

Tema 2 : Álgebra

A **álgebra** válese da aritmética e é, á súa vez, importantísimo auxiliar seu. Na súa linguaxe, clara e concisa, radica gran parte da súa eficacia.

Vieta, a finais do século XVI, deulle á linguaxe alxébrica unha configuración próxima á actual. Finalmente, **Descartes**, no século XVII, acabouna de perfeccionar.

Diofanto de Alexandría (século III) propuxo problemas alxébricos complexos e resolveunos por métodos orixinais e moi interesantes. Pero a súa achega careceu de método e tivo pouco valor pedagóxico.

Al-Jwarizmi (século IX) foi quen, por primeira vez, realizou un tratamento sistemático e completo da resolución de ecuacións de primeiro e segundo graos. O seu libro "*al-jabr wa-l-mugabala*" é o que dá nome a esta ciencia .

No século XVI, varios alxebristas italianos (**Tartaglia**, **Cardano**, **Ludovico Ferrari**, **Scipione del Ferro**, **Antonio del Fiore**) mantiveron unhas interesantísimas, axitadas e fecundas discusións sobre a resolución de distintos tipos de ecuacións de terceiro e de cuarto grao.

Polinomios

Un **Polinomio** é unha expresión alxébrica formada pola suma de dous ou máis monomios non semellantes que se chaman **termos**.

O **termo independente** é o monomio sen parte literal.

O **valor numérico** dun polinomio é o resultado que se obtén ao substituír as variables por números determinados e operar.

Para **sumar** ou **restar** polinomios súmanse ou réstanse os monomios semellantes (mesma parte literal) e déixanse indicadas o resto de operacións.

Para **multiplicar** dous polinomios multiplícase cada monomio do primeiro por todos os monomios do segundo e, despois, súmanse os resultados, agrupando os monomios semellantes.

Ao **dividir** dous polinomios, $P(x) \div Q(x)$, obtemos outros dous polinomios $C(x)$ e $R(x)$ que chamamos **polinomio cociente** e **polinomio resto**, respectivamente, que verifican: $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$.

O grao do polinomio dividendo é igual á suma dos graos dos polinomios cociente e divisor. Ademais, o grao do polinomio resto é sempre menor que o do divisor.

A **regra de Ruffini** é un procedemento para dividir polinomios cando o divisor é da forma $(x - a)$ sendo a un número enteiro. Ou sexa, para divisións $P(x) \div (x - a)$.

Tema 2 : Álgebra

Exemplos: a) Realiza a división $(8x^3 - 4x^2 + 7) \div (2x^2 + x - 1)$.

$$\begin{array}{r}
 8x^3 - 4x^2 + 7 \quad | \quad 2x^2 + x - 1 \\
 \underline{-8x^3 - 4x^2 + 4x} \\
 -8x^2 + 4x + 7 \\
 \underline{8x^2 + 4x - 4} \\
 8x + 3
 \end{array}$$

Dividendo: $8x^3 - 4x^2 + 7$
 divisor: $2x^2 + x - 1$
 cociente: $4x - 4$
 resto: $8x + 3$
 $Dividendo = divisor \cdot cociente + resto$

$$(8x^3 - 4x^2 + 7) = (2x^2 + x - 1)(4x - 4) + (8x + 3)$$

b) Fai, polo método de Ruffini, a división: $(5x^4 - 12x^3 - 23x + 11) \div (x - 3)$.

	Coeficientes do dividendo				
3	5	-12	0	-23	11
	15	9	27	12	
	5	3	9	4	23
	Coeficientes do cociente				resto

cociente: $5x^3 + 3x^2 + 9x + 4$

resto: 23

Expresamos o obtido así:
$$\frac{5x^4 - 12x^3 - 23x + 11}{x - 3} = (5x^3 + 3x^2 + 9x + 4) + \frac{23}{x - 3}$$

O valor numérico dun polinomio $P(x)$, para $x = a$, é o número que se obtén ao substituír o x por a e facer operacións. A ese número chámase $P(a)$.

Teorema do resto: O resto da división $P(x) \div (x - a)$ é $P(a)$.

Un número a chámase **raíz dun polinomio** $P(x)$ se $P(a) = 0$.

Polo tanto, xuntando isto último, podemos dicir que se a é unha raíz de $P(x)$ entón o polinomio $P(x)$ é divisible por $(x - a)$ e viceversa.

Se un polinomio ten coeficientes enteiros, **as súas raíces enteiras** (raíces que son números enteiros), buscámolas entre os **divisores do termo independente**.

O número de raíces reais dun polinomio é sempre menor ou igual que o seu grao.

Factorizar un polinomio é expresalo como produto de polinomios do menor grao posible. Para iso, buscarémoslle as raíces.

Para factorizar un polinomio utilizamos diversas técnicas como:

- ♦ Sacar factor común (sobre todo cando o polinomio non teña termo independente).

Tema 2 : Álgebra

♦ Identificar un produto notable.

♦ Calcular as raíces.

As raíces dun polinomio $P(x)$ son as solucións da ecuación asociada a ese polinomio, $P(x) = 0$. Para factorizar un polinomio de grao dous, podemos buscarlle as raíces pola ecuación de segundo grao asociada.

Dicimos que un **polinomio** é **irreducible** cando ningún polinomio de grao inferior é divisor seu.

Chámase **fracción alxébrica** o cociente de dous polinomios, $\frac{P(x)}{Q(x)}$

Exemplo: a) Factoriza o polinomio $P(x) = 4x^2 - 12x - 40$.

Resolvemos a ecuación $4x^2 - 12x - 40 = 0$ e obtemos as solucións $x = 5$ e $x = -2$ polo que o polinomio quedará factorizado da seguinte maneira: $4x^2 - 12x - 40 = (x - 5) \cdot (x + 2) \cdot 4$.

Ollo, cando factoricemos un polinomio pola ecuación asociada, hai que lembrarse de multiplicar polo seu coeficiente principal.

b) Factoriza o polinomio $P(x) = 6x^2 + x - 15$

Resolvemos a ecuación $6x^2 + x - 15 = 0$ e obtemos as solucións $x = \frac{3}{2}$ e $x = -\frac{5}{3}$ polo que o polinomio quedará factorizado así:

$$6x^2 + x - 15 = \left(x - \frac{3}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{5}{3}\right) \cdot 6 = 2 \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{5}{3}\right) \cdot 3 = (2x - 3) \cdot (3x + 5)$$

EXERCICIOS:

1.- Aplica a regra de Ruffini para calcular o cociente e o resto das seguintes divisións de polinomios:

a) $(x^3 - 3x^2 + 2x + 4) \div (x + 1)$

b) $(2x^3 - 15x - 8) \div (x - 3)$

c) $(5x^5 + 14x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 5x - 2) \div (x + 3)$

d) $(x^4 + x^2 + 1) \div (x + 1)$

2.- a) O polinomio $x^3 - 8x^2 + 17x - 10$ podería ser divisible por $x - a$ para os seguintes valores de a : 1, -1, 2, -2, 5, -5, 10 e -10. Comproba que o é por $x - 1$, $x - 2$ e $x - 5$.

b) Acha os divisores dos seguintes polinomios:

$$P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12, \quad Q(x) = x^4 + 5x^3 - 7x^2 - 29x + 30.$$

3.- Descompón factorialmente os seguintes polinomios:

a) $x^6 - 9x^5 + 24x^4 - 20x^3$

b) $x^6 - 3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x$

c) $x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9$

d) $4x^4 - 15x^2 - 5x + 6$

Tema 2 : Álgebra

- 4.- a) Intenta factorizar o polinomio $x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 7x + 4$.
 b) Faino agora sabendo que é divisible por $x^2 + x + 1$.
- 5.- a) Intenta factorizar o polinomio $6x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 1$.
 b) Faino agora sabendo que $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ son raíces súas .
- 6.- Realiza: a) $\frac{1}{x^2-1} + \frac{2x}{x+1} - \frac{x}{x-1}$ b) $\left(\frac{x-2}{x-3} - \frac{x-3}{x-2}\right) \div \left(\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-2}\right)$.
- 7.- Efectúa: a) $\left[\left(x + \frac{1}{x}\right) \div \left(x - \frac{1}{x}\right)\right] \cdot (x-1)$ b) $\frac{x^2-2x+3}{x-2} \div \frac{2x+3}{x+5}$.
- 8.- Calcula: a) $\frac{x+2}{x} \div \left(\frac{x-1}{3} \cdot \frac{x}{2x+1}\right)$ b) $\frac{x^4-x^2}{x^2+1} \cdot \frac{x^4+x^2}{x^4}$.
- 9.- Simplifica as seguintes fraccións alxébricas:
- a) $\frac{x^6-4x^5+5x^4-4x^3+4x^2}{x^5-3x^3-4x}$ b) $\frac{3x^5-11x^4-24x^3+20x^2}{9x^5-9x^4-148x^3-172x^2+64x+80}$.

Resolución de ECUACIONES

Ecuacións de segundo grao: $ax^2 + bx + c = 0$

Aplicamos: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $\begin{cases} \text{Se } b^2 - 4ac > 0 & , \text{ hai dúas solucións} \\ \text{Se } b^2 - 4ac = 0 & , \text{ hai unha solución} \\ \text{Se } b^2 - 4ac < 0 & , \text{ NON hai solución} \end{cases}$

Cando $b = 0$ ou $c = 0$, a ecuación chámase incompleta e pódese resolver de forma sinxela sen necesidade de aplicar a fórmula anterior:

- $ax^2 + c = 0 \rightarrow$ despéxase x^2 .
- $ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x \cdot (ax + b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b}{a} \end{cases}$.

Ecuacións bicadradas: $ax^4 + bx^2 + c = 0$

Son ecuacións de grao catro e sen termos de grao impar. Para resolvelas efectuamos un cambio de variable, facemos $x^2 = z$ e polo tanto, $x^4 = z^2$, co que queda unha ecuación de segundo grao cuxa incógnita é z .

Ou sexa: $ax^4 + bx^2 + c = 0 \Leftrightarrow az^2 + bz + c = 0$ e unha vez obtida z , $x = \pm\sqrt{z}$.

Tema 2 : Álgebra

EXERCICIO 10: Resolve as seguintes ecuacións bicadradas:

a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

b) $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$

c) $x^4 - 5x^2 = 0$

d) $2x^4 - 2x^2 - 24 = 0$

e) $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$

f) $-x^4 - x^2 - 2 = 0$

Ecuacións con radicais (a x aparece dentro do signo radical)

Pode aparecer un radical ou dous. Damos os seguintes pasos:

- 1º. Illamos unha das raíces nun membro (todo o demais queda no outro membro).
- 2º. Elevamos ao cadrado os dous membros (ollo ao cadrado dunha suma ou resta).
- 3º. Unha vez resolta, hai que **comprobar as solucións**, pois o segundo paso pode engadarnos solucións falsas.

Exemplo 1: Resolve a ecuación: $\sqrt{2x-3} + 1 = x$.

$$\sqrt{2x-3} = x - 1 \Leftrightarrow (\sqrt{2x-3})^2 = (x-1)^2 \Leftrightarrow 2x-3 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-4 \pm 0}{-2} = 2$$

Comprobación: $\sqrt{2 \cdot 2 - 3} + 1 = 2 \Leftrightarrow 1 + 1 = 2$ A solución é válida.

Exemplo 2: Resolve a ecuación: $\sqrt{2x-3} + \sqrt{x+7} = 4$.

$$\sqrt{2x-3} = 4 - \sqrt{x+7} \Leftrightarrow (\sqrt{2x-3})^2 = (4 - \sqrt{x+7})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x-3 = 16 - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{x+7} + (\sqrt{x+7})^2 \Leftrightarrow x-26 = -8 \cdot \sqrt{x+7} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-26)^2 = (-8 \cdot \sqrt{x+7})^2 \Leftrightarrow x^2 - 52x + 676 = 64 \cdot (x+7) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 116x + 228 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2, x_2 = 114 \quad \text{Comprobación:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Con } x_1 = 2 \Rightarrow \sqrt{2 \cdot 2 - 3} + \sqrt{2+7} = 4 \Leftrightarrow 1 + 3 = 4 \quad \text{Solución válida.} \\ \text{Con } x_2 = 114 \Rightarrow \sqrt{2 \cdot 114 - 3} + \sqrt{114+7} = 4 \Leftrightarrow 15 + 11 = 4 \quad \text{Solución NON válida.} \end{array} \right.$$

EXERCICIOS:

11.- Resolve as seguintes ecuacións racionais:

a) $\sqrt{x+2} + 2 = x - 2$

b) $\sqrt{x+4} - \sqrt{x-1} = 1$

c) $\sqrt{x+3} + 3 = x$

d) $\sqrt{3x+3} - 1 = \sqrt{8-2x}$

e) $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1} = 3$

f) $\sqrt{3x+4} - \sqrt{1-x} = 1$

Tema 2 : Álgebra

12.- Resolve estas ecuacións e comproba as solucións:

a) $\frac{3}{\sqrt{x+5}} = \frac{\sqrt{5x+5}}{x+1}$ b) $\sqrt{x-\sqrt{1-x}} + \sqrt{x} = 1$ Sol.: a) $x=4$; ~~$x=-1$~~ ; b) $x=\frac{16}{25}$; ~~$x=0$~~ .

Ecuacións racionais (aparecen expresións alxébricas)

Damos os seguintes pasos:

1º. Multiplicamos todos os termos polo mínimo común múltiplo dos denominadores.

2º. Unha vez resolta, hai que **comprobar as solucións**, pois o anterior paso pode engadarnos solucións falsas (non pode anularse ningún denominador).

Exemplo: Resolve a ecuación: $\frac{2x-3}{x^2-5x} + \frac{x+4}{x} = \frac{3}{4}$.

$$\left. \begin{array}{l} x^2-5x = x \cdot (x-5) \\ x = x \\ 4 = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow m.c.m.(x^2-5x, x, 4) = 4 \cdot x \cdot (x-5) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4 \cdot (2x-3) + 4 \cdot (x-5) \cdot (x+4)}{4 \cdot x \cdot (x-5)} = \frac{x \cdot (x-5) \cdot 3}{4 \cdot x \cdot (x-5)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8x - 12 + 4x^2 + 16x - 20x - 80 = 3x^2 - 15x \Leftrightarrow x^2 + 19x - 92 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-19 \pm \sqrt{19^2 - 4 \cdot (-92)}}{2} \Leftrightarrow x_1 = 4, x_2 = -23 \quad . \quad \text{Comprobación:}$$

$$x_1 = 4 \Rightarrow \frac{8-3}{16-20} + \frac{8}{4} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{-5}{4} + \frac{8}{4} = \frac{3}{4} \quad \text{A solución é válida.}$$

$$x_2 = -23 \Rightarrow \frac{-46-3}{529+115} + \frac{-19}{-23} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{-49+532}{644} = \frac{483}{644} \quad \text{Solución válida.}$$

EXERCICIOS:

13.- Resolve as seguintes ecuacións racionais:

a) $\frac{2x^4+4}{x^4} = \frac{x^2-3}{x^2} + 2$ b) $\frac{2x-3}{x^2-5x} + \frac{x+4}{x} = \frac{3}{4}$ c) $\frac{8}{x+6} + \frac{12-x}{x-6} = 1$

d) $\frac{x}{x-3} + \frac{2x}{x+3} = \frac{6}{x^2-9}$ e) $\frac{10}{3} + \frac{5-x}{x+5} = \frac{x+5}{x-5}$ f) $\frac{x}{x-2} = \frac{x+4}{x-1}$

g) $\frac{-3x^3+x^2+73x-3}{x^2-25} = -3x$ h) $\frac{x-1}{x-4} - 1 = \frac{x+1}{x-3}$ i) $\frac{x-1}{x-3} = \frac{x-2}{x-4}$

Sol.: a) 2 e -2; b) -23 e 4; c) 10 e -10; d) 2 e -1; e) 10 e -3; f) 5 e 1; g) 3 e -1; h) $\frac{8}{3}$; i) $\pm$.

Tema 2 : Álgebra

14.- Resolve estas ecuacións (no apartado **a)** simplifica previamente as fraccións alxébricas que aparecen). Comproba as solucións:

$$a) \frac{x^2+4x+4}{x+2} + \frac{x^4-1}{x^2+1} = \frac{x^2+3x+2}{x+1}$$

$$b) \frac{2x \cdot (x^3-7x)}{2x^2-12} = 6$$

Solución

a) $x=1$; ~~$x=-1$~~
b) $x=\pm 3$; $x=\pm 2$.

Factorización de Ecuacións. Ecuacións de grao superior a 2

Unha ecuación factorizada é da forma $(x-a) \cdot (x-b) \cdot (x-c) \cdot \dots = 0$.

Para calcular a súa solución hai que igualar a cero cada un dos factores e resolver as ecuacións resultantes.

Unha maneira de resolver ecuacións de grao maior que 2 é factorizalas mediante o método de Ruffini ou extraendo factor común (as solucións veñen sendo as raíces do polinomio asociado).

Exemplo 1: Resolve a ecuación: $3x \cdot (x^2-1) \cdot (x+2) = 0$.

$$3x=0 \Leftrightarrow x=0 ; x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1 ; x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$$

As solucións son: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=-1$, $x_4=-2$

Exemplo 2: Resolve a ecuación: $x^5-6x^4-7x^3+36x^2+36x=0$.

Factorizamos o polinomio asociado polo método de Ruffini (primeiro sácase factor común x e logo factorízase o polinomio que queda)

$$x^5-6x^4-7x^3+36x^2+36x = x \cdot (x^4-6x^3-7x^2+36x+36) =$$

$$= x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x^2-9x+18) . \quad \text{A ecuación queda así:}$$

$$x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x^2-9x+18) = 0 . \quad \text{Resolvémola coma o anterior:}$$

$$x_1=0 ; x+1=0 \Leftrightarrow x_2=-1 ; x+2=0 \Leftrightarrow x_3=-2$$

$$x^2-9x+18=0 \Leftrightarrow x_4=6 , x_5=3$$

EXERCICIOS:

15.- Resolve as seguintes ecuacións:

$$a) 2x^6+x^5-4x^4-3x^3=0$$

$$b) 6x^3-13x^2-4x+15=0$$

$$c) x^6-7x^3-8=0$$

$$d) 6x^4+5x^3-2x^2-x=0$$

$$e) 12x^4+14x^3-2x=0$$

$$f) x^8-15x^4-16=0$$

16.- Escribe unha ecuación que teña como solucións 0 , 2 , 3 e 7. Cal é o mínimo grao que pode ter? Como sería para que tivese de coeficiente principal 8?

Tema 2 : Álgebra

Ecuacións exponenciais (a x aparece unicamente nos expoñentes)

Exemplo: Resolve as seguintes ecuacións exponenciais:

a) $3^{1-x^2} = \frac{1}{27}$

b) $5^{x^2-5x+6} = 1$

c) $2^x + 2^{x+1} = 12$

a) Exprésase $\frac{1}{27}$ coma potencia de tres e iguálanse os expoñentes:

$$\frac{1}{27} = \frac{1}{3^3} = 3^{-3}, \text{ a ecuación quedará: } 3^{1-x^2} = 3^{-3} \Leftrightarrow 1-x^2 = -3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x^2 = -4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x_1 = 2, x_2 = -2$$

b) $1 = 5^0$, entón: $5^{x^2-5x+6} = 5^0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 3, x_2 = 2$

c) Faise un cambio de variable $y = 2^x$. Usamos as propiedades das potencias para descompoñer $2^{x+1} = 2^x \cdot 2^1 = 2 \cdot 2^x$. Deste xeito a ecuación quedaría así:

$$2^x + 2^{x+1} = 12 \Leftrightarrow y + 2y = 12 \Leftrightarrow 3y = 12 \Leftrightarrow y = 4$$

$$\text{Agora desfecemos o cambio: } 2^x = 4 \Leftrightarrow x = 2$$

EXERCICIO 17: Resolve as seguintes ecuacións exponenciais:

a) $3^{4-x^2} = \frac{1}{9}$

b) $7^{x+2} = 5\,764\,801$

c) $3^x + 3^{x+2} = 30$

d) $5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = \frac{31}{5}$

e) $2^{2x} - 2^{x+2} = -4$

f) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2^x = -2$

g) $3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2} = 21$

h) $4^{x^3-7x^2+12x+3} = 64$

i) $4^{2x} - 2 \cdot 4^{x+1} = -16$

Ecuacións logarítmicas (a x aparece dentro dun logaritmo)

Resólvense deixando quedar un só logaritmo en cada membro da igualdade e para iso temos en conta as propiedades dos logaritmos.

Unha vez resoltas é necesario comprobar a validez das solucións sobre a ecuación inicial, pois lembra que **só existen os logaritmos dos números positivos**.

Exemplo: Resolve as seguintes ecuacións logarítmicas:

a) $\log x + \log 50 = 3$ b) $5 \cdot \log_2(x+3) = \log_2 32$ c) $2 \cdot \log x = \log(10-3x)$

a) Pola propiedade dos logaritmos: $\log x + \log 50 = \log x \cdot 50$. Tamén sabemos que $3 = \log 1000$ polo que a ecuación quedará expresada da seguinte forma:

$$\log x + \log 50 = 3 \Leftrightarrow \log 50x = \log 1000 \Leftrightarrow 50x = 1000 \Leftrightarrow x = 20$$

Na comprobación vemos que teñen sentido todos os logaritmos $\log 20 + \log 50 = 3$ polo que a solución é válida.

Tema 2 : Álgebra

b) Pola propiedade dos logaritmos: $5 \cdot \log_2(x+3) = \log_2(x+3)^5$. Logo temos que:

$$5 \cdot \log_2(x+3) = \log_2 32 \Leftrightarrow \log_2(x+3)^5 = \log_2 32 \Leftrightarrow (x+3)^5 = 32 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+3 = \sqrt[5]{32} \Leftrightarrow x+3 = 2 \Leftrightarrow x = -1$$

Comprobamos e todo é correcto: $5 \cdot \log_2 2 = \log_2 32$ polo tanto solución válida.

c) $\log x^2 = \log(10-3x) \Leftrightarrow x^2 = 10-3x \Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1 = 2, x_2 = -5$. Facemos a comprobación da validez das solucións:

Con $x_1 = 2$ temos: $2 \cdot \log 2 = \log 4$ polo tanto solución válida.

Con ~~$x_2 = -5$~~ temos: ~~$2 \cdot \log(-5)$~~ $= \log 25$ polo tanto solución **NON** válida.

Fíxate que se a ecuación formulada fose $\log x^2 = \log(10-3x)$ entón a solución $x_2 = -5$ si sería válida posto que ao substituír quedaría $\log 25 = \log 25$.

EXERCICIO 18: Resolve as seguintes ecuacións logarítmicas:

a) $2 \cdot \log x - \log(x+6) = 3 \cdot \log 2$

b) $4 \cdot \log_2(x^2+1) = \log_2 625$

c) $\log(x-1) + \log(2x-1) = \log(x^2+5)$

d) $\log_3(2x-1) = 1$

e) $\log(3x-1) = -2 + \log 50$

f) $2 \cdot \ln x = \ln(2x+3)$

PROBLEMA 19: O director dun supermercado observou que o número de clientes atendidos cada hora por un dependente está relacionado coa súa experiencia. Estimou que ese número pode calcularse de forma aproximada coa función $C(d) = \frac{40d}{d+3}$ onde d é o número de días que o dependente leva traballando e C é o número de clientes atendidos nunha hora.

- a) Cantos clientes por hora atendería un dependente que leve traballando dous días?
- b) O director sabe que un dependente empeza a ser rendible á empresa cando atende a 32 clientes por hora. Cando sucede iso?
- c) Investiga o que sucede co número de clientes atendidos por dependentes que teñen moita experiencia. Podes constatar algunha característica especial?

Tema 2 : Álgebra

Sistemas de Ecuaciones Lineais

Unha **ecuación lineal** é unha ecuación de grao 1 que pode ter unha ou varias incógnitas. Os **coeficientes** da ecuación son os números que multiplican ás incógnitas e os **termos independentes** son os números que non levan asociada unha incógnita.

Unha **solución** dunha **ecuación lineal** é cada conxunto de valores que, ao substituílos no lugar das incógnitas, cumpren a ecuación.

Un **sistema de ecuacións lineais** é un conxunto de dúas ou máis ecuacións lineais para o que se quere atopar unha solución común.

Chámase **solución** dun **sistema de ecuacións lineais** a cada conxunto de valores que, ao substituílos no lugar das incógnitas, cumpren todas as ecuacións.

Discutir un **sistema de ecuacións** é clasificalo, atendendo ao seu número de solucións. Así, clasificámoslos do seguinte xeito:

- ***Compatible***.- cando ten solución. Dentro destes, pode ser:
 - ***Determinado***.- se ten solución única.
 - ***Indeterminado***.- se ten máis de unha solución.
- ***Incompatible***.- cando NON ten solución.

Xa se estudaron en cursos anteriores os métodos de resolución de sistemas de ecuacións lineais con dúas incógnitas, que eran: ***Redución***, ***Igualación***, ***Substitución*** e mediante a ***Representación gráfica***.

EXERCICIO 20: Resolve e discute os seguintes sistemas de ecuacións lineais:

a) (*Redución*)
$$\begin{cases} 8x - 2y = 4 \\ -12x + 3y = -6 \end{cases}$$

b) (*Igualación*)
$$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 3x - y = 11 \end{cases}$$

c) (*Substituc.*)
$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -x + 2y = 7 \end{cases}$$

d) (*Rep. gráf.*)
$$\begin{cases} -x + y = 3 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$$

Sistemas de Ecuacións NON LINEAIS

Un **sistema de ecuacións non lineais** é un conxunto de dúas ou máis ecuacións onde algunha delas non é lineal. Este tipo de sistemas acostumamos resolvelos (*a maioría*) polo método de ***substitución*** e tamén por ***reducción***.

Tema 2 : Álgebra

Exemplo: Resolve os seguintes sistemas de ecuacións non lineais:

$$a) \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x^2 + 7 = y^2 + 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 21 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x - y = 27 \\ \log x - 1 = \log y \end{cases}$$

a) Despexamos y na primeira ecuación: $y = 2x - 1$ e substituímos na segunda ecuación: $x^2 + 7 = (2x - 1)^2 + 2$. Facemos as contas e quedámonos unha ecuación de 2º grao: $x^2 + 7 = 4x^2 - 4x + 1 + 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x - 4 = 0$.

Resolvémola e danos que: $x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{2}{3}$. Eses son valores da x agora calculamos os valores da y : $y_1 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$; $y_2 = 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - 1 = -\frac{7}{3}$.

Polo que o sistema ten dúas solucións: $\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 5 \end{cases}$ e $\begin{cases} x_2 = -\frac{2}{3} \\ y_2 = -\frac{7}{3} \end{cases}$

b) Despexamos y na segunda ecuación: $y = 1 - x$ e substituímos na primeira ecuación: $x^2 + x \cdot (1 - x) + (1 - x)^2 = 21$. Facemos as contas e quedámonos a ecuación de 2º grao: $x^2 + x - x^2 + 1 - 2x + x^2 = 21 \Leftrightarrow x^2 - x - 20 = 0$.

Resolvémola e danos que: $x_1 = 5$, $x_2 = -4$. Eses son valores da x agora calculamos os valores da y : $y_1 = 1 - 5 = -4$; $y_2 = 1 - (-4) = 5$.

Polo que o sistema ten dúas solucións: $\begin{cases} x_1 = 5 \\ y_1 = -4 \end{cases}$ e $\begin{cases} x_2 = -4 \\ y_2 = 5 \end{cases}$.

c) Usamos as propiedades dos logaritmos para transformar a segunda ecuación:

$$\log x - \log 10 = \log y \Leftrightarrow \log \frac{x}{10} = \log y \Rightarrow \frac{x}{10} = y \text{ agora substituímos } y$$

$$\text{na primeira ecuación: } x - \frac{x}{10} = 27 \Leftrightarrow \frac{10x - x}{10} = \frac{270}{10} \Leftrightarrow 9x = 270 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 30. \text{ Calculamos o valor da } y: y = \frac{30}{10} = 3. \text{ Só nos queda}$$

Tema 2 : Álgebra

comprobar que para eses valores teñen sentido os logaritmos da segunda

ecuación: $\log 30 - 1 = \log 3$. Polo que a solución é válida: $\begin{cases} x = 30 \\ y = 3 \end{cases}$.

EXERCICIO 21: Resolve e discute os seguintes sistemas de ecuacións non lineais:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} -x + y = 2 \\ \frac{1}{x} - \frac{x}{y} = 0 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x \cdot y = 15 \\ \frac{x}{y} = \frac{5}{3} \end{cases} \\ \text{d)} \begin{cases} 3x^2 - 5y^2 = 30 \\ x^2 - 2y^2 = 7 \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} x - y = 6 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ x \cdot y = 6 \end{cases} \\ \text{g)} \begin{cases} x^2 + y^2 - 5x - 5y = -10 \\ x^2 - y^2 - 5x + 5y = -2 \end{cases} & \text{h)} \begin{cases} (x+y)(x-y) = 7 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases} & \text{i)} \begin{cases} y^2 - 2y + 1 = x \\ \sqrt{x} + y = 5 \end{cases} \end{array}$$

EXERCICIO 22: Resolve e discute os seguintes sistemas de ecuacións non lineais:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \begin{cases} \sqrt{3(x+y)} + x = 12 \\ 2x - y = 6 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} y^2 - 2y + 1 = x \\ \sqrt{x} + y = 5 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = -1 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 5^x \cdot 5^y = 1 \\ 5^x \div 5^y = 25 \end{cases} \end{array}$$

Solución: a) $x=6$ e $y=6$; b) $x=4$ e $y=3$; c) $x=10$ e $y=100$; d) $x=1$ e $y=-1$.

Sistemas de tres ecuacións con tres incógnitas: Método de Gauss

Este método é unha xeneralización do método de redución. Un sistema de tres ecuacións con tres incógnitas chámase **graduado** se nunha das ecuacións só aparece unha incógnita e noutra das ecuacións falta algunha das outras dúas incógnitas.

Os sistemas graduados son moi fáciles de resolver, posto que de abaixo a arriba imos obtendo o valor de cada incógnita, e ao substituílas nas anteriores ecuacións permite seguir o proceso ata obter o valor das tres incógnitas.

Así, son graduados os sistemas: $\begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ 5y = 10 \end{cases}$; $\begin{cases} x - 3y + 2z = 7 \\ 5y - z = 6 \\ 3z = 12 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x - 5y = 11 \\ 2y = 4 \\ x + y + z = 14 \end{cases}$

O **método de Gauss** consiste en encontrar, mediante transformacións axeitadas, outro sistema equivalente no que cada unha das ecuacións ten, polo menos, unha incógnita menos cá anterior (un sistema graduado). Esas transformacións poden ser:

- Cambiar a orde de dúas ecuacións.
- Multiplicar ou dividir toda unha ecuación por un número distinto de cero.
- Cambiar unha ecuación pola suma dela máis outra multiplicada por un número.

No método de Gauss, usamos unha notación específica que aclaramos a continuación:

Tema 2 : Álgebra

- Chamámoslle ás ecuacións 1ª, 2ª e 3ª.
- Para cambiar de orde dúas ecuacións usamos unha frecha de dobre punta, por exemplo, se queremos intercambiar a 1ª e a 2ª poñeremos: $1^a \leftrightarrow 2^a$.
- Para substituír unha ecuación pola suma ou resta doutras dúas, por exemplo, substituír a 3ª pola 3ª menos a 1ª multiplicada por catro, poremos $3^a - 4 \cdot 1^a$.
- **IMPORTANTE:** Comezamos poñendo a ecuación que imos cambiar: Se poño $3 \cdot 2^a - 4 \cdot 1^a$ quiere decir que imos cambiar a segunda ecuación polo resultado de multiplicar a segunda ecuación por tres e restarlle catro veces a primeira.
- Se nalgún paso chegamos a un sistema onde se repite algunha ecuación, prescindiremos dunha das repetidas.

Exemplo: Transforma en graduados e resolve os seguintes sistemas:

$$a) \begin{cases} x+3y=2 \\ 2x-4y=14 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 2x-3y-2z=5 \\ 3x+y+z=7 \\ x+2y+3z=8 \end{cases} \quad c) \begin{cases} 3x+2y-2z=4 \\ x+4y-4z=0 \\ 4x+y-z=7 \end{cases} \quad d) \begin{cases} 3x+2y-2z=4 \\ 4x+y-z=7 \\ x+4y-4z=-2 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} x+3y=2 \\ 2x-4y=14 \end{cases} \xrightarrow[2^a - 2 \cdot 1^a]{1^a} \begin{cases} x+3y=2 \\ -10y=10 \end{cases} \quad \text{Da } 2^a \text{ ecuación sacamos que } y = \frac{10}{-10} = -1$$

E substituíndoa na primeira, temos que $x + 3 \cdot (-1) = 2 \Leftrightarrow x = 2 + 3 = 5$.

Fíxate que os coeficientes que son 1 axudan a facer transformacións fáciles. Polo tanto, poñeremos de primeira ecuación algunha que teña de 1º coeficiente un 1.

$$b) \begin{cases} 2x-3y-2z=5 \\ 3x+y+z=7 \\ x+2y+3z=8 \end{cases} \xrightarrow[2^a]{1^a \leftrightarrow 3^a} \begin{cases} x+2y+3z=8 \\ 3x+y+z=7 \\ 2x-3y-2z=5 \end{cases} \xrightarrow[3^a - 2 \cdot 1^a]{2^a - 3 \cdot 1^a} \begin{cases} x+2y+3z=8 \\ -5y-8z=-17 \\ -7y-8z=-11 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[5 \cdot 3^a - 7 \cdot 2^a]{1^a} \begin{cases} x+2y+3z=8 \\ -5y-8z=-17 \\ 16z=64 \end{cases} \quad \text{Logo } z = \frac{64}{16} = 4. \text{ Substituímosla na segunda e temos:}$$

$$-5y - 8 \cdot 4 = -17 \Leftrightarrow -5y = 15 \Leftrightarrow y = -3 \text{ e ao substituír na } 1^a \text{ obtemos que } x = 2.$$

$$c) \begin{cases} 3x+2y-2z=4 \\ x+4y-4z=0 \\ 4x+y-z=7 \end{cases} \xrightarrow[3^a]{1^a \leftrightarrow 2^a} \begin{cases} x+4y-4z=0 \\ 3x+2y-2z=4 \\ 4x+y-z=7 \end{cases} \xrightarrow[3^a - 4 \cdot 1^a]{2^a - 3 \cdot 1^a} \begin{cases} x+4y-4z=0 \\ -10y+10z=4 \\ -15y+15z=7 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[2 \cdot 3^a - 3 \cdot 2^a]{1^a} \begin{cases} x+4y-4z=0 \\ -10y+10z=4 \\ 0=2 \end{cases} \quad \text{Logo NON hai solución. Sistema Incompatible.}$$

Tema 2 : Álgebra

$$d) \begin{cases} x + 4y - 4z = -2 \\ 4x + y - z = 7 \\ 3x + 2y - 2z = 4 \end{cases} \xrightarrow[\substack{2^a - 4 \cdot 1^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a}]{1^a} \begin{cases} x + 4y - 4z = -2 \\ -15y + 15z = 15 \\ -10y + 10z = 10 \end{cases} \xrightarrow[\substack{3 \cdot 3^a - 2 \cdot 2^a}]{2^a} \begin{cases} x + 4y - 4z = -2 \\ -15y + 15z = 15 \\ 0 = 0 \end{cases} \rightarrow$$

Cando chegamos nunha ecuación a $0 = 0$ quere dicir que o **Sistema** é **Compatible Indeterminado** (ten **infinitas solucións**). A maneira de resolvelo é pasando unha incógnita (normalmente collemos a z) para o outro membro e dámoslle outro nome, facemos $z = \lambda$. Isto faremolo sempre que teñamos máis ecuacións que incógnitas. Seguindo co sistema, quedaranos:

$$\rightarrow \begin{cases} x + 4y - 4z = -2 \\ -15y + 15z = 15 \end{cases} \xrightarrow[\substack{2^a \div 15}]{1^a} \begin{cases} x + 4y - 4z = -2 \\ -y + z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 4y = -2 + 4z \\ -y = 1 - z \end{cases}$$

Facemos $z = \lambda$ e así quedáanos: $y = -1 + \lambda$. Substituímos na primeira e teremos: $x + 4 \cdot (-1 + \lambda) = -2 + 4\lambda \Leftrightarrow x - 4 + 4\lambda = -2 + 4\lambda \Leftrightarrow x = 2$

A solución é: $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Para cada valor que lle deamos a λ

teremos unha solución para o sistema. Así por exemplo, serán solución:

$$\text{Con } \lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases} ; \text{ Con } \lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases} ; \text{ Con } \lambda = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

EXERCICIO 23: Resolve e discute os seguintes sistemas de ecuacións:

a) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 6 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 2x - y - z = 9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x - 4y + 3z = 9 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ 4x + 3y + 4z = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - 5y + 4z = -1 \\ 4x - 5y + 4z = 3 \\ 5x - 3z = 13 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y + z = -2 \\ x - 2y - z = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + z = 3 \\ 2x - y + 4z = 8 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ x + y + 4z = -2 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ 3x - 2y - 2z = 2 \\ -5x + 3y + 5z = -1 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ -x + 2y + z = 5 \\ x + 4y + 3z = 11 \end{cases}$

EXERCICIO 24: Resolve e discute, por Gauss, os seguintes sistemas de ecuacións:

Tema 2 : Álgebra

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 3x - 6y + 9z = 3 \\ -x + 2y - 3z = -1 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} -3 \cdot (x + y) + 4z = 1 \\ 2x - (y + z) = -5 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{5}{6} = \frac{z + 4}{5} \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} \frac{x+1}{2} - \frac{y-3}{4} = 12 - z \\ 2x + \frac{y}{5} + \frac{z-6}{2} = 6 \\ \frac{x-y}{2} = z - 4 \end{cases} \end{array}$$

Sol.: a) $x = 1 + 2\lambda - 3\mu$, $y = \lambda$ e $z = \mu$ $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, SCD; b) $x = -1$, $y = 2$ e $z = 1$, SCD; c) $x = 3$, $y = -5$ e $z = 8$, SCD.

EXERCICIOS:

25.- Nunha adega venden dous tipos de viño: crianza e reserva. Acha cal é o seu prezo se sabemos que Xoán mercou 3 botellas de reserva e 12 de crianza e pagou 69€, mentres que Xoaquina mercou 6 botellas de crianza e 8 de reserva e pagou 80€.

Solución: Crianza 4 € e Reserva 7 €.

26.- Gumersindo está valando un terreo de forma rectangular. Cando leva posto arame a dous lados consecutivos do terreo, dáse conta de que gastou 170 m de arame. Se sabe que a diagonal do rectángulo mide 130 m, cales son as dimensións e a área do terreo?

Solución: 120 x 50 m. ou 50 x 120 m. .

27.- Dúas vacas e tres puchos valen o mesmo que dezaseis ovellas. Unha vaca e catro ovellas valen igual que tres puchos. Tres puchos e oito ovellas custan o mesmo que catro vacas. Canto custa cada animal. **Sol.:** $p. vaca = 4\lambda$, $p. pucho = \frac{8}{3}\lambda$, $p. ovella = \lambda$. $\lambda \in \mathbb{R}$

28.- Nunha caixa rexistradora atopamos billetes de 50€, 100€ e 200€, sendo o número total de billetes 21, e a cantidade total de diñeiro 1800€. Sabendo que o número de billetes de 50€ é o quíntuplo dos de 200€, calcula o número de billetes de cada clase. **Sol.:** Nº de billetes de 50€ = 10, Nº de billetes de 100€ = 9 e Nº de billetes de 200€ = 2.

29.- Nunha función de teatro recádanse 5200€, vendéndose 200 entradas de tres prezos distintos: 30€, 25€ e 10€. Sabendo que o número de localidades máis económicas supoñen un 25% do número de localidades de 25€, calcula o número de localidades de cada tipo. **Sol.:** Nº local. 30€ = 100, Nº local. 25€ = 80 e Nº local. 10€ = 20.

Resolución de INECUACIONES

Unha **inecuación** é unha desigualdade entre expresións alxébricas. A **solución dunha inecuación** é o conxunto de valores cos que se cumpre a desigualdade. A **solución dun sistema de inecuacións** é unha solución común a todas as inecuacións que forman o sistema. **Resolver** unha inecuación ou un sistema de inecuacións consiste en atopar todas as súas solucións. Normalmente teñen infinitas, que se agrupan en intervalos de $\mathbb{R}$.

Inecuacións lineais con unha incógnita

Para resolvelas, procedemos de forma similar ás ecuacións, pero tendo en conta as desigualdades. As súas solucións son todos os puntos dun intervalo infinito. As solucións dun sistema de inecuacións lineais cunha incógnita poden formar un intervalo, ou poden non existir.

Tema 2 : Álgebra

A diferenza con respecto á resolución das ecuacións está **ao pasar un número negativo multiplicando ou dividindo para o outro membro, que fai cambiar o sentido da desigualdade**. Por **exemplo**:

$$-2x + 1 < 7 \Leftrightarrow -2x < 6 \Leftrightarrow x > -3 \rightarrow \text{Solución} = \left\{x \in \frac{\mathbb{R}}{x} > -3\right\} = (-3, +\infty)$$

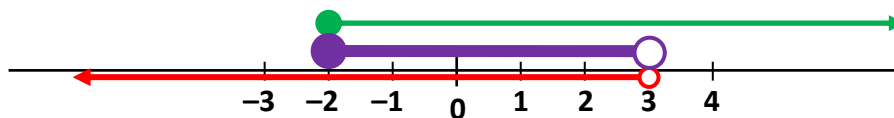
$$6 - 3x \geq x - 2 \Leftrightarrow -3x - x \geq -2 - 6 \Leftrightarrow -4x \geq -8 \Leftrightarrow x \leq \frac{-8}{-4} = 2 \rightarrow \text{Solución} = \left\{x \in \frac{\mathbb{R}}{x} \leq 2\right\} = (-\infty, 2]$$

Exemplo: Resolve o seguinte sistema de inecuacións: $\begin{cases} 3x - 9 < 0 \\ 2x + 4 \geq 0 \end{cases}$.

Resolvemos cada inecuación por separado e logo a solución será a intersección das dúas solucións (parte común de ambas solucións).

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x - 9 < 0 \Leftrightarrow 3x < 9 \Leftrightarrow x < 3 \rightarrow \text{Solución} = \{x \in \mathbb{R} / x < 3\} = (-\infty, 3) \\ 2x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -4 \Leftrightarrow x \geq \frac{-4}{2} = -2 \rightarrow \text{Solución} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -2\} = [-2, +\infty) \end{array} \right\}$$

Polo que a solución será: $(-\infty, 3) \cap [-2, +\infty) = [-2, 3) = \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x < 3\}$



EXERCICIO 30: Resolve, escribe e representa a solución de:

- | | | | |
|--|--|--|--|
| a) $2x - 3 > x - 1$ | b) $\frac{3x - 2}{2} \leq \frac{2x + 7}{3}$ | c) $-3x - 2 < 5 + \frac{x}{2}$ | d) $\frac{3x}{5} - x \geq -2$ |
| e) $\begin{cases} 4x - 3 < 1 \\ x + 6 > 2 \end{cases}$ | f) $\begin{cases} 3x - 2 \geq -7 \\ 5 - x < 1 \end{cases}$ | g) $\begin{cases} 5 - x < 12 \\ 12 - 2x \geq 3x - 3 \end{cases}$ | h) $\begin{cases} 2x - 3 > 0 \\ 5x + 1 \leq 0 \end{cases}$ |

Inecuacións de segundo grao con unha incógnita

Para resolvelas, procedemos a resolver a ecuación de segundo grao asociada. A solución será unha de dúas: ou o conxunto de puntos comprendido entre as solucións da ecuación ou ben os puntos de fóra. Para sabelo collemos un valor de entre eles (ou de fóra deles) e comprobámolo na inecuación, si se cumpre aí estará a solución, senón, será o outro.

Exemplo: Resolve, escribe e representa a solución das inecuacións de 2º grao:

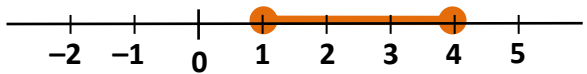
- | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--|--|
| a) $x^2 - 5x + 4 \leq 0$ | b) $x^2 - 5x + 4 < 0$ | c) $x^2 - 5x + 4 \geq 0$ | d) $x^2 - 5x + 4 > 0$ |
| e) $x^2 - 5x + 7 \leq 0$ | f) $x^2 - 5x + 7 \geq 0$ | g) $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 \leq 0 \\ 3x - 9 < 0 \end{cases}$ | h) $\begin{cases} x^2 - 4 \leq 0 \\ x - 3 > 1 \end{cases}$ |

Tema 2 : Álgebra

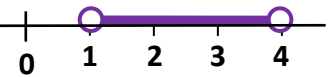
- a) Resolvemos a ecuación asociada: $x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = 4$

Polo que a solución é $[1,4]$ ou $(-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$. Para saber cal é collemos o cero e substituímolos na inecuación: $0^2 - 5 \cdot 0 + 4 \leq 0 \Leftrightarrow 4 \leq 0$ NON, polo que

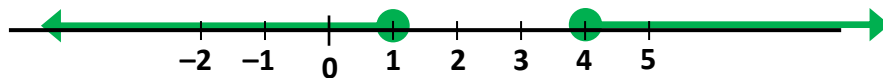
Solución = $[1,4] = \{x \in \mathbb{R} / 1 \leq x \leq 4\}$.



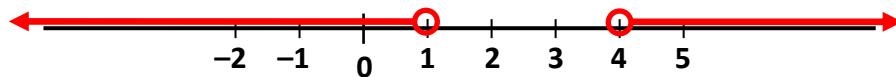
- b) A ecuación asociada é a mesma que no apartado anterior, só cambia a desigualdade, logo. *Solución* = $(1,4) = \{x \in \mathbb{R} / 1 < x < 4\}$



- c) A ecuación asociada é a mesma que no apartado a), só cambia a desigualdade, que é a contraria, logo *Solución* = $(-\infty, 1] \cup [4, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 1 \text{ ou } x \geq 4\}$.



- d) A ecuación asociada é a mesma que no apartado anterior, só cambia a desigualdade, polo que *Solución* = $(-\infty, 1) \cup (4, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x < 1 \text{ ou } x > 4\}$.



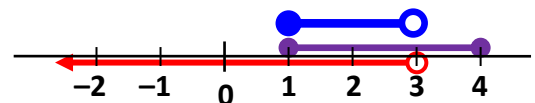
- e) Resolvemos a ecuación asociada: $x^2 - 5x + 7 = 0$ **Non ten solución real.**

Polo que a solución é $\emptyset$ ou $\mathbb{R}$. Para saber cal é collemos o cero e substituímolos na inecuación: $0^2 - 5 \cdot 0 + 7 \leq 0 \Leftrightarrow 7 \leq 0$ NON, polo que a solución é $\emptyset$ (**Non hai solución**).

- f) A ecuación asociada é a mesma que no apartado anterior, só cambia a desigualdade, polo que a solución é $\mathbb{R}$ (**Calquera número real**).

- g) $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 \leq 0 & \text{resolta no apartado a)} \Rightarrow \text{Solución} = [1,4] \\ 3x - 9 < 0 & \Leftrightarrow x < 3 \Rightarrow \text{Solución} = (-\infty, 3) \end{cases}$. A solución será

$$[1,4] \cap (-\infty, 3) = [1,3) = \{x \in \mathbb{R} / 1 \leq x < 3\}$$



- h) $\begin{cases} x^2 - 4 \leq 0 & \text{resolvemos a ecuación asociada: } x_1 = 2, x_2 = -2; \text{Solución} = [-2, 2] \\ x - 3 > 1 & \Leftrightarrow x > 4 \Rightarrow \text{Solución} = (4, +\infty) \end{cases}$

A solución será $[-2, 2] \cap (4, +\infty) = \emptyset$ (**Non ten solución**)

EXERCICIOS:

31.- Resolve, escribe e representa a solución de:

Tema 2 : Álgebra

- a) $x^2 + 5x \geq 0$ b) $2x^2 - 16x > -32$ c) $-x^2 + 6x \geq 5$ d) $x^2 - 7x > -6$
- e) $\begin{cases} x^2 + 2x > 15 \\ 3 - 2x < 7 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 5x - x^2 \geq 4 \\ 5x - 1 < 4x + 2 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x^2 + 5x \geq 0 \\ x^2 + 5x < 14 \end{cases}$ h) $\begin{cases} (x+5) \cdot (x-5) > 0 \\ (x+3) \cdot (x+1) \leq 0 \end{cases}$

32.- Unha fábrica paga aos seus viaxantes 3 € por artigo vendido máis unha cantidade fixa de 722 €. Outra fábrica, da competencia, paga 5 € por artigo e 600 € fixos. Cantos artigos debe vender o viaxante da competencia para gañar máis cartos có primeiro?

Sol.: Máis de 61 artigos.

Inecuacións lineais con dúas incógnitas

Unha inecuación lineal con dúas incógnitas adopta unha destas formas:

$$ax + by + c < 0 \quad \text{ou} \quad ax + by + c > 0 \quad \text{ou con} \quad \leq \quad \text{ou} \quad \geq$$

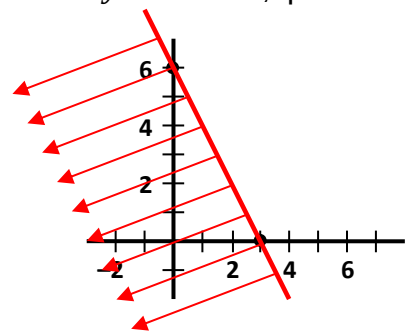
En cada unha delas, o conxunto de solucións é o semiplano que está a un dos lados da recta $ax + by + c = 0$. Cando na desigualdade está incluído o "igual" ($\leq$ ou $\geq$), os puntos da recta son tamén solución. Para saber que lado da recta é a solución collemos un punto do plano que non estea sobre a recta, substituímoslo na inecuación, se esta se cumpre entón a solución é o lado da recta no que se atopa o punto; se a inecuación non se cumpre entón a solución é o outro lado.

Exemplo: Resolve as seguintes inecuacións:

- a) $2x + y \leq 6$ b) $3x + 2y > 8$ c) $x < 3$ d) $y \geq 1$ e) $\begin{cases} x + y > 9 \\ -2x + 3y \leq 12 \end{cases}$

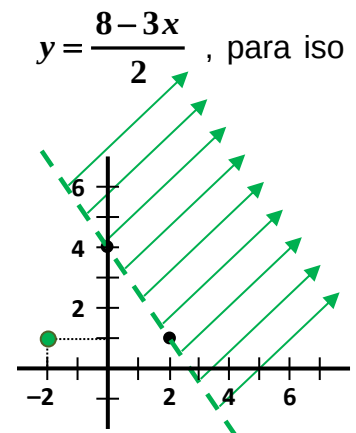
- a)** Representamos a recta asociada: $2x + y = 6 \Leftrightarrow y = 6 - 2x$, para iso facemos a táboa de valores:

x	y	
0	6	Collemos o punto (0,0) e substituímoslo na inecuación: $2 \cdot 0 + 0 \leq 6 \Leftrightarrow 0 \leq 6$ SI.
3	0	Polo tanto, a solución é a parte do semiplano da recta onde está o (0,0).



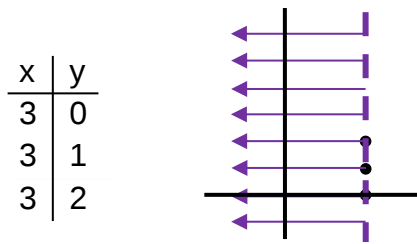
- b)** Representamos a recta asociada: $3x + 2y > 8 \Leftrightarrow y = \frac{8 - 3x}{2}$, para iso facemos a táboa de valores:

x	y	
0	4	Collemos o punto (-2,1) e substituímoslo na inecuación: $3 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 > 8 \Leftrightarrow -4 > 8$ NON.
2	1	Polo tanto, a solución é a parte do semiplano da recta onde NON está o punto (-2,1).

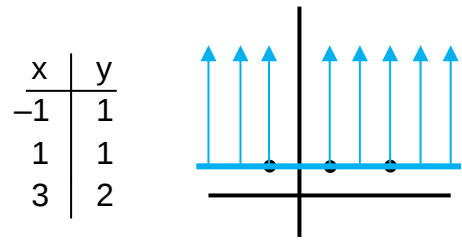


Tema 2 : Álgebra

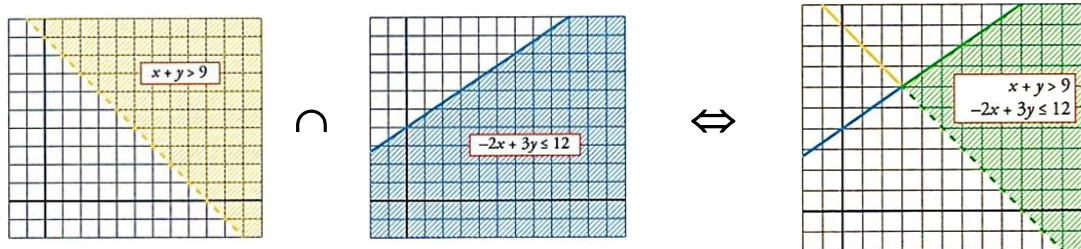
c) Representamos a recta $x = 3$



d) Representamos a recta $y = 1$



e) A solución é o recinto intersección de ambas as dúas inecuacións. Pódese obter representando directamente as dúas rectas sobre os mesmos eixes e sinalando en cada unha delas o semiplano correspondente á desigualdade indicada. O recinto solución obtense tendo en conta a parte común dos distintos semiplanos.



EXERCICIO 33: Resolve os seguintes sistemas de inecuacións:

a) $\begin{cases} 3x + 2y \geq 6 \\ x - y + 1 \geq 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y - 9 > 0 \\ -2x + 3y \geq 12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x \geq 3 \\ y \leq 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x + 2y < 10 \\ 2x - y \geq 1 \end{cases}$

EXERCICIOS:

34.- Un tendeiro inviste 125€ na compra dunha partida de mazás. Desbota 20 quilos por defectuosas e vende o resto, aumentando 0'40€ cada quilo sobre o prezo de compra, por 147€. Cantos quilos mercou? A que prezo? **Sol.: 125 kg a 1 €/kg**

35.- Un corredor sobe as costas a 8 km/h, báixaas a 16 km/h e marcha en terreo chan a 11'5 km/h. No seu último maratón tardou 3 horas e media, e se o percorrido chega a ser en sentido inverso, o seu tempo sería de 4 horas e cuarto. Sabendo que un maratón ten un percorrido de 42 km, cal foi a lonxitude do percorrido chan neste maratón? **Sol.: Hai 9'2 km de chan (22'4 km de baixada e 10'4 km de subida)**

36.- Resolve, escribe e representa a solución das seguintes inecuacións:

Tema 2 : Álgebra

a) $x^2 - 4 \leq -4$

b) $-x^2 + 6x < 9$

c)
$$\begin{cases} x^2 + 2x > 15 \\ 3 - 2x < 7 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 2x + 9 > 3x + 5 \\ x \cdot (x + 1) \geq x^2 + 3x + 1 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} x + y \geq 1 \\ y - 2x \geq 3 \\ 5x + 2y \leq 15 \end{cases}$$

37.- Na sociedade hindú existe o seguinte proverbio:

“ Para que unha relación sentimental sexa satisfactoria, a idade dela non debe exceder a metade máis sete anos a idade del ”.

Unha parella desexa saber cal é o período de tempo máis favorable para formalizar definitivamente as súas relacións sentimentais segundo este proverbio. Este cabaleiro hindú ten oito anos máis que a dama. Pódeslle axudar?

Sol.: *Antes dos 30 anos.*

Tema 2 : Álgebra

Criterios de avaliación

1. Dominar o manexo das fraccións alxébricas e das súas operacións
2. Resolver con destreza ecuación de distintos tipos e aplicalas á resolución de problemas
3. Resolver con destreza sistemas de ecuacións e aplicalos á resolución de problemas
4. Interpretar e resolver inecuacións e sistemas de inecuacións

Estándares de aprendizaxe avaliáveis

- 1.1. Simplificar fraccións alxébricas
- 1.2. Opera con fraccións alxébricas
- 2.1. Calcula o valor da suma de termos de progresións
- 2.2. Resolve ecuacións con radicais e coa incógnita no denominador
- 2.3. Válese da factorización como recurso para resolver ecuacións
- 2.4. Resolver ecuacións exponenciais e logarítmicas
- 2.5. Formula e resolve problemas mediante ecuacións
- 3.1. Resolve sistemas con ecuacións de primeiro e segundo graos e interprétaos graficamente
- 3.2. Resolve sistemas de ecuacións con radicais e fraccións alxébricas (sinxelos)
- 3.3. Resolve sistemas de ecuacións con expresións exponenciais e logarítmicas
- 3.4. Resolve sistemas lineais de tres ecuacións con tres incógnitas mediante o método de Gauss
- 3.5. Formula e resolve problemas mediante sistemas de ecuacións
- 4.1. Resolve e interpreta graficamente inecuacións e sistemas de inecuacións cunha incógnita
- 4.2 Resolve sistemas de inecuacións lineais con dúas incógnitas