

Tema 6: Xeometría analítica

1. RECTAS E PLANOS NO PLANO

1.1. Ecuación da recta

As rectas son variedade lineais de dimensión 1 (un parámetro libre). Quedan determinadas por:

- Un punto da recta e un vector paralelo a esta (vector director da recta) ou dous puntos non coincidentes da recta.

Vexamos as distintas formas de escribir a ecuación dunha recta:

Ecuación vectorial

Sexa $P_0 = (x_0, y_0)$ un punto calquera da recta, e con vector director (todo vector paralelo á recta) $\vec{v} = (v_x, v_y)$. A ecuación vectorial da recta é:

$$\vec{x} = \vec{OP_0} + \mu \vec{v}, \text{ ou } (x,y) = (x_0, y_0) + \mu(v_x, v_y), \text{ con } \mu \in \mathbb{R}$$

Ecuación paramétrica

Partindo da ecuación vectorial, operando e igualando coordenada a coordenada,

$$r: \begin{cases} x = x_0 + \mu v_x \\ y = y_0 + \mu v_y \end{cases}, \mu \in \mathbb{R}$$

Ecuación en forma continua:

Despexando μ das tres ecuación paramétricas e igualando, obtense a forma continua da recta.

$$r: \frac{x-x_0}{v_x} = \frac{y-y_0}{v_y}$$

Nota: cando algunha ou algunhas das coordenadas do vector director da recta son nulas, a forma de representar a ecuación en continua se modifica para non dividir entre 0. Para ver como se modifica vexamos o seguinte exemplo: $P(1,-4)$ e $\vec{v}(1,0)$

$$r: \frac{x-1}{1}; y = -4$$

Tema 6: Xeometría analítica

Ecuación punto pendiente:

Chámase pendiente dunha recta á pendiente dun vector director seu. O resultado é o mesmo para calquera dos vectores directores da recta. A pendiente pode ser positiva ou negativa. No caso de que $v_x = 0$ a recta é vertical e a súa ecuación é $x=b$. Se o vector director dunha recta é $\vec{v} = (v_x, v_y)$ entón a súa pendiente é $m = \frac{v_y}{v_x}$.

Dada unha recta que pasa por un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ e m a súa pendiente, entón chamaremos ecuación punto-pendiente á expresión : $y - y_0 = m(x - x_0)$

Ecuación implícita:

Partindo da ecuación en forma continua, resólvense a ecuación temos:

$$\{v_y(x - x_0) = v_x(y - y_0)\} \rightarrow \{Ax + By + C = 0\}$$

Sendo $A=v_y$, $B=-v_x$ e $C=v_x y_0 - v_y x_0$

Se temos unha recta dada na súa expresión implícita $Ax + By + C = 0$ o seu vector director será $\vec{v} = (-B, A)$ e o vector $\vec{n} = (A, B)$ chámase vector normal , que como se pode comprobar é perpendicular á recta.

Ecuación explícita dunha recta

Se na expresión punto-pendiente despexamos a y obtemos unha expresión da forma $y = mx + n$ (Ecuación explícita dunha recta) onde $n = y_0 - mx_0$.

Dados dous puntos m e n chámase ecuación explícita dunha recta á expresión $y = mx + n$. O número m é a pendiente e o número n é a ordenada na orixe.

Caso particular, coñecendo dous puntos da recta.

Sexa $A(x_0, y_0)$ e $B(x_1, y_1)$ dous puntos polos que pasa a recta. O vector director da recta é $\vec{v} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$. Co punto A e o vector director $\vec{v}$ pódese escribir de calquera forma a recta. Por exemplo, a forma continua.

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0}.$$

Tema 6: Xeometría analítica

2. POSICIÓN RELATIVA DE DÚAS RECTAS:

A posición relativa de dúas rectas pódense estudar desde dous puntos de vista, o xeométrico e o analítico:

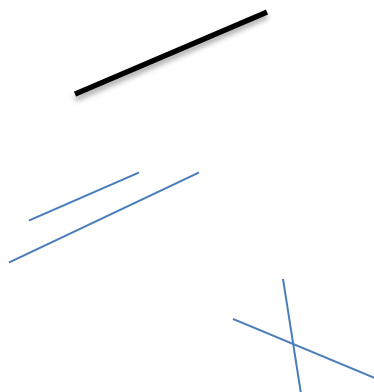
Desde o punto de vista xeométrico, as posicións de dúas rectas no plano son:

- Secantes, cando as rectas se cortan nun punto
- Paralelas, cando as rectas non teñen ningún punto en común
- Coincidentes cando son a mesma recta(teñen infinitos puntos en común)

- Rectas coincidentes

- Paralelas

- Córtanse nun punto



Como distinguir os distintos casos?

Dúas rectas son paralelas ou iguais (se e soamente se) os seus vectores son paralelos , polo tanto proporcionais. A súa vez, se son paralelas non teñen puntos en común e se son coincidentes os teñen todos. Podería traballar da seguinte maneira:

- Calcular os vectores directores das dúas rectas. Se non son paralelos, son secantes
- Se os vectores son paralelos, tomar un punto calquera dunha recta e ver se é punto da outra recta. Se o é, son coincidentes. Se non , son paralelas.

Método 2: Analizando e resolvendo o sistema

Se pasamos as dúas rectas á forma xeral ou implícita temos un sistema de dúas

ecuacións con dúas incógnitas. O sistema $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$ pode ser:

- Compatible determinado se $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, polo tanto hai unha única solución (punto de corte) polo tanto as rectas son secantes.
- Compatible indeterminado $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ (ecuacións proporcionais) infinitas solucións, polo tanto as rectas son a mesma recta ou rectas coincidentes.
- Incompatibles $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ (mesma pendente pero distintas ecuacións). Non hai solución, polo tanto as rectas son paralelas.

Tema 6: Xeometría analítica

3. ESPAZO EUCLÍDEO BIDIMENSIONAL : ÁNGULOS, PEPENDICULARIDADE DE RECTAS

Neste apartado calcularemos os ángulos que forman os vectores e rectas. Para o seu cálculo usaremos o produto escalar dos vectores característicos deles e o vector director da recta.

Ángulos entre dúas rectas:

Sexan dúas rectas r_1 e r_2 cuxo vectores directores son $\vec{v}_{r_1}$ e $\vec{v}_{r_2}$; o ángulo que forman estas dúas rectas é o mesmo que forman os seus vectores directores.

$$\angle (r_1, r_2) = \angle (\vec{v}_{r_1}, \vec{v}_{r_2}) = \cos^{-1} \left(\frac{|\vec{v}_{r_1} \cdot \vec{v}_{r_2}|}{|\vec{v}_{r_1}| |\vec{v}_{r_2}|} \right)$$



Casos:

Dúas rectas son perpendiculares ($r_1 \perp r_2$) $\rightarrow \vec{v}_{r_1} \cdot \vec{v}_{r_2} = 0$

Dúas rectas ($r_1 \parallel r_2$) $\rightarrow \vec{v}_{r_1} \cdot \vec{v}_{r_2} = |\vec{v}_{r_1}| |\vec{v}_{r_2}|$, $\vec{v}_{r_1} = \rho \vec{v}_{r_2}$

Pendente dunha recta:

Sexa a recta que pasa polos puntos $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$, un vector director será $\vec{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ e de aquí sacamos que $\tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{u_2}{u_1}$. Onde $\vec{u} = (u_1, u_2)$ é un vector director da recta. Polo tanto deducimos que a pendente dunha recta é igual á tanxente trigonométrica do ángulo que forma a recta co eixe X: $m = \tan \alpha$

É posible demostrar que se α é o ángulo que forman dúas rectas r e s , cómprese a seguinte relación: $\tan \alpha = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right|$ onde m_1 é a pendente da recta r e m_2 é a pendente da recta s

Tema 6: Xeometría analítica

4. ESPAZO EUCLÍDEO BIDIMENSIONAL: APLICAICÓNS DOS PRODUTOS ESCALAR, AO CÁLCULO DE DISTANCIAS, ÁREAS.

Distancia entre dous puntos:

A distancia entre dous puntos $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ do plano é igual ao módulo do vector $\overrightarrow{PQ}$.

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Distancia entre un punto e unha recta:

A distancia entre o punto $P(x_1, y_1)$ e unha recta r (con vector director $\vec{v}_r = (v_x, v_y)$ e sendo $Q(x_2, y_2)$ un punto calquera da recta) é a mínima distancia entre P e a recta.

Dada unha recta r e un punto exterior P , o punto Q de mínima distancia é o que cumpre que o vector $\overrightarrow{PQ}$ é perpendicular á recta.

Fórmula xeral para a distancia dun punto a unha recta

A distancia entre un punto $P(x_1, y_1)$ e unha recta $r \equiv Ax + By + C = 0$ calcúlase:

$$d(P, r) = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

Distancia entre rectas:

Para estudar a distancia entre dúas rectas $r(\vec{v}_r, P)$ e $s(\vec{v}_s, Q)$ primeiro tense que estudar a posición relativa de ambas. Así distinguimos:

- Se as rectas se cortan entón $d(r, s) = 0$
- Se as rectas son paralelas entón $d(r, s) = d(P, s) = d(r, Q)$ sendo P un punto de r e Q un punto de s .

Tema 6: Xeometría analítica

5. PROYECCIONES :

As proyeccións dun punto P sobre unha recta son os puntos situados nesta e que distan a menor distancia de P . Para proxectar unha recta proxéctanse dous puntos da mesma.

Proyección dun punto sobre unha recta:

A proyección dun punto P sobre unha recta r , é o punto M situado na recta á menor distancia de P . Calculando este punto podremos coñecer a distancia entre a recta e o punto como a distancia entre P e a súa proyección M .

Pasos a seguir:

- Calculamos a recta perpendicular a r pasando por P (recta que chamamos s)
- Calculamos a intersección da recta r e a recta s
- O punto dado pola intersección das rectas r e s é o punto buscado

6. ELEMENTOS SIMÉTRICOS

Simétrico dun punto respecto a outro punto:

O simétrico dun punto $P(P_x, P_y,)$ respecto dun punto $M(M_x, M_y,)$ é outro punto $P'(x, y,)$, tal que M é o punto medio do segmento PP' . Cúmplese

$$\frac{P_x + x}{2} = M_x, \frac{P_y + y}{2} = M_y, \text{ Así } P' = (2M_x - P_x, 2M_y - P_y)$$

Simétrico dun punto respecto a unha recta:

O simétrico dun punto P respecto dunha recta r , é outro punto P' , tal que se cumpre que os dous puntos equidistan da recta, e a recta que pasa por P e P' corta e é perpendicular a r . Para calcular P' :

- Calculamos M , a proyección de P sobre r .
- O simétrico P' é o punto simétrico de P respecto a M

Tema 6: Xeometría analítica

Mediatriz e bisectriz

A mediatriz dun segmento AB é o lugar xeométrico dos puntos $X(x, y)$, que equidistan dos extremos do segmento, é dicir : $d(X, A) = d(X, B)$.

Ou tamén se pode definir como a recta que pasa polo punto medio e é perpendicular ao segmento.

Defínese a bisectriz dun ángulo como o lugar xeométrico dos puntos, $X(x, y)$, que equidistan dos lados do ángulo. Se o ángulo está formado polas rectas r e s , a definición dinos: $d(X, r) = d(X, s)$

Feixes de rectas no plano

Definición: Chamamos feixe de rectas ao conxunto de rectas do plano que pasan por un punto, ese punto chámase vértice.

A ecuación do feixe de rectas que pasa polo punto $P(x_1, x_2)$ é : $y - y_1 = m(x - x_1)$

Esta ecuación tamén se pode escribir como $\alpha(x - x_1) + \beta(y - y_1) = 0$

Exemplo:

Calcula o feixe de rectas que pasa polo punto $P(2, -1)$