

Tema 3: Resolución de triángulos

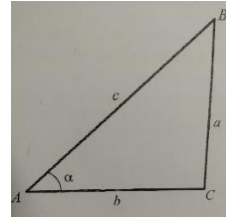
1. Razóns trigonométricas dun ángulo agudo. Relacións fundamentais

En todo triángulo rectángulo ABC as razóns trigonométricas (seno, coseno e tanxente) dun dos seus ángulos agudos, neste caso α , defínense da seguinte maneira:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \left[\frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \right] \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} \left[\frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} \right] \quad \tan \alpha = \frac{a}{b} \left[\frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto contiguo}} \right]$$

Obsérvese que como a hipotenusa sempre é de maior lonxitude que os catetos, as razóns seno e coseno teñen que ser menores que un.

Entre estas razóns trigonométricas existen unhas relacións fundamentais. A primeira delas obtense utilizando o teorema de Pitágoras, segundo o cala suma dos cadrados dos catetos é igual ao cadrado da hipotenusa: $a^2 + b^2 = c^2$.



Se nesta ecuación dividimos todos os termos entre c^2 , e logo facemos uso das fórmulas anteriores, temos: $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} \rightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1 \rightarrow (\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$

Esta fórmula recibe o nome de fórmula fundamental da trigonometría. Tendo en conta que

$(\sin \alpha)^2 = \sin^2 \alpha$ e $(\cos \alpha)^2 = \cos^2 \alpha$, temos que a fórmula fundamental da trigonometría quedaría: **$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$**

A segunda fórmula relaciona as tres razóns trigonométricas : seno, coseno e tanxente.

Obtense tendo en conta que : $\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$. Obsérvese que o único se fixo foi dividir o numerador e o denominador entre a mesma cantidade c , que é a lonxitude da hipotenusa . Polo tanto **$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$**

Da fórmula fundamental $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow$

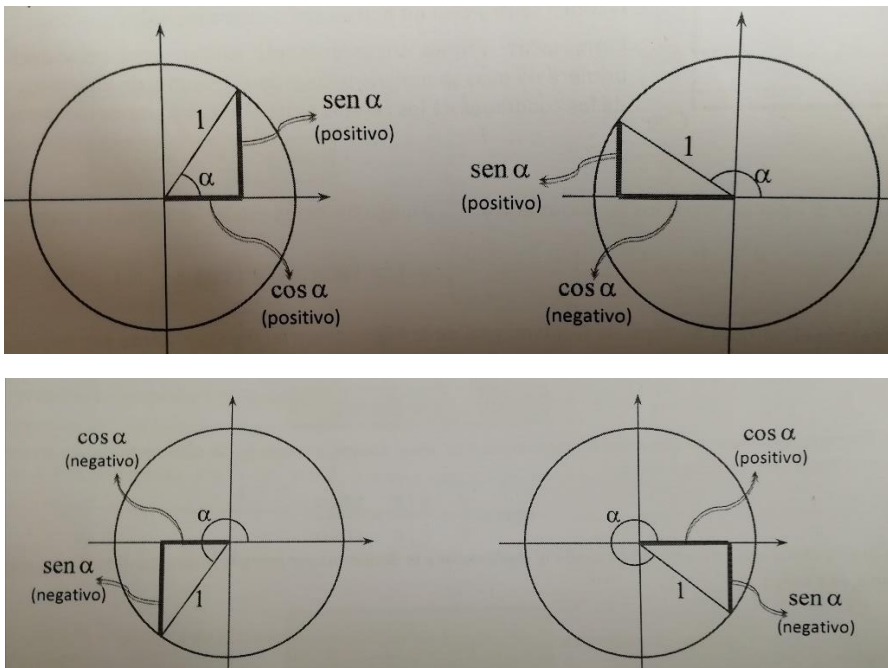
$\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$. Así obtemos unha relación entre o coseno e a tanxente.

Tema 3: Resolución de triángulos

2. Razóns trigonométricas dun ángulo calquera (entre 0° e 360°)

Ampliamos o concepto de razón trigonométrica a ángulos que non sexa soamente agudos. Para iso debuxamos unha circunferencia de radio un centrada nos eixes de coordenadas (chamada circunferencia goniométrica). Os ángulos do primeiro cadrante estarán comprendidos entre 0° e 90° , os do segundo entre 90° e 180° , os do terceiro entre 180° e 270° e, finalmente, os do cuarto cadrante, comprendidos entre 270° e 360° .

Nas figuras represéntase a medida do seno e do coseno dun ángulo situado en cada un dos cadrantes. A orientación do ángulo é a contraria á das agullas do reloxo. Os distintos signos que presentan tanto seno como coseno (o seno é a coordenada vertical e o coseno a coordenada horizontal do punto onde o ángulo corta á circunferencia de radio 1).



Na seguinte táboa se resumen os signos das distintas razóns trigonométricas dun ángulo comprendido entre 0° e 360° dependendo do cadrante no que se atopan.

	Primeiro cadrante	Segundo cadrante	Terceiro cadrante	Cuarto cadrante
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\tan \alpha$	+	-	+	-

Exemplo 1:

Sabendo que $\tan \alpha = \sqrt{3}$ cal é o valor de $\sin \alpha$

Tema 3: Resolución de triángulos

3. Ampliación do concepto de ángulo e uso da calculadora

Ángulos maiores de 360°

Un ángulo maior de 360° , enténdense que é un ángulo que dá máis dunha volta e termina nalgún lugar entre o primeiro e o cuarto cadrante. Por exemplo, $2850^\circ = 7 \cdot 360^\circ + 330^\circ$. Isto quere dicir que 2850° sitúase no cuarto cuadrante e ten exactamente as mesmas razóns trigonométricas que o ángulo 330° .

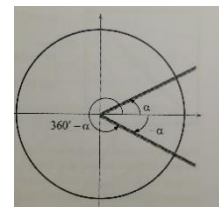
Así para saber cantas voltas dá un ángulo maior que 360° e con que ángulo comprendido entre 0° e 360° coincide, realízase a división enteira entre 360, sen extraer cifras decimais. O cociente será o número de voltas e o resto, o ángulo comprendido entre 0° e 360° con que coincide o ángulo orixinal.

Ángulos negativos

Dado que a orientación dun ángulo positivo α é a contraria á das agullas do reloxo. Un ángulo é negativo, e escribiremos $-\alpha$, cando a súa orientación é a mesma que a das agullas do reloxo. Dise que α e $-\alpha$ son ángulos opostos.

Uso da calculadora:

Como a medida dos ángulos que estamos utilizando son os graos sexagesimais, é moi importante que a calculadora traballe con este sistema. Para iso debe aparecer unha letra D maiúscula na parte superior da pantalla. Se aparece outra letra é que a calculadora está traballando con outro sistema. Por exemplo, se na parte superior da pantalla aparece unha letra R maiúscula é que a calculadora esta traballando en radiáns.



A forma de que apareza unha letra D maiúscula na parte superior da pantalla é pulsando dúas veces a tecla MODE e logo elixindo DEG (abreviatura de “degree”, grao en inglés). Se se elixe RAD pasa á letra R maiúscula e trabállase en radiáns. Hai outro sistema, GRAD, con que a calculadora traballa en gradientes, pero non o usaremos.

Razóns trigonométricas dalgúns ángulos utilizados con frecuencia

Se observamos a circunferencia goniométrica anterior, é fácil deducir as razóns trigonométricas dos ángulos 0° , 90° , 180° e 270° .

$$\sin 0^\circ = 0 \quad \cos 0^\circ = 1 \quad \tan 0^\circ = \frac{0}{1} = 0$$

$$\sin 90^\circ = 1 \quad \cos 90^\circ = 0 \quad \tan 90^\circ = \frac{1}{0} \rightarrow \text{Non existe}$$

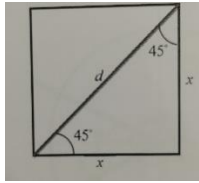
$$\sin 180^\circ = 0 \quad \cos 180^\circ = -1 \quad \tan 180^\circ = \frac{0}{-1} = 0$$

As razóns trigonométricas de 360° coinciden coas de 0° , pois 360° é, exactamente, unha volta completa.

Deduzamos as razóns trigonométricas de 30° , 45° e 60° .

Tema 3: Resolución de triángulos

Para deducir as razóns trigonométricas de 45° imos a considerar un cadrante de lado x e diagonal d . A diagonal divide ao cadrado en dous triángulos rectángulos, ambos isósceles, é dicir, triángulos rectángulos onde os dous ángulos agudos son de 45° . Polo teorema de Pitágoras: $d^2 = x^2 + x^2 \rightarrow d^2 = 2x^2 \rightarrow d = \sqrt{2}x$



Así temos que $\sin 45^\circ = \frac{x}{d} = \frac{x}{\sqrt{2}x} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. De igual forma tense que $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$. E de aquí sacamos que $\tan 45^\circ = \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} = 1$

Para deducir as razóns trigonométricas de 30° e 60° imos a traballar cun triángulo equilátero de lado x e altura h . Como o triángulo é equilátero, cada un dos seus ángulos é de 60° . Ademais, a altura divide ao triángulo equilátero en dous triángulos rectángulos iguais, de ángulos agudos 60° e 30° . Usando o teorema de Pitágoras nun

destes dous triángulos rectángulos temos:

$$x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2 \rightarrow h^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{4x^2 - x^2}{4} \rightarrow h^2 = \frac{3x^2}{4} \rightarrow h = \frac{\sqrt{3}x}{2}$$

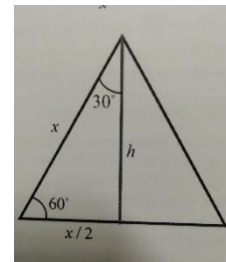
Así temos:

$$\sin 60^\circ = \frac{h}{x} = \frac{\frac{\sqrt{3}x}{2}}{x} = \frac{\sqrt{3}x}{2x} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos 60^\circ = \frac{x/2}{x} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

De maneira parecida obtemos:

$$\sin 30^\circ = \frac{x/2}{x} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2} \quad \cos 30^\circ = \frac{h}{x} = \frac{\frac{\sqrt{3}x}{2}}{x} = \frac{\sqrt{3}x}{2x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

O cálculo das tanxentes é inmediato mediante a definición.



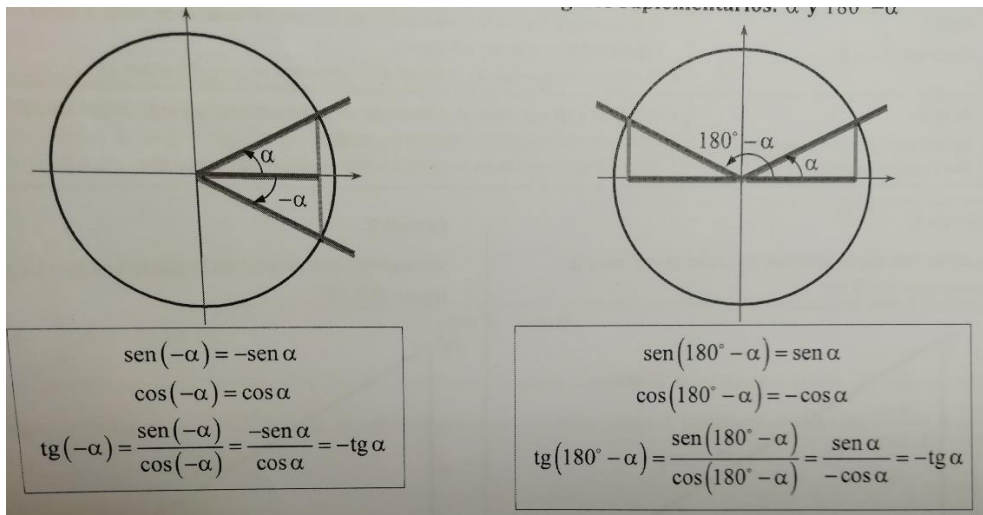
Tema 3: Resolución de triángulos

4. Relacións entre as razóns trigonométricas dalgúns ángulos.

Para resolver algúns exercicios prácticos, é moi útil coñecer as relacións entre determinados tipos de ángulos. Non é necesario aprendelas de memoria, se non que recorrendo á visualización dos ángulos sobre a circunferencia goniométrica é posible deducilas sen maior problema.

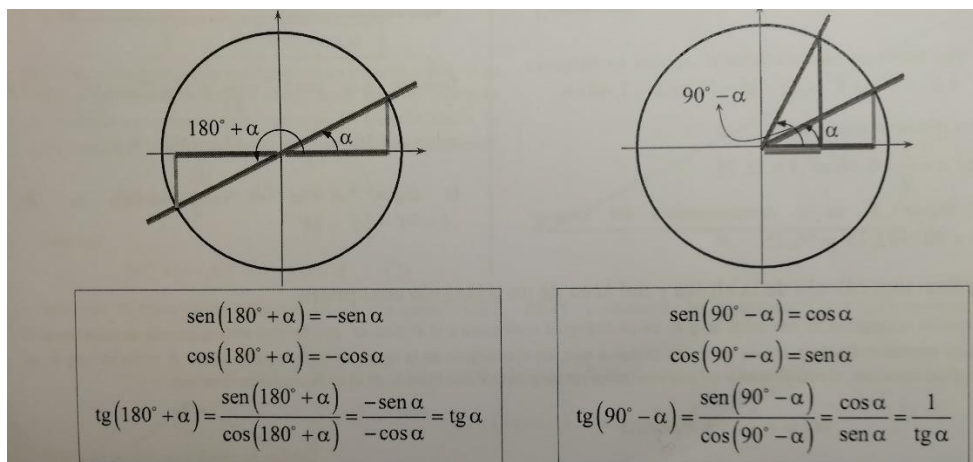
Ángulos opostos: α e $-\alpha$

Ángulos suplementarios: α e $180^\circ - \alpha$



Ángulos que difiren en 180°

Ángulos complementarios : α e $90^\circ - \alpha$



Tema 3: Resolución de triángulos

5. Resolución de triángulos

Resolver un triángulo é achar un ou máis elementos descoñecidos a partir dos elementos(lados e ángulos) coñecidos.

No caso dun triángulo rectángulo sempre se coñece un ángulo: o ángulo recto 90. Polo tanto , soamente se poden presentar dous casos:

Caso1: Coñécense dous lados.

- O terceiro lado calcúlase mediante o teorema de Pitágoras
- O ángulo que forme a hipotenusa cun dos catetos áchase a partir da razón trigonométrica que os relaciona
- O ángulo que queda por coñecer éo complementario do anterior.

Caso 2: Coñécense un lado e un dos dous ángulos agudos

- Calquera dos outros dous lados calcúlase mediante a razón trigonométrica que o relaciona co lado e o ángulo coñecidos
- O outro ángulo agudo é o complementario do ángulo coñecido

Exemplo (caso 1): Coñecemos un cateto $a=5$ cm e a hipotenusa $c=9$ cm

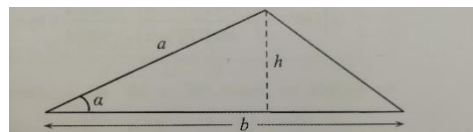
Exemplo (caso 2): Coñecemos a hipotenusa $c=12$ e o ángulo $B=56^\circ$

Ampliación: cálculo da altura e da área dun triángulo calquera

Coñecida a lonxitude de dous lados a e b dun triángulo calquera e o ángulo α que forman ambos, é moi sinxelo achar a altura correspondente a un dos lados. Observa que, no triángulo da fiugra da dereita, a altura h sobre o lado b de lonxitude coñecida, divide ao mesmo en dous triángulos rectángulos. se nos fixamos no qda esquerda temos: $\sin \alpha \frac{h}{a} \rightarrow h = a \sin \alpha$.

Agora podemos deducir unah fórmula para a área

do triángulo: $A = \frac{bh}{2} = \frac{ba \sin \alpha}{2} = \frac{1}{2} ab \sin \alpha$



De similar forma se pode facer para un triángulo

calquera. Utilizando a altura correspondente a un dos lados, conseguiremos dous triángulos rectángulos, e isto permitirá coñecer outras lonxitudes ou distancias descoñecidas. Este método coñécese con nome de estratexia da altura para resolver triángulos non necesariamente rectángulos.

6. Resolución de triángulos calquera : teorema dos senos e teorema do coseno.

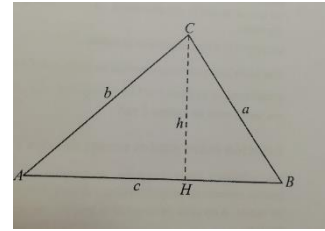
Teorema dos senos

Nun triángulo calquera de lados a, b, c e de ángulo A, B, C cúmplense as seguintes

igualdades $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

Tema 3: Resolución de triángulos

Para demostrar este resultado utilizaremos a estratexia da altura. Observa a figura .Nela, trazamos a altura H desde o vértice C . Os triángulos AHC e BHC son rectángulos.



Polo tanto, temos

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sen } A = \frac{h}{b} \rightarrow h = b \text{sen} A \\ \text{sen } B = \frac{h}{a} \rightarrow h = a \text{sen} B \end{array} \right\} \rightarrow b \text{sen} A = a \text{sen} B \rightarrow \frac{a}{\text{sen} A} = \frac{b}{\text{sen} B}$$

Esta é a primeira igualdade que se quere demostrar. Para demostrar a segunda procédese de maneiras

lados a e c con seu ángulos opostos.

Teorema do coseno:

Nun triángulo calquera de lados a, b e c e de ángulos A, B e C cúmprese a seguinte igualdade:

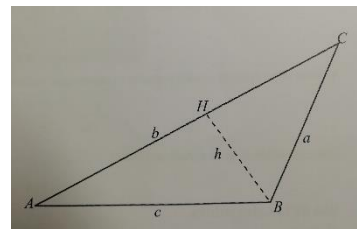
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

Para facer a demostración utilizaremos un método similar ao visto no teorema anterior, peor cun triángulo oblicuángulo. Trázase a altura h sobre o lado b . Entón o triángulo ABH tense que :

$$\cos A = \frac{AH}{c} \rightarrow AH = c \cos A \quad (1).$$

$$\text{Entón } HC = b - AH = b - c \cos A \quad (2)$$

Aplicando o teorema de Pitágoras nos triángulos ABH , BCH e utilizando as igualdades (1) e (2) demostradas anteriormente temos:



$$a^2 = h^2 + (HC)^2 = h^2 + (b - c \cos A)^2 = h^2 + b^2 + c^2 \cos^2 A - 2bc \cos A$$

$$c^2 = h^2 + (AH)^2 = h^2 + (c \cos A)^2 = h^2 + c^2 \cos^2 A$$

Restando ambas igualdades obtense:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Tamén son certas, e pódense demostrar de maneira similar a como se fixo anteriormente, as seguintes igualdades:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B ; c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Tema 3: Resolución de triángulos

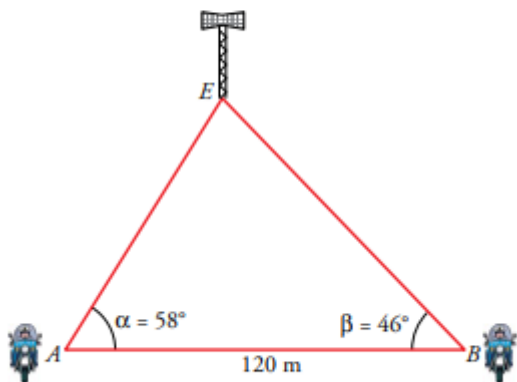
Resolución de triángulos, estratexia da altura.

A estratexia da altura é un método para resolver triángulos oblicuángulos que consiste en elixir convenientemente unha das alturas do triángulo, de maneira que esta o divida en dous triángulos rectángulos que se poidan resolver cos datos que nos dan

Exemplo:

Unha emisora de radio clandestina E sintoniza desde dous controis policiais, A e B . En cada un deles detecta a dirección na que se atopa, non a distancia. Polo tanto, se coñecen os ángulos $\alpha = 58^\circ$ e $\beta = 46^\circ$, así como a distancia $AB = 120m$. Para localizar sobre o terreo a emisora E hai que calcular a distancia $\overline{AE}$ ou a distancia $\overline{BE}$. Calcula os dous valores

e problema:



Tema 3: Resolución de triángulos

Criterios de avaliacións

1. Coñecer o significado das razóns trigonométricas de ángulos agudos, aplicalas á resolución de triángulos rectángulos e relacionalas coas razóns trigonométricas de ángulos calquera
2. Coñecer o teorema dos senos e o do coseno e aplicalos á resolución de triángulo calquera

Estándares de aprendizaxe avaliáveis

- 1.1. Resolve triángulos rectángulos
- 1.2. Calcula unha razón trigonométrica a partir doutra
- 1.3. Válese de dous triángulos rectángulos para resolver un oblicuángulo(estratexia da altura)
- 1.4. Obtén as razóns trigonométricas dun ángulo calquera relacionándoo cun do primeiro cuadrante
- 2.1. Resolve un triángulo oblicuángulo do que se coñecen elementos que o definen(dous lados e un ángulo, dous ángulos e un lado, tres lados...)
- 2.2. Resolve un triángulo oblicuángulo definido mediante un debuxo
- 2.3. A partir dun enunciado debuxa o triángulo que describe a situación e resólveo
- 2.4. Ao resolver un triángulo, recoñece se non existe solución , se a solución é única , ou se pode haber dúas solucións