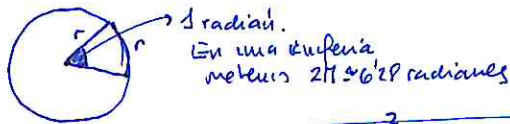


3-4. Trigonometría

Radian: amplitud del ángulo central de una circunferencia cuyo arco mide lo mismo que su radio. Rad es unidad de medida.

$$\begin{aligned} 360^\circ &= 2\pi \text{ rad} \\ 180^\circ &= \pi \text{ rad} \\ 90^\circ &= \frac{\pi}{2} \text{ rad} \\ 270^\circ &= \frac{3\pi}{2} \text{ rad} \end{aligned}$$

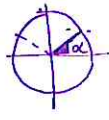
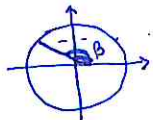


Relaciones: $\text{Sen}^2 \alpha + \text{Cos}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \begin{cases} 1 + \text{ctg}^2 \alpha = \text{cosec}^2 \alpha \\ \text{tg}^2 \alpha + 1 = \text{sec}^2 \alpha \end{cases}$

	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°	(x,y) = (cos α, sen α)
Sen	0	1/2	√2/2	√3/2	1	0	-1	0	
Cos	1	√3/2	√2/2	1/2	0	-1	0	1	
Tg	0	1/√3	1	√3	∞	0	∞	0	

Reducen al primer cuadrante.

β: 2º cuadrante α: 1º cuadrante



$$\beta = 180^\circ - \alpha; \begin{aligned} \text{Sen} \beta &= \text{Sen} \alpha \\ \text{Cos} \beta &= -\text{Cos} \alpha \\ \text{Tg} \beta &= -\text{Tg} \alpha \end{aligned}$$

β: 3º cuadrante α: 1º cuadrante



$$\beta = 180^\circ + \alpha; \begin{aligned} \text{Sen} \beta &= -\text{Sen} \alpha \\ \text{Cos} \beta &= -\text{Cos} \alpha \\ \text{Tg} \beta &= \text{Tg} \alpha \end{aligned}$$

β: 4º cuadrante α: 1º cuadrante

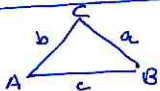


$$\beta = 360^\circ - \alpha; \begin{aligned} \text{Sen} \beta &= -\text{Sen} \alpha \\ \text{Cos} \beta &= \text{Cos} \alpha \\ \text{Tg} \beta &= -\text{Tg} \alpha \end{aligned}$$

Ángulo > 360°, redondea entre 360° y se toma el resto

Th. del seno.

$$\frac{a}{\text{Sen} \hat{A}} = \frac{b}{\text{Sen} \hat{B}} = \frac{c}{\text{Sen} \hat{C}}$$



Th del coseno

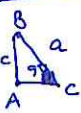
$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \text{Cos} \hat{A} \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \text{Cos} \hat{B} \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \text{Cos} \hat{C} \end{aligned}$$

b) conocido un lado y un ángulo adyacente

• Para calcular el otro ángulo $\hat{B}$

$$\hat{B} = 180^\circ - 90^\circ - \hat{A}$$

• Se utiliza razones trigonométricas (sen, cos, tg) para calcular el otro lado.



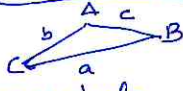
Resolución de triángulos.

a) Conocidos los tres lados.

- Aplican Th del Coseno y deducen un ángulo
- Después pueden usar el Th del seno o seguir con el Th del coseno para los otros ángulos.

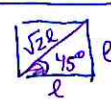
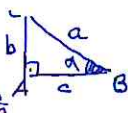
b) Conocidos dos lados y el ángulo que lo contiene.

- Aplican Th del coseno y calculan el lado que falta
- Aplican Th del seno para el resto de los ángulos.

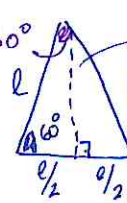


Razones trigonométricas

$$\begin{aligned} \text{Sen} \alpha &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a} & \text{cosec} \alpha &= \frac{1}{\text{Sen} \alpha} = \frac{a}{b} \\ \text{Cos} \alpha &= \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a} & \text{sec} \alpha &= \frac{1}{\text{Cos} \alpha} = \frac{a}{c} \\ \text{Tg} \alpha &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{b}{c} & \text{ctg} \alpha &= \frac{1}{\text{Tg} \alpha} = \frac{c}{b} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{Sen} 45^\circ &= \text{Cos} 45^\circ = \frac{l}{\sqrt{2} \cdot l} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{Tg} 45^\circ &= 1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} h^2 &= l^2 - (l/2)^2 = \frac{3l^2}{4} \Rightarrow h = \frac{l}{2} \cdot \sqrt{3} \\ \text{Sen} 60^\circ &= \frac{\sqrt{3} \cdot l/2}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{Sen} 30^\circ &= \frac{l/2}{l} = \frac{1}{2} \\ \text{Cos} 60^\circ &= \frac{l/2}{l} = \frac{1}{2} & \text{Cos} 90^\circ &= \frac{\sqrt{3} \cdot l/2}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{Tg} 60^\circ &= \sqrt{3} & \text{Tg} 30^\circ &= \frac{l/2}{\sqrt{3} \cdot l/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Razones suma y diferencia. Doble y mitad

$$\begin{aligned} \text{Sen}(\alpha + \beta) &= \text{Sen} \alpha \text{Cos} \beta + \text{Cos} \alpha \text{Sen} \beta \\ \text{Sen}(\alpha - \beta) &= \text{Sen} \alpha \text{Cos} \beta - \text{Cos} \alpha \text{Sen} \beta \\ \text{Cos}(\alpha + \beta) &= \text{Cos} \alpha \text{Cos} \beta - \text{Sen} \alpha \text{Sen} \beta \\ \text{Cos}(\alpha - \beta) &= \text{Cos} \alpha \text{Cos} \beta + \text{Sen} \alpha \text{Sen} \beta \\ \text{Tg}(\alpha + \beta) &= \frac{\text{Tg} \alpha + \text{Tg} \beta}{1 - \text{Tg} \alpha \text{Tg} \beta} \\ \text{Tg}(\alpha - \beta) &= \frac{\text{Tg} \alpha - \text{Tg} \beta}{1 + \text{Tg} \alpha \text{Tg} \beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sen} 2\alpha &= 2 \text{Sen} \alpha \text{Cos} \alpha \\ \text{Cos} 2\alpha &= \text{Cos}^2 \alpha - \text{Sen}^2 \alpha \\ \text{Tg} 2\alpha &= \frac{2 \text{Tg} \alpha}{1 - \text{Tg}^2 \alpha} \\ \text{Sen} \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \text{Cos} \alpha}{2}} \\ \text{Cos} \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \text{Cos} \alpha}{2}} \\ \text{Tg} \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \text{Cos} \alpha}{1 + \text{Cos} \alpha}} \end{aligned}$$

Sen α + Sen β = 2 Sen((α+β)/2) · Cos((α-β)/2)

$$\text{Sen} \alpha - \text{Sen} \beta = 2 \text{Cos} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \text{Sen} \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\text{Cos} \alpha + \text{Cos} \beta = 2 \text{Cos} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \text{Cos} \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\text{Cos} \alpha - \text{Cos} \beta = -2 \text{Sen} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \text{Sen} \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

Resolución de triángulos. (Retángulo)



a) Conocidos los lados

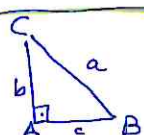
- Se usa Th de Pitágoras para calcular lado que falta
- Se usa la definición de Sen o Coseno para calcular los ángulos.

Th de Pitágoras $a^2 = b^2 + c^2$

$$\hat{A} = 90^\circ \text{ (ángulo recto)}$$

$$\hat{B} + \hat{C} + \hat{A} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$$



c) Conocidos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos

- Th del seno para calcular el otro ángulo. (Puede haber dos soluciones o ninguna)
- Suma de ángulos $\Rightarrow$ 3º ángulo
- Th del seno para el lado que falta

d) Conocidos un lado y dos ángulos.

- Suma de ángulos para el 3º ángulo
- Th del seno para calcular el resto de los lados.