado.

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{(10+\sqrt{3}-x)^2+\left(-5+\frac{4\sqrt{3}}{3}-y\right)^2} = \\ = \frac{10\sqrt{3}}{3} \\ \sqrt{(\sqrt{3}+2-x)^2+\left(1+\frac{4\sqrt{3}}{3}-y\right)^2} = \\ = \frac{10\sqrt{3}}{3}\end{array}\right\} \to$$

$$\to \begin{cases} x_1 = 6,\ y_1 = -2 \\ x_2 = 2\sqrt{3}+6,\ y_2 = \frac{8\sqrt{3}}{3} - 2\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{(10-\sqrt{3}-x)^2+\left(-5-\frac{4\sqrt{3}}{3}-y\right)^2} = \\ = \frac{10\sqrt{3}}{3} \\ \sqrt{(-\sqrt{3}+2-x)^2+\left(1-\frac{4\sqrt{3}}{3}-y\right)^2} = \\ = \frac{10\sqrt{3}}{3}\end{array}\right\} \to$$

$$\to \begin{cases} x_1 = 6,\ y_1 = -2 \\ x_2 = -2\sqrt{3}+6,\ y_2 = -\frac{8\sqrt{3}}{3} - 2\end{cases}$$

$$F\left(2\sqrt{3}+6, \frac{8\sqrt{3}}{3} - 2\right)$$

$$G\left(-2\sqrt{3}+6, -\frac{8\sqrt{3}}{3} - 2\right)$$

Los vértices del hexágono son *B*, *C*, *D*, *E*, *F* y *G*.

173 ●●● Halla las medianas del triángulo cuyos vértices son (3, 0), (−4, 6) y (−2, −3). Después, calcula su baricentro.

Comprueba que, si los vértices de un triángulo tienen coordenadas (x_1, y_1), (x_2, y_2), y (x_3, y_3), las coordenadas del baricentro son:

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

Sean $A(3, 0)$, $B(-4, 6)$ y $C(-2, -3)$.

- Mediana de *AB*:

$$\begin{cases} P = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{-1}{2}, 3\right) \\ C(-2, -3)\end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} \vec{v} = \left(\frac{3}{2}, 6\right) = (1, 4) \\ C(-2, -3)\end{cases} \to$$

$$\to \frac{x+2}{1} = \frac{y+3}{4} \to$$

$$4x + 8 = y + 3 \to 4x - y + 5 = 0$$

- Mediana de *AC*:

$$\begin{cases} P = \frac{A+C}{2} = \left(\frac{1}{2}, \frac{-3}{2}\right) \\ B(-4, 6)\end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} \vec{v} = \left(\frac{9}{2}, \frac{-15}{2}\right) = (3, -5) \\ C(-4, 6)\end{cases} \to$$

$$\to \frac{x+4}{3} = \frac{y-6}{-5} \to$$

$$\to -5x - 20 = 3y - 18 \to$$

$$\to -5x - 3y - 2 = 0$$

- Mediana de *BC*:

$$\begin{cases} P = \frac{B+C}{2} = \left(-3, \frac{3}{2}\right) \\ A(3, 0)\end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} \vec{v} = \left(-6, \frac{3}{2}\right) = (-4, 1) \\ C(3, 0)\end{cases} \to$$

$$\to \frac{x-3}{-4} = \frac{y}{1} \to$$

$$\to x - 3 = -4y \to$$

$$\to x + 4y - 3 = 0$$

Para hallar el baricentro, intersecamos dos de las medianas.

$$\left.\begin{array}{r} x + 4y - 3 = 0 \\ 4x - y + 5 = 0\end{array}\right\} \to$$

$$\to \left.\begin{array}{r} x + 4y - 3 = 0 \\ 16x - 4y + 20 = 0\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Reducción}}$$

$$\to 17x = -17 \to$$

$$\to \begin{cases} x = -1 \\ y = 4x + 5 = 1\end{cases}$$

El baricentro es $G(-1, 1)$.

Con la fórmula obtenemos lo mismo:

$$\left(\frac{3-4-2}{3}, \frac{0+6-3}{3}\right) = (-1, 1)$$

También podemos comprobar esta fórmula dando valores genéricos a los puntos $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ y $T(x_3, y_3)$. Determinamos el punto medio, P', del lado QT.

$$P'\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$$

Hallamos la mediana que pasa por PP'.

$$\frac{x-x_1}{\frac{x_2+x_3}{2}-x_1} = \frac{y-y_1}{\frac{y_2+y_3}{2}-y_1} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{x-x_1}{x_2+x_3-2x_1} = \frac{y-y_1}{y_2+y_3-2y_1}$$

Calculamos el punto medio, Q', del lado PT.

$$Q'\left(\frac{x_1+x_3}{2}, \frac{y_1+y_3}{2}\right)$$

Determinamos la mediana que pasa por QQ'.

$$\frac{x-x_2}{\frac{x_1+x_3}{2}-x_2} = \frac{y-y_2}{\frac{y_1+y_3}{2}-y_2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{x-x_2}{x_1+x_3-2x_2} = \frac{y-y_2}{y_1+y_3-2y_2}$$

Hallamos la intersección de las rectas.

$$\left.\begin{aligned} \frac{x-x_1}{x_2+x_3-2x_1} &= \frac{y-y_1}{y_2+y_3-2y_1} \\ \frac{x-x_2}{x_1+x_3-2x_2} &= \frac{y-y_2}{y_1+y_3-2y_2} \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{aligned} x &= \frac{(y-y_1)(x_2+x_3-2x_1)}{y_2+y_3-2y_1} - x_1 \\ x &= \frac{(y-y_2)(x_1+x_3-2x_2)}{y_1+y_3-2y_2} - x_2 \end{aligned}\right\}$$

$$\rightarrow \frac{(y-y_1)(x_2+x_3-2x_1)}{y_2+y_3-2y_1} - x_1 = \frac{(y-y_2)(x_1+x_3-2x_2)}{y_1+y_3-2y_2} - x_2$$

$$\rightarrow y = \frac{y_1+y_2+y_3}{3} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

Por tanto, efectivamente, las coordenadas del baricentro son:

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

FAKE NEWS

De pueblo en pueblo

Una asociación del embalse de Valdecañas está en lucha con el gobierno después de que anunciaran que tan solo se van a construir dos tramos nuevos de carretera, concretamente entre las localidades más alejadas. Esto supondrá «disminuir el coste hasta un 50 % frente a la propuesta de la asociación», según el gobierno. La asociación sigue luchando para que se construyan cuatro tramos de carretera que unan cada población con las otras tres para «reducir los tiempos de viaje».

Y tú, ¿qué opinas?

Navalmoral de la Mata: $A(-6, 2)$

Bohonal de Ibor: $B(-4{,}5; -2{,}5)$

El Puente del Arzobispo: $C(5{,}5; -2)$

Oropesa: $D(5{,}5; 3)$

$$d(A, B) = |(-4{,}5; -2{,}5) - (-6{,}2)| = \sqrt{1{,}5^2 + (-4{,}5)^2} \approx 4{,}74 \text{ u}$$

$$d(B, C) = |(5{,}5; -2) - (-4{,}5; -2{,}5)| = \sqrt{10^2 + 0{,}5^2} \approx 10{,}01 \text{ u}$$

$$d(C, D) = |(5{,}5; -2) - (5{,}5; 3)| = \sqrt{0^2 + 5^2} = 5 \text{ u}$$

$$d(D, A) = |(-6{,}2) - (5{,}5; 3)| = \sqrt{(-11{,}5)^2 + (-1)^2} \approx 11{,}54 \text{ u}$$

$$4{,}74 + 10{,}01 + 5 + 11{,}54 = 31{,}29 \text{ u}$$

$$d(A, C) = |(5{,}5; -2) - (-6{,}2)| = \sqrt{11{,}5^2 + (-4)^2} \approx 12{,}17 \text{ u}$$

$$d(B, D) = |(-4{,}5; -2{,}5) - (5{,}5; 3)| = \sqrt{1^2 + (-5{,}5)^2} \approx 5{,}6 \text{ u}$$

$$12{,}17 + 5{,}6 = 17{,}77 \text{ u}$$

$$\frac{17{,}77}{31{,}29} = 0{,}568 \rightarrow 56{,}8\%$$

Por tanto, hacer los dos caminos supone un 56,8 % respecto a hacer los cuatro caminos.

Es decir, hacer solo los dos caminos supone una disminución considerable del coste, pero no tanto como la mitad; es algo más de la mitad del presupuesto propuesto por la asociación.

PROBLEMAS APARENTEMENTE DISTINTOS

174 Dados los puntos $A(4, -5)$ y $B(9, 5)$, calcula.

a) $|\overrightarrow{AB}|$ b) $\overrightarrow{OA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$

a) $|\overrightarrow{AB}| = |(5, 10)| = \sqrt{5^2 + 10^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$ u

b) $\overrightarrow{OA} = (4, -5)$

$(4, -5) + \frac{1}{5}(5, 10) = (4 + 1, -5 + 2) = (5, -3)$

175 Un pájaro vuela desde un bosque con coordenadas $(4, -5)$ hacia otro situado en $(9, 5)$.

a) ¿Qué distancia habrá recorrido?

b) ¿A qué punto llega tras recorrer un 20 % de la ruta?

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OP}$

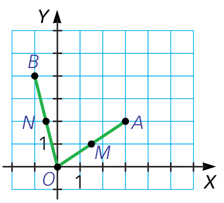
a) $d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = |(5, 10)| = \sqrt{5^2 + 10^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$ u

b) $\overrightarrow{OA} + \frac{20}{100}\overrightarrow{AB} = (4, -5) + \frac{1}{5}(5, 10) = (5, -3)$

176 Sean M el punto medio entre O y $A(3, 2)$ y N el punto medio entre O y $B(-1, 4)$.

a) Indica el ángulo que forman $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$.

b) Halla $|\overrightarrow{MN}|$.



a) $\begin{cases} \overrightarrow{OA} = (3, 2) \\ \overrightarrow{OB} = (-1, 4) \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \cos\alpha = \dfrac{3 \cdot (-1) + 2 \cdot 4}{\sqrt{3^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 4^2}} \approx 0{,}33 \rightarrow \alpha = 70{,}35°$

b) $\begin{cases} M = \left(\frac{3}{2}, 1\right) \\ N = \left(\frac{-1}{2}, 2\right) \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ u

177 Un barco se dirige hacia un punto que se encuentra a 2 km al norte y 3 km al este del puerto de Llanes. Otro viaja hacia un punto 4 km al norte y 1 km al oeste del mismo puerto.

a) Calcula el ángulo que forman las trayectorias de los dos barcos.

b) ¿A qué distancia están los puntos medios de la ruta?

El primero se dirige al punto $A(2, 3)$ y el segundo al punto $B(-1, 4)$.

a) $\begin{cases} \overrightarrow{OA} = (3, 2) \\ \overrightarrow{OB} = (-1, 4) \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \cos\alpha = \dfrac{3 \cdot (-1) + 2 \cdot 4}{\sqrt{3^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 4^2}} \approx 0{,}33 \rightarrow \alpha = 70{,}35°$

b) $\begin{cases} M = \left(\frac{3}{2}, 1\right) \\ N = \left(\frac{-1}{2}, 2\right) \end{cases} \rightarrow |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{5}$ km

178 Se sabe que una recta pasa por los puntos $A(-20, 30)$ y $B(40, -50)$.

a) Calcula la distancia que separa la recta del punto $C(20, 10)$.

b) Halla el punto de la recta más cercano a C.

a) $\rightarrow \begin{cases} \vec{v} = (60, -80) = (3, -4) \\ A(-20, 30) \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{x + 20}{3} = \dfrac{y - 30}{-4} \rightarrow -4x - 3y + 10 = 0$

$d(C, r) = \dfrac{|-4 \cdot 20 - 3 \cdot 10 + 10|}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = 20$ u

b) Hallamos la recta perpendicular a r que pasa por C.

$\begin{cases} \vec{u} = (4, 3) \\ C(20, 10) \end{cases} \rightarrow \dfrac{x - 20}{4} = \dfrac{y - 10}{3} \rightarrow$
$\rightarrow 3x - 4y - 20 = 0$

Intersecamos esta recta con *r*.

$\left.\begin{array}{r} 3x - 4y - 20 = 0 \\ -3x - 4y + 10 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases}$

El punto $D(4, -2)$ es el más cercano a C.

$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20$ u

179 Entre los pueblos Cachao y Valdés, con coordenadas $(-20, 30)$ y $(40, -50)$, pasa un carril bici.

a) ¿A qué distancia del carril está Moré (20, 10)?

b) ¿En qué punto del carril se construirá una salida para ir hasta Moré?

Cachao está en el punto $A(-20, 30)$, Valdés está en $B(40, -50)$ y Moré está en $C(20, 10)$.

a) $\begin{cases} A(-20, 30) \\ B(40, -50) \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} \vec{v} = (60, -80) = (3, -4) \\ A(-20, 30) \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{x + 20}{3} = \dfrac{y - 30}{-4} \rightarrow$

$\rightarrow -4x - 3y + 10 = 0$

$d(C, r) = \dfrac{|-4 \cdot 20 - 3 \cdot 10 + 10|}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = 20$ u

b) Se construirá la salida en un punto de la recta perpendicular al carril bici y que pasa por C.

$\begin{cases} \vec{u} = (4, 3) \\ C(20, 10) \end{cases} \rightarrow \dfrac{x - 20}{4} = \dfrac{y - 10}{3} \rightarrow$
$\rightarrow 3x - 4y - 20 = 0$

Intersecamos esta recta con *r*.

$\left.\begin{array}{r} 3x - 4y - 20 = 0 \\ -3x - 4y + 10 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases} \rightarrow$
$\rightarrow D(4, -2)$

$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20$ u

La salida se construirá en $D(4, -2)$, que está a 20 u de distancia de $C(20, 10)$.

¿PARA QUÉ SIRVE…?

1 ¿Por qué crees que influyen el viento y las mareas en el rumbo del barco siniestrado?

Porque influyen en la dirección del barco, especialmente si va a la deriva.

2 ¿Qué relación puedes observar entre el vector $\overrightarrow{OP}$ y los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BP}$ y $\overrightarrow{OA}$?

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OP}$

3 ¿Crees que es posible aplicar un método similar si se quiere interceptar un barco sospechoso de contrabando avistado desde un avión?

Sí, es posible. Desde el cielo, es como si el barco estuviera moviéndose en un plano y la triangulación de coordenadas permite situar cualquier objeto en un plano.

4 Halla las ecuaciones de las rectas que se describen a continuación.

a) La dirección del barco guardacostas cuando va a efectuar el rescate.

b) La recta que une la base con el primer punto de contacto.

c) La recta que une la base con el segundo punto de contacto.

d) La dirección del barco siniestrado cuando va a la deriva.

Consideramos $O(0, 0)$, $A(-a, b)$, $B(0, b)$, $P(c, b)$

a) Hallamos la recta que pasa por O y tiene vector director $\overrightarrow{OP} = (c, b) \rightarrow \dfrac{x}{c} = \dfrac{y}{b}$

b) Hallamos la recta que pasa por O y tiene vector director $\overrightarrow{OA} = (-a, b) \rightarrow \dfrac{x}{-a} = \dfrac{y}{b}$

c) Hallamos la recta que pasa por O y tiene vector director $\overrightarrow{OB} = (0, b) \rightarrow x = 0$

d) Hallamos la recta que pasa por A y tiene vector director $\overrightarrow{AB} = (a, 0) \rightarrow y = b$

5 Halla los puntos de corte que tienen las rectas anteriores entre sí.

Los puntos de corte entre las rectas son los puntos A, B y P.