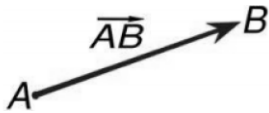


Tema 5 Vectores

1. VECTORES NO PLANO:

Vector fixo de orixe A e extremo B, é o segmento orientado caracterizado por ter as seguintes partes:

- Dirección: a dirección da recta que une os dous puntos
- Sentido: é a orientación que ten, desde A ata B
- Módulo: é a lonxitude do segmento orientado
- Punto aplicación: o punto A



No conxunto dos vectores libre podemos definir unha relación de equivalencia, dicindo que pertencen á mesma clase aqueles vectores fixos de igual módulo, dirección e sentido. Todos os vectores fixo de igual módulo, dirección e sentido forman un mesmo vector libre.

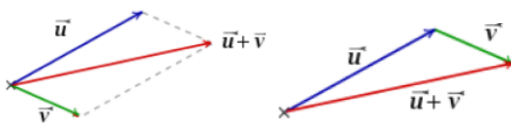
1.1. Operación con vectores libres

Vexamos as operación máis importantes cos vectores libres

- Suma

É a operación interna desde o punto de vista de espazo vectorial. A suma de dous vectores $\vec{u} + \vec{v} = (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$

A interpretación xeométrica desta operación pode verse como o vector que resulta de prolongar $\vec{v}$ ao extremo de $\vec{u}$, ou pola regra do paralelogramo.



Podes imaxinalo vendo a forza resultante doutras dúas forzas (que son vectores) con distinta dirección (por exemplo dous cabalos arrastrando unha barca cada un por unha orilla).

- Oposto dun vector:

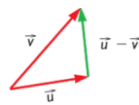
Dado un vector $\vec{v}$, o seu vector oposto denótase por $-\vec{v}$ e é outro vector co mesmo módulo, a mesma dirección pero sentido contrario a $\vec{v}$.

Tema 5 Vectores

- Resta de vectores

Dados dous vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, a súa diferenza é outro vector $\vec{u} - \vec{v}$. Restar un vector

é o mesmo que sumar o vector oposto: $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

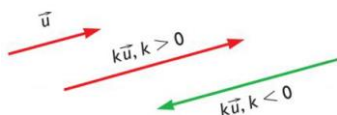


- Produto escalar

É a operación externa desde o punto de vista do espazo vectorial. O produto dun vector $\vec{v}$ por unha constante k é: $k \cdot \vec{u} = k \cdot (x, y) = (kx, ky)$

A interpretación gráfica é tal que si:

- $k > 0$ é un vector coa mesma dirección, sentido e con módulo $|k\vec{u}| = |k||\vec{u}|$.
- $k < 0$ é un vector coa mesma dirección, sentido contrario e módulo $|k\vec{u}| = |k||\vec{u}|$.
- $k = 0$ o vector nulo $(0,0)$.



1.2. Combinación lineal de vectores

Un vector $\vec{v}$ é combinación lineal dos vectores $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ cando existen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que $\vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{u}_n$.

Os vectores $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ son linealmente independentes cando ningún deles se pode escribir como combinación lineal dos demais.

1.3. Base dun sistema de vectores

Definición

Dise que o conxunto de vectores $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ forman unha base do espazo de dimensión n , e denótase por $B = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ cando verifican:

- Os vectores $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ son linealmente independentes.
- Calquera outro vector do espazo $\vec{v}$ pódese escribir como combinación lineal deles, é dicir, $\exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que $\vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{u}_n$.

Os números $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ son as compoñentes do vector $\vec{v}$ respecto á base $B = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ e escríbese $\vec{v} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ ou ben $\vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{u}_n$.

No espazo de dimensión dúas, todas as bases teñen dous elementos

$B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ polo que no conxunto dos vectores libres do espazo de dimensión dúas cada vector ten dúas coordenadas: $\vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2$.

Tema 5 Vectores

Sistema de referencia

Definición:

Un sistema de referencia no plano de dimensión dous é un par formado por un punto fixo O e unha base $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$. Escríbes $R = \{O, \{\vec{u}, \vec{v}\}\}$.

Un sistema de referencia permítenos asociar a cada punto do plano P un vector $\overrightarrow{OP}$, chamado vector de posición do punto.

As coordenada do punto P serán as coordenadas do vector $\overrightarrow{OP}$ respecto da base $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$.

O sistema de referencia canónico no espazo de dimensión dous é aquel cuxo punto fixo é a orixe de coordenada $O(0,0)$ e cuxa base $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ está formada por vectores de módulo 1 e perpendiculares entre si. Representarémolo por $R = \{O, \{\vec{i}, \vec{j}\}\}$.

1.4. Compoñentes (ou coordenadas) dun vector

Consideramos o sistema de referencia canónico $R = \{O, \{\vec{i}, \vec{j}\}\}$.

Dados dous puntos $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$, os seus vectores de posición son $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2)$ e $\overrightarrow{OB} = (b_1, b_2)$, entón as compoñentes do vector $\overrightarrow{AB}$ son as compoñentes do extremo menos as coordenadas da orixe.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

Módulo dun vector

Consideramos o sistema de referencia $R = \{O, \{\vec{i}, \vec{j}\}\}$. Dado o vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$, o módulo de $\vec{v}$ ven dado pola seguinte expresión: $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$, resultado de aplicar o teorema de Pitágoras en tres dimensións.

Operacións con vectores usando compoñentes

A partir de agora suponse que se fixou o sistema de referencia canónico: $R = \{O, \{\vec{i}, \vec{j}\}\}$

Tema 5 Vectores

Suma dun punto máis un vector

Estritamente falando non se pode sumar un vector a un punto. O que facemos é sumar ao vector o vector de posición do punto.

Dado un punto $A = (a_1, a_2)$ e un vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$, para sumar o punto e o vector traballamos co vector de posición do punto A e o vector $\vec{v}$. O que obtemos é outro punto B , cuxo vector de posición é:

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \vec{v} = (a_1, a_2) + (v_1, v_2) = (a_1 + v_1, a_2 + v_2)$$

Estudo da dependencia e independencia lineal de vectores mediante as súas compoñentes

Dados n vectores $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$, dise que son linealmente independentes cando ningún vector do conxunto pódese expresar como combinación lineal do resto.

Analogamente, dise que n vectores $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ son linealmente dependentes cando calquera deles pódese expresar como combinación lineal do resto.

Os n vectores $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ dun conxunto son linealmente independentes cando ao resolver o sistema homoxéneo $\lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{u}_n = 0$ soamente é posible coa solución trivial:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

1.5. Aplicacións dos vectores

Punto medio dun segmento

Dados dous puntos do espazo $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$ o punto medio do segmento AB é: $M = (\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2})$.

1.6. Produto escalar:

Definición: O produto escalar de dous vectores libres $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é un número real definido da seguinte maneira:

- Se $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$ entón $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- Se $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$ entón $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \alpha$, sendo $\alpha = \angle(\vec{v}, \vec{w})$

Nota: O produto escalar é a ferramenta xeométrica básica para medir distancias e calcular ángulos no plano.

Tema 5 Vectores

Propiedades do produto escalar

Para calquera $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ vectores do plano e calquera número real μ , cúmplese que o produto escalar é

- Definido positivo: O cadrado escalar dun vector non-nulo é sempre positivo, e é cero se e só se o vector é nulo.

$$\vec{x}^2 = \vec{x} \cdot \vec{x} > 0, \text{ se } \vec{x} \neq \vec{0} \text{ e } \vec{x}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$$

- Conmutativo: $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$
- Distributivo (respecto á suma): $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$
- Homoxénea: $(\mu \vec{x}) \cdot \vec{y} = \mu (\vec{x} \cdot \vec{y})$

- O produto escalar dun vector por si mesmo é igual ao cadrado do módulo.

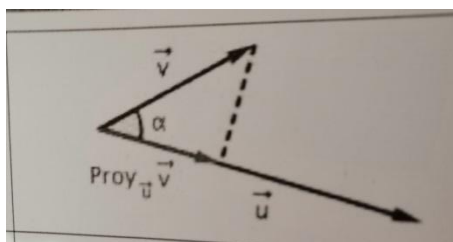
$$\vec{x} \cdot \vec{x} = |\vec{x}| |\vec{x}| \cos(\widehat{(\vec{x}, \vec{x})}) = |\vec{x}| |\vec{x}| \cos(0) = |\vec{x}|^2$$

- O produto escalar de dous vectores é nulo se e só se son perpendiculares ou algún dos vectores é cero

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} \perp \vec{y} \text{ ou } \vec{x} = \vec{0} \text{ e/ou } \vec{y} = \vec{0}$$

Interpretación xeométrica do produto escalar

O produto escalar de dous vectores non nulos é igual ao módulo dun deles pola proxección do outro sobre el.



Observamos na figura un triángulo rectángulo, onde a hipotenusa é $\vec{v}$ e un dos catetos é a proxección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$. Aplicando a definición de coseno dun triángulo agudo, temos:

$$\cos \alpha = \frac{Proj_{\vec{u}} \vec{v}}{|\vec{v}|} \rightarrow Proj_{\vec{u}} \vec{v} = |\vec{v}| \cos \alpha.$$

$$\text{De aquí temos: } \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \alpha = |\vec{u}| Proj_{\vec{u}} \vec{v}$$

$$\text{Analogamente, tense que } \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \alpha = |\vec{v}| |\vec{u}| \cos \alpha = |\vec{v}| Proj_{\vec{v}} \vec{u}$$

Nota: Cando a proxección sobre o vector é un número negativo, isto significa que o vector e a proxección teñen sentido contrario.

Tema 5 Vectores

Expresión analítica do produto escalar:

Consideramos o sistema de referencia canónico no espazo de dimensión tres :

$$R = \{O, \{\vec{i}, \vec{j}\}\}$$

Sexan $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$, o produto escalar de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é igual a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2) = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$$

Aplicacións do produto escalar

Ángulo entre dous vectores

A partir da definición do produto escalar, temos $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha \rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$

Se consideramos $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$ temos que : $\cos\alpha = \frac{u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$

Vectores ortogonais:

Dous vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ son ortogonais cando determinan un ángulo de 90 grados (é dicir, son perpendiculares) e polo tanto $\cos \alpha = 0$.

Obtense así , a seguinte condición de perpendicularidade entre vectores.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

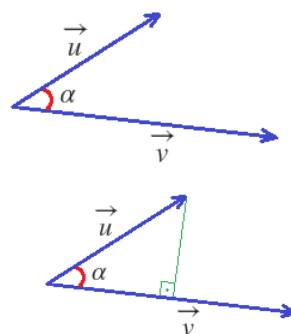
Vector unitario:

Dado un vector $\vec{u}$ chamamos vector unitario de $\vec{u}$ a aquel vector que se obtén dividindo o propio vector polo seu módulo. É dicir , a un vector coa mesma dirección pero con módulo 1

Proxección dun vector sobre outro vector

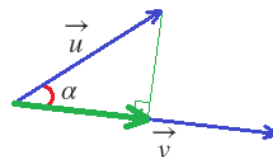
En primeiro lugar, vexamos que é graficamente a proxección dun vector sobre outro vector. Sexan dous vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ que forman un ángulo α entre eles.

Representamos a proxección do vector $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ para o que trazamos unha recta perpendicular ao vector $\vec{v}$.

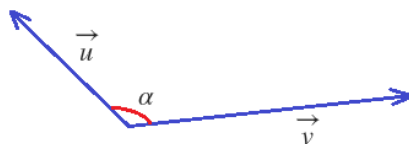


Tema 5 Vectores

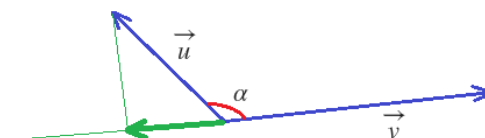
Agora, sobre o vector $\vec{v}$, debuxamos un vector desde a orixe de ambos vectores ata o punto onde se cortan a recta perpendicular e o vector $\vec{v}$. O vector resultante (de cor verde) é o vector proxección de $\vec{u}$ en $\vec{v}$



Vexamos agora como se representa proxeccións cando o ángulo é obtuso, é dicir, maior de 90°



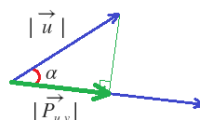
Desde o extremo que queremos obter a proxección trazamos unha perpendicular do vector sobre o que queremos proxectalo. Logo, nese mesmo vector, trazamos un novo vector desde a orixe ata o punto onde se corta coa recta perpendicular. Así a proxección sobre $\vec{v}$ é:



Módulo do vector proxección:

Chamamos módulo do vector proxección ou segmento de proxección á lonxitude do vector proxección.

Vexamos como se calcula. Para iso representamos os módulos dos vectores, é dicir, as súas lonxitudes, o vector $\vec{u}$ xunto co vector proxección e a recta perpendicular forman un triángulo rectángulo.



Aplicando as razóns trigonométricas, podemos definir o coseno de α como o módulo do vector proxección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$, entre o módulo do vector $\vec{u}$.

É dicir: $\cos \alpha = \frac{|\vec{P}_{u,v}|}{|\vec{u}|}$

Se despxamos o módulo do vector proxección quedaranos $|\vec{P}_{u,v}| = |\vec{u}| \cos \alpha$

Por outro lado, a partir da fórmula do produto escalar de dous vectores temos que:

$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$ e substituíndo esta expresión na anterior fórmula obtemos

$|\vec{P}_{u,v}| = |\vec{u}| \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$ e simplificando quedanos $|\vec{P}_{u,v}| = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$ (módulo do vector proxección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$).

Tema 5 Vectores

Vector proyección

Para obter o vector proyección imos a multiplicar o módulo do vector proyección por un vector unitario que teña a mesma dirección que ten o vector proyección

No caso da proyección do vector $\vec{u}$ sobre o vector $\vec{v}$, o vector proyección ten a mesma dirección que o vector $\vec{v}$, polo tanto necesitamos o vector unitario do vector $\vec{v}$ que é $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

Polo tanto o vector buscado será $\vec{P}_{u,v} = |\vec{P}_{u,v}| \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

Cosenos directores

Nunha base ortonormal, chámase cosenos directores do vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$ aos cosenos dos ángulos que forman o vector $\vec{v}$ cos vectores da base: $\cos \alpha = \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$, $\cos \beta =$

$$\frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}},$$