BIBLIOTECA DEL PROFESORADO

Matemáticas I

SOLUCIONARIO

BACHILLERATO 1

Este material es una obra colectiva concebida, diseñada y creada en el Departamento de Ediciones de Santillana, bajo la dirección de **Teresa Grence**.

En su elaboración han participado:
Sonia Alejo Sánchez
María Arribas Fernández
José María Fernández Díaz
Coral Victoria de la Iglesia Meleiro
Clara Inés Lavado Campos
Silvia Marín García
Natalia Polo Rodríguez
Lorena Ramos San Millán
Rocío Rubio Álvarez
María de las Mercedes Sánchez Martín

EDICIÓN
Sonia Alejo Sánchez
Clara Inés Lavado Campos
Silvia Marín García
Aída Moya Librero

EDICIÓN EJECUTIVA
Carlos Pérez Saavedra

DIRECCIÓN DEL PROYECTO
Domingo Sánchez Figueroa

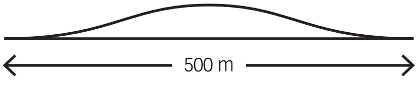
PROYECTO construyendo mundos

Santillana

DESAFÍO

¿Razón o intuición?

Cuando un raíl de 500 m se dilata, crece 30 cm y se comba de forma simétrica, como muestra la figura. ¿Podría pasar por debajo un autobús?



Supón que, en lugar de formar una curva, formara dos rectas de 250,15 m cada una.

Si se consideran dos rectas, se forma un triángulo isósceles que podemos dividir en dos triángulos rectángulos iguales al trazar su altura, x. El otro cateto mide 250 m y la hipotenusa, 250,15 m.

$250{,}15^2 = 250^2 + x^2 \rightarrow x = 8{,}66$ m

Luego un autobús podría pasar por debajo porque tiene menor altura.

PIENSA

PÁG. 38. Si $P(x) = 5x^3 - 2x + 4$, calcula $P(x) - P(x)$.

¿La suma y la resta de polinomios es siempre un polinomio?

¿Y el producto de polinomios?

$P(x) - P(x) = 5x^3 - 2x + 4 - (5x^3 - 2x + 4) =$
$= 0$

La suma y resta de polinomios es siempre un polinomio. En este ejemplo, obtenemos un polinomio nulo, que es aquel cuyos coeficientes son todos 0.

El producto de polinomios siempre es un polinomio.

PÁG. 39. El cociente de $P(x) = 2x^3$ entre $Q(x) = -6x^5$, ¿es un monomio?

$$\frac{2x^3}{-6x^5} = \frac{-1}{3x^2} = -\frac{1}{3}x^{-2}$$

Luego el cociente de $P(x)$ entre $Q(x)$ no es un monomio.

PÁG. 41. Escribe dos polinomios del menor grado posible que tengan por raíces 2, -5 y 0.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$P(x) = (x - 2)(x + 5)x = x^3 + 3x^2 - 10x$
$Q(x) = 2(x - 2)(x + 5)x = 2x^3 + 6x^2 - 20x$

PÁG. 42. ¿Un polinomio $P(x)$ se puede expresar como una fracción algebraica?

Cualquier polinomio puede expresarse como una fracción algebraica, siendo el numerador el producto de dicho polinomio por el denominador de la fracción:

$$P(x) = \frac{P(x) \cdot Q(x)}{Q(x)}$$

PÁG. 45. ¿Cómo es el término independiente de una ecuación de segundo grado en la que una de sus soluciones es cero? ¿Y si no tiene solución?

Si una de sus soluciones es 0, el término independiente es nulo.

Si no tiene solución, el término independiente tiene que cumplir la siguiente relación:

$$b^2 - 4ac < 0 \rightarrow c > \frac{b^2}{4a}$$

PÁG. 46. Encuentra por tanteo la solución.

$$\frac{8}{\sqrt{x}} - \frac{12}{x - 1} = 0$$

$$x = 4 \rightarrow \frac{8}{\sqrt{4}} - \frac{12}{4 - 1} = 0 \rightarrow 4 - 4 = 0$$

PÁG. 47. Calcula mentalmente la solución de esta ecuación.

$$(x + 1)(x + 1) - 9 = 0$$

$$(x + 1)^2 = 9 \rightarrow \begin{cases} x + 1 = 3 \rightarrow x_1 = 2 \\ x + 1 = -3 \rightarrow x_2 = -4 \end{cases}$$

PÁG. 49. ¿Qué valor tiene x en la siguiente ecuación?

$$x^x = x$$

Comparamos exponentes o resolver como una ecuación exponencial. Las únicas soluciones posibles son $x = 1$ y $x = -1$.

PÁG. 50. ¿Cuál es la solución de esta inecuación?

$$\frac{1}{x} < 0$$

$\frac{1}{x} < 0 \rightarrow x < 0 \rightarrow (-\infty, 0)$

PÁG. 51. ¿Cuál es la solución de esta inecuación?

$$\frac{1}{x^2} < 0$$

No tiene solución porque $\frac{1}{x^2}$ es siempre positiva para cualquier valor real de x.

ACTIVIDADES

1. Escribe un polinomio de grado 3 y con término independiente -1. Determina sus términos y su valor numérico para $x = 2$ y $x = -2$.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$P(x) = 2x^3 + 3x - 1 \rightarrow$

$x = 2 \rightarrow P(2) = 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2 - 1 = 21$

$x = -2 \rightarrow P(-2) = 2 \cdot (-2)^3 + 3 \cdot (-2) - 1 =$

$= -23$

2. Efectúa la siguiente operación de polinomios y calcula su grado.

$$(-2x^3 + x^2 + x - 1)(x - 2) + \\ + (3x + 1)(x + 3)$$

$-2x^4 + 4x^3 + x^3 - 2x^2 + x^2 - 2x - x +$

$+ 2 + 3x^2 + 9x + x + 3 =$

$= -2x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 7x + 5$

Tiene grado 4.

3. Realiza estas divisiones de polinomios.

a) $(10x^4 - 3x^2 + 1) : (x^2 - 1)$

b) $(6x^3 + 5x) : (2x^2)$

a)
$$\begin{array}{rrr|l}
10x^4 & -3x^2 & +1 & x^2 - 1 \\ \cline{4-4}
-10x^4 & +10x^2 & & 10x^2 + 7 \\
 & -13x^2 & +1 & \\
 & 13x^2 & +7 & \\ \cline{2-3}
 & & 8 &
\end{array}$$

El cociente es $10x^2 + 7$ y el resto es 8.

b)
$$\begin{array}{rr|l}
6x^3 & +5x & 2x^2 \\ \cline{3-3}
-6x^3 & & 3x \\ \cline{1-2}
 & 5x &
\end{array}$$

El cociente es $3x$ y el resto es $5x$.

4. Divide estos polinomios utilizando la regla de Ruffini.

a) $(x^3 + 3) : (x + 1)$

b) $(4x^5 - 12x^3 - 20x + 2) : (x + 2)$

a)
$$\begin{array}{r|rrr|r}
 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
-1 & & -1 & 1 & -1 \\ \hline
 & 1 & -1 & 1 & \boxed{2}
\end{array}$$

El cociente es $x^2 - x + 1$ y el resto es 2.

b)
$$\begin{array}{r|rrrrr|r}
 & 4 & 0 & -12 & 0 & -20 & 2 \\
-2 & & -8 & 16 & -8 & 16 & 8 \\ \hline
 & 4 & -8 & 4 & -8 & -4 & \boxed{10}
\end{array}$$

El cociente es $4x^4 - 8x^3 + 4x^2 - 8x - 4$ y el resto es 10.

5. Comprueba si los siguientes números son raíces del polinomio $P(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 6x - 8$.

a) $x = 1$

b) $x = 2$

c) $x = -1$

d) $x = -4$

a) $P(1) = 1^4 + 3 \cdot 1^3 - 2 - 1^2 + 6 \cdot 1 - 8 =$
$= 0$

Por lo tanto, $x = 1$ es una raíz del polinomio.

b) $P(2) = 2^4 + 3 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - 8 =$
$= 36$

Por lo tanto, $x = 2$ no es raíz del polinomio.

c) $P(-1) = (-1)^4 + 3 \cdot (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 +$
$+ 6 \cdot (-1) - 8 = -18$

Por lo tanto, $x = -4$ no es raíz del polinomio.

d) $P(-4) = (-4)^4 + 3 \cdot (-4)^3 - 2 \cdot (-4)^2 + 6 \cdot (-4) - 8 = 0$

Por tanto, $x = -4$ es una raíz del polinomio.

6 Calcula las raíces enteras de los polinomios que aparecen a continuación.

a) $x^5 + 4x^4 + x^3 - 6x^2$

b) $x^3 - 5x^2 - 29x + 105$

a) $x^5 + 4x^4 + x^3 - 6x^2 =$
$= x^2(x^3 + 4x^2 + x - 6) \rightarrow$
$\rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0 \end{cases}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 4 & 1 & -6 \\ 1 & & 1 & 5 & 6 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & \boxed{0} \\ -2 & & -2 & -6 & \\ \hline & 1 & 3 & \boxed{0} & \\ -3 & & -3 & & \\ \hline & 1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

Las raíces enteras son $\{-3, -2, 0, 1\}$.

b) Se aplica Ruffini directamente.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -5 & -29 & 105 \\ 7 & & 7 & 14 & -105 \\ \hline & 1 & 2 & -15 & \boxed{0} \\ -5 & & -5 & 15 & \\ \hline & 1 & -3 & \boxed{0} & \\ 3 & & 3 & & \\ \hline & 1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

Las raíces enteras son $\{-5, 3, 7\}$.

7 Factoriza estos polinomios.

a) $2x^3 - 8x^2 + 2x + 12$

b) $3x^3 - 8x^2 - 20x + 16$

c) $2x^4 + 15x^3 + 31x^2 + 12x$

a) $2(x - 2)(x - 3)(x + 1)$

b) $(3x - 2)(x - 4)(x + 2)$

c) $x(2x + 1)(x + 4)(x + 3)$

8 Encuentra las raíces enteras de los polinomios.

a) $12x + 2x^3 + 4 + 9x^2$

b) $x^4 - 8x^2 - 9$

c) $2x^5 + 10x^4 + 28x^3 + 32x^2$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 9 & 12 & 4 \\ -2 & & -4 & -10 & -4 \\ \hline & 2 & 5 & 2 & \boxed{0} \\ -2 & & -4 & -2 & \\ \hline & 2 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$x_1 = -2$ doble

$2x + 1 = 0 \rightarrow x_2 = -\dfrac{1}{2}$

b) $x^2 = z \rightarrow z^2 - 8z - 9 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow z = \dfrac{8 \pm 10}{2} = \begin{cases} z_1 = 9 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{cases} \\ z_2 = -1 \end{cases}$

c) $2x^5 + 10x^4 + 28x^3 + 32x^2 =$
$= 2x^2(x^3 + 5x^2 + 14x + 16) \rightarrow$
$\rightarrow x_1 = 0$ doble

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 5 & 14 & 16 \\ -2 & & -2 & -6 & -16 \\ \hline & 1 & 3 & 8 & \boxed{0} \end{array}$$

$x_2 = -2$

$x^2 + 3x + 8 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{-23}}{2} \rightarrow$
$\rightarrow$ No tiene solución.

9 Simplifica estas fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{x^2 + x}{x^2 + 2x + 1}$ b) $\dfrac{2x^2 + 2x - 12}{4x + 12}$

a) $\dfrac{x(x + 1)}{(x + 1)^2} = \dfrac{x}{x + 1}$

b) $\dfrac{2(x - 2)(x + 3)}{4(x + 3)} = \dfrac{x - 2}{2}$

10 Reduce a común denominador estas fracciones.

$\dfrac{5}{x^2 + 2x - 3}$ $\dfrac{3x}{x^2 - 1}$ $\dfrac{x - 1}{x^2 + 2x + 1}$

m.c.m. $(x^2 + 2x - 3, x^2 - 1, x^2 + 2x + 1) =$
$= (x + 1)^2(x + 3)(x - 1)$

$\dfrac{5}{x^2 + 2x - 3} = \dfrac{5(x + 1)^2}{(x + 1)^2(x + 3)(x - 1)}$

$\dfrac{3x}{x^2 - 1} = \dfrac{3x(x + 1)(x + 3)}{(x + 1)^2(x + 3)(x - 1)}$

$\dfrac{x - 1}{x^2 + 2x + 1} = \dfrac{(x - 1)^2(x + 3)}{(x + 1)^2(x + 3)(x - 1)}$

11 Opera y simplifica.

$$\frac{3}{3x^2+6x}+\frac{1}{x}+\frac{1+x}{6x+12}$$

m.c.m. $(3x^2+6x,\ x,\ 6x+12)=6x(x+2)$

$$\frac{3\cdot 2}{6x(x+2)}+\frac{6(x+2)}{6x(x+2)}+\frac{(1+x)x}{6x(x+2)}=$$
$$=\frac{x^2+7x+18}{6x(x+2)}=\frac{x^2+7x+18}{6x^2+12x}$$

12 Realiza las siguientes operaciones.

a) $\dfrac{5}{x^2+2x-3}\cdot\dfrac{x^2-1}{3x}$

b) $\dfrac{x-1}{x^2+2x+1}:\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$

a) $\dfrac{5(x+1)(x-1)}{(x+3)(x-1)\cdot 3x}=\dfrac{5x+5}{3x^2+9x}$

b) $\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2(x-1)(x-2)}=\dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$

13 Clasifica y resuelve estas ecuaciones de segundo grado.

a) $x^2-10x+21=0$

b) $3x^2+20x+12=0$

c) $3x^2-18x=0$

d) $4x^2-36=0$

a) Ecuación completa.

$$x=\frac{-(-10)\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot 1\cdot 21}}{2\cdot 1}$$

$$x=\frac{10\pm 4}{2}\rightarrow\begin{cases}x_1=7\\x_2=3\end{cases}$$

b) Ecuación completa.

$$x=\frac{-20\pm\sqrt{20^2-4\cdot 3\cdot 12}}{2\cdot 3}$$

$$x=\frac{-20\pm 16}{6}\rightarrow\begin{cases}x_1=-\dfrac{2}{3}\\x_2=-6\end{cases}$$

c) Ecuación incompleta.

$3x(x-6)=0\rightarrow x_1=0\qquad x_2=6$

d) Ecuación incompleta.

$x=\sqrt{9}\rightarrow x_1=-3\qquad x_2=3$

14 Comprueba que se cumplen las relaciones entre las soluciones y los coeficientes.

a) $2x^2=5x-2$

b) $3x^2-3=20-2(x-5)$

a) Soluciones: $x_1=2\qquad x_2=\dfrac{1}{2}$

$$S=\frac{-b}{a}\rightarrow 2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

$$P=\frac{c}{a}\rightarrow 2\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{2}$$

b) Soluciones: $x_1=3\qquad x_2=\dfrac{-11}{3}$

$$S=\frac{-b}{a}\rightarrow 3+\frac{-11}{3}=\frac{-2}{3}$$

$$P=\frac{c}{a}\rightarrow 3\cdot\frac{-11}{3}=-11$$

15 Determina el número de soluciones que tiene cada ecuación sin resolverla.

a) $-2x^2+5x-8=0$

b) $9x^2+30x+25=0$

c) $-5x^2+9x-6=0$

d) $2x^2-x-3=0$

e) $-x^2+9x-2=0$

f) $0{,}34x^2+0{,}5x-1=0$

Calculamos el discriminante:

a) $\Delta=b^2-4ac=5^2-4\cdot(-2)\cdot(-8)=$
$=-39<0$
No tiene solución real.

b) $\Delta=b^2-4ac=30^2-4\cdot 9\cdot 25=0$
Tiene una solución.

c) $\Delta=b^2-4ac=9^2-4\cdot(-5)\cdot(-6)=$
$=-39<0$
No tiene solución real.

d) $\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\cdot 2\cdot(-3)=$
$=25>0$
Tiene dos soluciones.

e) $\Delta=b^2-4ac=9^2-4\cdot(-1)\cdot(-2)=$
$=73>0$
Tiene dos soluciones.

f) $\Delta=b^2-4ac=0{,}5^2-4\cdot 0{,}34\cdot(-1)=$
$=1{,}61>0$
Tiene dos soluciones.

16 Resuelve las ecuaciones bicuadradas que aparecen a continuación.

a) $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$

b) $x^4 - x^2 + 2 = 16x^2 - 14$

c) $11(x^4 + 1) - 7 = 25x^2(1 - x^2)$

a) $z^2 + 5z - 36 = 0 \rightarrow z = \dfrac{-5 \pm 13}{2} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} z_1 = 4 \rightarrow x_1 = 2 \; x_2 = -2 \\ z_2 = -9 \rightarrow \text{No existe solución.} \end{cases}$

b) $x^4 - 17x^2 + 16 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow z^2 - 17z + 16 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow z = \dfrac{17 \pm 15}{2} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} z_1 = 16 \rightarrow x_1 = 4 \quad x_2 = -4 \\ z_2 = 1 \rightarrow x_3 = 1 \quad x_4 = -1 \end{cases}$

c) $36x^4 - 25x^2 + 4 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 36z^2 - 25z + 4 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow z = \dfrac{25 \pm 7}{72} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} z_1 = \dfrac{4}{9} \rightarrow x_1 = \dfrac{2}{3} \quad x_2 = -\dfrac{2}{3} \\ z_2 = \dfrac{1}{4} \rightarrow x_3 = \dfrac{1}{2} \quad x_4 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

17 Resuelve estas ecuaciones con fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{x+1}{x-1} - 1 = \dfrac{1}{x}$

b) $\dfrac{2x^4 + 4}{x^4} = \dfrac{x^2 - 3}{x^2} + 2$

a) $\dfrac{x(x+1)}{x(x-1)} - \dfrac{x(x-1)}{x(x-1)} = \dfrac{x-1}{x(x-1)} \rightarrow$

$\rightarrow x = -1$

b) $\dfrac{2x^4 + 4}{x^4} = \dfrac{x^2(x^2 - 3)}{x^4} + \dfrac{2x^4}{x^4} \rightarrow$

$\rightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow z^2 - 3z - 4 = 0 \rightarrow z = \dfrac{3 \pm 5}{2} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} z_1 = 4 \rightarrow x_1 = 2 \quad x_2 = -2 \\ z_2 = -1 \rightarrow \text{No existe solución.} \end{cases}$

18 Resuelve estas ecuaciones con radicales.

a) $x - 4 = 2\sqrt{x + 1}$

b) $6x - \sqrt{18x - 8} = 2$

a) $x^2 + 4x - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 + 2\sqrt{6} \\ x_2 = 6 - 2\sqrt{6} \end{cases}$

Comprobación:

$6 + 2\sqrt{6} - 4 = 2\sqrt{6 + 2\sqrt{6} + 1} \rightarrow$

$\rightarrow 2 + 2\sqrt{6} = 2\sqrt{7 + 2\sqrt{6}} \rightarrow$

$\rightarrow 6{,}89897... = 6{,}89897...$

$6 - 2\sqrt{6} - 4 = 2\sqrt{6 - 2\sqrt{6} + 1} \rightarrow$

$\rightarrow 2 - 2\sqrt{6} = 2\sqrt{7 - 2\sqrt{6}} \rightarrow$

$\rightarrow -2{,}89897... \neq 2{,}89897...$

Por lo tanto, solo es solución $x = 6 + 2\sqrt{6}$.

b) $6x^2 - 7x + 2 = 0 \rightarrow x_1 = \dfrac{2}{3} \qquad x_2 = \dfrac{1}{2}$

Comprobación:

$6 \cdot \dfrac{2}{3} - \sqrt{18 \cdot \dfrac{2}{3} - 8} = 2 \rightarrow$

$\rightarrow 4 - \sqrt{12 - 8} = 2 \rightarrow 4 - 2 = 2$

$6 \cdot \dfrac{1}{2} - \sqrt{18 \cdot \dfrac{1}{2} - 8} = 2 \rightarrow$

$\rightarrow 3 - \sqrt{9 - 8} = 2 \rightarrow 3 - 1 = 2$

Por lo tanto, ambas soluciones son válidas.

19 Resuelve las siguientes ecuaciones que se encuentran en forma factorizada.

a) $2(x - 3)(x + 5)(x - 1) = 0$

b) $x^2(x + 4)(x - 4)(x - 9) = 0$

c) $(3x - 1)(2x + 3)(x + 2) = 0$

d) $3x(x + 5)^3(3x - 1) = 0$

e) $(x^2 + x - 2)(x^2 - 9) = 0$

a) $x_1 = -5 \qquad x_2 = 1 \qquad x_3 = 3$

b) $x_1 = -4 \qquad x_4 = 4$

$x_2 = 0 \qquad x_5 = 9$

$x_3 = 0$

c) $x_1 = -2 \qquad x_2 = -\dfrac{3}{2} \qquad x_3 = \dfrac{1}{3}$

d) $x_1 = -5 \qquad x_4 = 0$

$x_2 = -5 \qquad x_5 = \dfrac{1}{3}$

$x_3 = -5$

e) $x_1 = -3 \qquad x_3 = 1$

$x_2 = -2 \qquad x_4 = 3$

20 Factoriza las ecuaciones y resuélvelas.

a) $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 38x - 24 = 0$

b) $x^5 - 6x^4 + 10x^3 - 6x^2 + 9x = 0$

c) $x^4 + 8x^3 + 17x^2 + 8x + 16 = 0$

a) $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x + 4) = 0 \rightarrow$
$\rightarrow x_1 = 1 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 3 \quad x_4 = -4$

b) $x(x - 3)^2(x^2 + 1) = 0 \rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = 3$

c) $(x + 4)^2(x^2 + 1) = 0 \rightarrow x = -4$

21 Escribe una ecuación que tenga como soluciones 2, 3 y 7. ¿Cuál es el mínimo grado que puede tener?

Respuesta abierta. Por ejemplo:
$(x - 2)(x - 3)(x - 7) = 0 \rightarrow$ El mínimo grado que puede tener es 3.

22 Resuelve estas ecuaciones logarítmicas.

a) $\log_2 x = 5$

b) $\log x = -2$

c) $\log_x 64 = 6$

d) $\log_x 0{,}1 = -1$

e) $\log_2 (x + 1) = 3$

f) $\log_2 16^x = 4$

a) $x = 32$

b) $x = \frac{1}{100}$

c) $x = 2$

d) $x = 10$

e) $x = 7$

f) $x = 1$

23 Resuelve estas ecuaciones logarítmicas.

a) $1 + \log_x 125 = 6$

b) $\log_5 x - 3 = \log_5 \frac{1}{5}$

c) $\log (2x - 2) = -1$

d) $\log x^2 - \log \frac{10x - 9}{10} = 1$

a) $\log_x 5^3 = 5 \rightarrow x = 5^{3/5}$

b) $\log_5 x - 3 = -1 \rightarrow \log_5 x = 2 \rightarrow$
$\rightarrow x = 25$

c) $2x - 2 = \frac{1}{10} \rightarrow x = \frac{21}{20}$

d) $\frac{10x^2}{10x - 9} = 10 \rightarrow x^2 - 10x + 9 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 9 \end{cases}$

24 Resuelve estas ecuaciones.

a) $2^x = 128$

b) $3^{x-1} = 27$

c) $5^{3x-2} = 625$

a) $2^x = 2^7 \rightarrow x = 7$

b) $3^{x-1} = 3^3 \rightarrow x - 1 = 3 \rightarrow x = 4$

c) $5^{3x-2} = 5^4 \rightarrow 3x - 2 = 4 \rightarrow x = 2$

25 Calcula el valor de x mediante un cambio de variable.

a) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x = -2$

b) $2 \cdot 3^x - 3^{2x} + 3 = 0$

a) $2^x = t \rightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow \begin{cases} t_1 = 2 \rightarrow x_1 = 1 \\ t_2 = 1 \rightarrow x_2 = 0 \end{cases}$

b) $3^x = t \rightarrow -t^2 + 2t + 3 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow \begin{cases} t_1 = -1 \rightarrow \text{No tiene solución.} \\ t_2 = 3 \rightarrow x = 1 \end{cases}$

26 Resuelve las siguientes inecuaciones.

a) $3x - 5 < 4x - 7$

b) $2x - 30 \leq 5x + 3$

c) $5 - (2 - 3x) \geq 2(3x - 5) + x$

d) $2(2 - x) > x - 5$

a) $x > 2 \rightarrow 2 < x < +\infty$
Son solución todos los $x \in (2, +\infty)$.

b) $x \geq -11 \rightarrow -11 \leq x < +\infty$
Son solución todos los $x \in [-11, +\infty)$.

c) $x \leq \frac{13}{4} \rightarrow -\infty < x \leq \frac{13}{4}$
Son solución todos los $x \in \left(-\infty, \frac{13}{4}\right]$.

d) $x < 3 \rightarrow -\infty < x < 3$
Son solución todos los $x \in (-\infty, 3)$.

27 Resuelve las inecuaciones que aparecen a continuación.

a) $1 - \frac{3 - 2x}{3} \leq \frac{x}{4}$

b) $\frac{2x - 5}{3} - \frac{1 - 3x}{6} > 1 - \frac{x}{4}$

a) $x \leq 0 \rightarrow -\infty < x \leq 0$
Son solución todos los $x \in (-\infty, 0]$.

b) $x > 2 \rightarrow 2 < x < +\infty$
Son solución todos los $x \in (2, +\infty)$.

28 Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado con una incógnita.

a) $x^2 - 3x + 2 \leq 0$

b) $x^2 - 3x + 2 \geq 0$

c) $x^2 - 9x > 0$

d) $x^2 - 9 < 0$

e) $x^2 + 2 \leq 0$

f) $(x - 3)(x + 4) \geq 0$

g) $(x + 3)x < 4$

h) $x^2 - 30 > x$

i) $x^2 + x + 3 < 0$

j) $4x^2 - 4x + 1 < 0$

a) Resolvemos la ecuación.

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta.

$x = 0 \qquad x = 1{,}5 \qquad x = 3$

Si $x = 0 \rightarrow 0^2 - 3 \cdot 0 + 2 > 0 \rightarrow$
$\rightarrow (-\infty, 1)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 1{,}5 \rightarrow 0^2 - 3 \cdot 1{,}5 + 2 < 0 \rightarrow$
$\rightarrow (1, 2)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 3 \rightarrow 3^2 - 3 \cdot 3 + 2 > 0 \rightarrow$
$\rightarrow (2, +\infty)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación lo son también de la inecuación.

Por tanto, la solución es $[1, 2]$.

b) Se deduce del apartado anterior que las soluciones de la inecuación son:

$(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$

c) Resolvemos la ecuación.

$$x^2 - 9x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 9 \end{cases}$$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta.

$x = -1 \qquad x = 1 \qquad x = 10$

Si $x = -1 \rightarrow (-1)^2 - 9 \cdot (-1) > 0 \rightarrow$
$\rightarrow (-\infty, 0)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 1 \rightarrow 1^2 - 9 \cdot 1 < 0 \rightarrow (0, 9)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow 10^2 - 9 \cdot 10 > 0 \rightarrow$
$\rightarrow (9, +\infty)$ es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty, 0) \cup (9, +\infty)$.

d) Resolvemos la ecuación.

$$x^2 - 9 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta.

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow (-10)^2 - 9 > 0 \rightarrow$
$\rightarrow (-\infty, -3)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 0^2 - 9 < 0 \rightarrow (-3, 3)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow 10^2 - 9 > 0 \rightarrow$
$\rightarrow (3, +\infty)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-3, 3)$.

e) El primer miembro de la inecuación siempre será positivo.

Por tanto, la inecuación no tiene solución.

f) Resolvemos la ecuación.

$$(x - 3)(x + 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta.

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow (-10 - 3)(-10 + 4) > 0 \rightarrow$
$\rightarrow (-\infty, -4)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow (0 - 3)(0 + 4) < 0 \rightarrow$
$\rightarrow (-4, 3)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow (10 - 3)(10 + 4) > 0 \rightarrow$
$\rightarrow (3, +\infty)$ es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación lo son también de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty, -4] \cup [3, +\infty)$.

g) Resolvemos la ecuación.

$$(x + 3)x = 4 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta.

$x = -10$ $\quad x = 0$ $\quad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow (-10 + 3) \cdot (-10) - 4 > 0 \rightarrow$
$\rightarrow (-\infty, -4)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow (0 - 3) \cdot 0 - 4 < 0 \rightarrow (-4, 1)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow (10 - 3) \cdot 10 + 4 > 0 \rightarrow$
$\rightarrow (1, +\infty)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-4, 1)$.

h) Resolvemos la ecuación.

$$x^2 - x - 30 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = 6 \end{cases}$$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta.

$x = 10$ $\quad x = 0$ $\quad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow (-10)^2 - (-10) - 30 > 0 \rightarrow$
$\rightarrow (-\infty, -5)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 0^2 - 0 - 30 < 0 \rightarrow (-5, 6)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow 10^2 - 10 - 30 > 0 \rightarrow$
$\rightarrow (6, +\infty)$ es solución de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty, -5) \cup (6, +\infty)$.

i) El primer miembro de la inecuación es siempre mayor o igual que cero.

Por tanto, la inecuación no tiene solución.

j) El primer miembro de la inecuación es siempre mayor o igual que cero.

Por tanto, la inecuación no tiene solución.

29 Resuelve estas inecuaciones de grado superior, siguiendo el método utilizado para las inecuaciones de segundo grado.

a) $(x - 2)(x - 3)(x^2 - 2) \geq 0$

b) $x(x - 4)(x + 1)(x^3 - 1) \leq 0$

c) $x^3 + 2x^2 + 3x - 6 < 0$

d) $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 > 0$

a) Las soluciones de la ecuación son:

$x_1 = -\sqrt{2}$ $\quad x_2 = \sqrt{2}$ $\quad x_3 = 2$ $\quad x_4 = 3$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta.

$x = -10$ $\quad x = 0$ $\quad x = 1{,}5$
$x = 2{,}5$ $\quad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow$
$\rightarrow (-10 - 2)(-10 - 3)((-10)^2 - 2) > 0 \rightarrow$
$\rightarrow \left(-\infty, -\sqrt{2}\right)$ es solución.

Si $x = 0 \rightarrow$
$\rightarrow (0 - 2)(0 - 3)(0^2 - 2) < 0 \rightarrow$
$\rightarrow \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ no es solución.

Si $x = 1{,}5 \rightarrow$
$\rightarrow (1{,}5 - 2)(1{,}5 - 3)(1{,}5^2 - 2) > 0 \rightarrow$
$\rightarrow \left(\sqrt{2}, 2\right)$ es solución.

Si $x = 2{,}5 \rightarrow$
$\rightarrow (2{,}5 - 2)(2{,}5 - 3)(2{,}5^2 - 2) < 0 \rightarrow$
$\rightarrow (2, 3)$ no es solución.

Si $x = 10 \rightarrow$
$\rightarrow (10 - 2)(10 - 3)(10^2 - 2) > 0 \rightarrow$
$\rightarrow (3, +\infty)$ es solución.

Las soluciones de la ecuación lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es
$\left(-\infty, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, 2\right] \cup [3, +\infty)$.

b) Las soluciones de la ecuación son:

$x_1 = -1$ $\quad x_2 = 0$ $\quad x_3 = 1$ $\quad x_4 = 4$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta.

$x = -10$ $\quad x = 0{,}5$ $\quad x = 10$
$x = -0{,}5$ $\quad x = 2$

Si $x = -10 \rightarrow$
$\rightarrow -10 \cdot (-10 - 4)(-10 + 1)$
$((-10)^3 - 1) > 0 \rightarrow$
$\rightarrow (-\infty, -1)$ no es solución.

Si $x = -0{,}5 \rightarrow -0{,}5 \cdot (-0{,}5 - 4) \cdot$
$\cdot (-0{,}5 + 1)((-0{,}5)^3 - 1) < 0 \rightarrow$
$\rightarrow (-1, 0)$ es solución.

Si $x = 0{,}5 \rightarrow 0{,}5 \cdot (0{,}5 - 4)(0{,}5 + 1) \cdot$
$\cdot (0{,}5^3 - 1) > 0 \rightarrow (0, 1)$ no es solución.

Si $x = 2 \rightarrow 2 \cdot (2 - 4)(2 + 1)(2^3 - 1) <$
$< 0 \rightarrow (1, 4)$ es solución.

Si $x = 10 \rightarrow 10 \cdot (10 - 4)(10 + 1) \cdot$
$\cdot (10^3 - 1) > 0 \rightarrow (4, +\infty)$ no es solución.

Las soluciones de la ecuación lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $[-1, 0) \cup (1, 4)$.

c) La solución de la ecuación es $x = 1$.

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta.

$x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = 0 \rightarrow 0^3 + 2 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 - 6 < 0 \rightarrow$
$\rightarrow (-\infty, 1)$ es solución.

Si $x = 10 \rightarrow$
$\rightarrow 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 - 6 > 0 \rightarrow$
$\rightarrow (1, +\infty)$ no es solución.

Por tanto, la solución es $(-\infty, 1)$.

d) Las soluciones de la ecuación son:

$x_1 = -1 \qquad x_2 = 1 \qquad x_3 = 2 \qquad x_4 = 3$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta.

Si $x = -2 \rightarrow$
$\rightarrow 16 + 40 + 20 - 10 - 6 > 0 \rightarrow$
$\rightarrow (-\infty, -1)$ es solución.

Si $x = 0 \rightarrow -6 < 0 \rightarrow$
$\rightarrow (-1, 0)$ no es solución.

Si $x = 1{,}5 \rightarrow 0{,}9375 > 0 \rightarrow$
$\rightarrow (0, 2)$ es solución.

Si $x = 2{,}5 \rightarrow -1{,}3125 < 0 \rightarrow$
$\rightarrow (2, 3)$ es solución.

Si $x = 4 \rightarrow 30 > 0 \rightarrow$
$\rightarrow (3, +\infty)$ es solución.

Por tanto, la solución es
$(-\infty, -1) \cup (1, 2) \cup (3, +\infty)$.

PRACTICA

30 Halla las raíces de $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + x + m$ sabiendo que una de sus raíces es -1.

Primero calculamos m:

$P(-1) = -2 - 7 - 1 + m = 0 \rightarrow m = 10$

Descomponiendo el polinomio obtenemos todas las raíces: $x_1 = -1 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = \dfrac{5}{2}$

31 Descompón $\dfrac{5x - 15}{x^2 + x - 6}$ en una suma de dos fracciones algebraicas.

$x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -3 \end{cases}$

$$\frac{5x - 15}{x^2 + x - 6} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 3}$$

$5x - 15 = A(x + 3) + B(x - 2)$

$5x - 15 = (A + B)x + (3A - 2B)$

$\begin{cases} 5 = A + B \\ -15 = 3A - 2B \end{cases} \rightarrow A = 5 - B \rightarrow$

$\rightarrow -15 = 3(5 - B) - 2B \rightarrow$

$\rightarrow -15 = 15 - 5B \rightarrow B = 6 \rightarrow A = -1$

$$\frac{5x - 15}{x^2 + x - 6} = \frac{-1}{x - 2} + \frac{6}{x + 3}$$

32 Determina, según el valor de k, el número de soluciones de estas ecuaciones.

a) $3x^2 - 6x + k = 0$

b) $x^2 + kx + 25 = 0$

a) $\Delta = 36 - 12k = 0 \rightarrow k = 3$

Si $k < 3 \rightarrow \Delta > 0 \rightarrow$ Tiene 2 soluciones.

Si $k = 3 \rightarrow \Delta = 0 \rightarrow$ Tiene 1 solución.

Si $k > 3 \rightarrow \Delta < 0 \rightarrow$ No tiene solución.

b) $\Delta = k^2 - 100 = 0 \rightarrow$

Si $k < -10 \rightarrow \Delta > 0 \rightarrow$ Tiene 2 soluciones.

Si $k = -10 \rightarrow \Delta = 0 \rightarrow$ Tiene 1 solución.

Si $-10 < k < 10 \rightarrow \Delta < 0 \rightarrow$ No tiene solución.

Si $k = 10 \rightarrow \Delta = 0 \rightarrow$ Tiene 1 solución.

Si $k > 10 \rightarrow \Delta > 0 \rightarrow$ Tiene 2 soluciones.

33 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

b) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$

c) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

d) $x^6 + 9x^3 + 8 = 0$

e) $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$

f) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$

a) $z^2 - 9z + 8 = 0 \rightarrow z = \dfrac{9 \pm 7}{2} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} z_1 = 8 \rightarrow x_1 = 2 \\ z_2 = 1 \rightarrow x_2 = 1 \end{cases}$

b) $z^2 + 7z - 8 = 0 \rightarrow z = \dfrac{-7 \pm 9}{2} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} z_1 = 1 \rightarrow x_1 = 1 \\ z_2 = -8 \rightarrow x_2 = -2 \end{cases}$

c) $z^2 - 7z - 8 = 0 \rightarrow z = \dfrac{7 \pm 9}{2} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} z_1 = 8 \rightarrow x_1 = 2 \\ z_2 = -1 \rightarrow x_2 = -1 \end{cases}$

d) $z^2 + 9z + 8 = 0 \rightarrow z = \dfrac{-9 \pm 7}{2} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} z_1 = -1 \rightarrow x_1 = -1 \\ z_2 = -8 \rightarrow x_2 = -2 \end{cases}$

e) $z^2 - 15z - 16 = 0 \rightarrow z = \dfrac{15 \pm 17}{2} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} z_1 = 16 \rightarrow x_1 = 2 \qquad x_2 = -2 \\ z_2 = -1 \rightarrow \text{No tiene solución.} \end{cases}$

f) $z^2 - 17z + 16 = 0 \rightarrow z = \dfrac{17 \pm 15}{2} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} z_1 = 16 \rightarrow x_1 = 2 \qquad x_2 = -2 \\ z_2 = 1 \rightarrow x_3 = 1 \qquad x_4 = -1 \end{cases}$

34 Resuelve las siguientes ecuaciones con fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{2x^3 - x^2 - 2x + 25}{x^2 - 1} = 2x$

b) $\dfrac{x^3 + x^2 + 7x + 2}{x^2 + 2x + 4} = x - 2$

c) $\dfrac{x^3 + 5x^2 - 5x - 21}{x^2 + x - 6} = x + 3$

a) $x^2 - 25 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -5 \end{cases}$

b) $x^2 + 7x + 10 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = -2 \end{cases}$

c) $x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

35 Resuelve las siguientes ecuaciones con fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{x^2 - x}{3x + 1} = \dfrac{-x}{2x - 1}$

b) $\dfrac{x}{x + 6} = \dfrac{x - 5}{x - 3}$

c) $\dfrac{x - 1}{x - 3} = \dfrac{x - 2}{x - 4}$

d) $\dfrac{x - 3}{x - 1} = \dfrac{x - 4}{x - 2}$

a) $(2x - 1)(x^2 - x) = -x(3x + 1) \rightarrow$
$\rightarrow 2x^3 + 2x = 0 \rightarrow x = 0$

b) $x(x - 3) = (x + 6)(x - 5) \rightarrow$
$\rightarrow 4x - 30 = 0 \rightarrow x = \dfrac{15}{2}$

c) $(x - 1)(x - 4) = (x - 3)(x - 2) \rightarrow$
$\rightarrow 2 \neq 0 \rightarrow$ No tiene solución.

d) $(x - 3)(x - 2) = (x - 1)(x - 4) \rightarrow$
$\rightarrow 2 \neq 0 \rightarrow$ No tiene solución.

36 Resuelve estas ecuaciones.

a) $\sqrt{x^2 - 3} = 1$

b) $x = \sqrt{x + 6}$

c) $\dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{x}{2} + 6}$

d) $\sqrt{3x + 19} = x + 3$

a) $x^2 - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$

b) $x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \end{cases}$

Solo es válida $x = 3$.

c) $x^2 - 2x - 24 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -4 \end{cases}$

Solo es válida $x = 6$.

d) $x^2 + 3x - 10 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -5 \end{cases}$

Solo es válida $x = 2$.

37 Resuelve estas ecuaciones.

a) $\sqrt{x^2 - 5} + \sqrt{x - 2} = 3$

b) $\sqrt{2x} + \sqrt{4x - 7} = x + 1$

a) $x^4 - 2x^3 - 23x^2 - 12x + 216 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow x = 3$

b) $x^4 - 8x^3 - 8x + 64 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 8 \end{cases}$

38 Resuelve estas ecuaciones.

a) $3x^5 - 13x^4 + 16x^3 - 4x^2 = 0$

b) $x^4 - 1 = 0$

a) $3x^5 - 13x^4 + 16x^3 - 4x^2 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow x^2(3x - 1)(x - 2)^2 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow x_1 = 0 \qquad x_2 = \dfrac{1}{3} \qquad x_3 = 2$

b) $x^4 - 1 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) = 0 \rightarrow$
$\rightarrow x_1 = 1 \qquad x_2 = -1$

39 Resuelve la inecuación $\dfrac{x^2 - 2x + 4}{x - 4} \geq x$.

$\dfrac{2(x + 2)}{x - 4} \geq 0 \rightarrow \begin{cases} 2(x + 2) = 0 \rightarrow x = -2 \\ x - 4 = 0 \rightarrow x = 4 \end{cases}$

Se forman tres intervalos:

Si $x = -10 \in (-\infty, -2) \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{2(-10+2)}{-10-4} = \dfrac{-16}{-14} = \dfrac{8}{7} \geq 0 \rightarrow$

$\rightarrow$ Es intervalo solución.

Si $x = 0 \in (-2, 4) \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{2(0+2)}{0-4} = \dfrac{4}{-4} = -1 < 0 \rightarrow$

$\rightarrow$ No es intervalo solución.

Si $x = 10 \in (4, +\infty) \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{2(10+2)}{10-4} = \dfrac{24}{6} = 4 \geq 0 \rightarrow$

$\rightarrow$ Es intervalo solución.

A continuación se comprueba si los extremos de los intervalos son soluciones.

$x = -2 \rightarrow \dfrac{2(-2+2)}{-2-4} = \dfrac{0}{-6} = 0 \geq 0 \rightarrow$

$\rightarrow$ Es solución.

$x = 4 \rightarrow \dfrac{2(4+2)}{4-4} = \dfrac{12}{0} \rightarrow$ No es solución.

Por tanto, la solución es $(-\infty, -2] \cup (4, +\infty)$.

ACTIVIDADES FINALES

1. Realiza operaciones con polinomios y fracciones algebraicas

Polinomios

ACTIVIDADES FLASH

40 ¿Cuáles de estas expresiones son polinomios?

a) $3x^2 + 5$

b) $\sqrt{7}x - \sqrt{13}$

c) $3\sqrt{x} - 4$

d) $2x^3 - 7y + 6$

Todas son polinomios salvo la del apartado c), dado que el exponente de x no es un número natural.

ACTIVIDADES FLASH

41 Halla el valor numérico del polinomio para los siguientes valores de x.

$P(x) = 6x^4 - 61x^3 + 185x^2 - 158x + 40$

a) $x = -1$

b) $x = 0$

c) $x = 1$

Para hallar el valor numérico de un polinomio, se sustituye x por el valor correspondiente y se realizan las operaciones pertinentes.

a) $P(-1) = 6 + 61 + 185 + 158 + 40 = 450$

b) $P(0) = 40$

c) $P(1) = 6 - 61 + 185 - 158 + 40 = 12$

42 **INVENTA.** Escribe en cada caso un polinomio como se indica y halla su valor para $x = 3$ y $x = -1$.

a) De grado 4 y sin término independiente.

b) De grado 3 y sin términos de grado 2 ni grado 1.

c) De grado 2 y la suma de sus coeficientes es 10.

d) Con dos términos, de grado 3 y con término independiente no nulo.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $P(x) = x^4 + x \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} P(3) = 3^4 + 3 = 84 \\ P(-1) = (-1)^4 - 1 = 0 \end{cases}$

b) $P(x) = 4x^3 + 2 \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} P(3) = 4 \cdot 3^3 + 2 = 110 \\ P(-1) = 4 \cdot (-1)^3 + 2 = -2 \end{cases}$

c) $P(x) = 2x^2 + 5x + 3 \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} P(3) = 2 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 + 3 = 36 \\ P(-1) = 2 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1) + 3 = 0 \end{cases}$

d) $P(x) = x^3 - 1 \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} P(3) = 3^3 - 1 = 26 \\ P(-1) = (-1)^3 - 1 = -2 \end{cases}$

43 Resuelve estas operaciones entre polinomios.

$$P(x) = 5x^3 - 3x + 2$$
$$Q(x) = x - x^2 + 6x^4$$
$$R(x) = 4x^3 - 8 + 6x^2$$

a) $P(x) + 3Q(x) + R(x)$

b) $-2P(x) + Q(x) - R(x)$

Respetamos la jerarquía de las operaciones.

a) $5x^3 - 3x + 2 + 3(6x^4 - x^2 + x) + 4x^3 + {}$
$+ 6x^2 - 8 = 18x^4 + 9x^3 + 3x^2 - 6$

b) $-2(5x^3 - 3x + 2) + 6x^4 - x^2 + x -{}$
$- (4x^3 + 6x^2 - 8) =$
$= 6x^4 - 14x^3 - 7x^2 + 7x + 4$

44 Calcula $P(x)$ si

$$P(x) + \left(2x^3 - 4x - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} - 7x.$$

$$P(x) = \frac{3}{2} - 7x - \left(2x^3 - 4x - \frac{1}{2}\right) =$$
$$= -2x^3 - 3x + 2$$

45 **INVENTA.** Escribe dos polinomios de grado cuatro cuya suma tenga:

a) El mismo grado.

b) Grado tres.

c) Grado cero.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $P(x) = x^4 - 3x^3$
$Q(x) = 3x^4 + 4x - 1$
$P(x) + Q(x) = 4x^4 - 3x^3 + 4x - 1$

b) $P(x) = x^4 - 2x^3$
$Q(x) = -2x^3 + 4x$
$P(x) + Q(x) = x^4 - 4x^3 + 4x$

c) $P(x) = 2x^4 - x - 3$
$Q(x) = -2x^4 + x + 4$
$P(x) + Q(x) = 1$

46 Efectúa las siguientes operaciones de polinomios.

a) $\left(-2x^3 + \dfrac{5}{2}x - 1\right)\left(x + \dfrac{2}{3}\right)$

b) $(5 + 3x^2)\left[\left(9 - \dfrac{x^3}{3}\right) - \left(x^4 + \dfrac{1}{5}x^2 + 5\right)\right]$

a) $-2x^4 - \dfrac{4}{3}x^3 + \dfrac{5}{2}x^2 + \dfrac{2}{3}x - \dfrac{2}{3}$

b) $-3x^6 - x^5 - \dfrac{28}{5}x^4 - \dfrac{5}{3}x^3 + 11x^2 + 20$

47 **INVESTIGA.** Calcula los términos que faltan.

a)
$$\begin{array}{rrrr}
 & \square & \square & \square \\
\times & & x & -\ 1 \\
\hline
 & \square & \square & \square \\
\square & \square & \square & \\
\hline
x^3 & -\ 2x^2 & & +\ 1
\end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & \square & \square & \square & \square \\
 & \times & & x^2 & -\ x & +\ 2 \\
\hline
 & & \square & \square & \square & \square \\
 & \square & \square & \square & \square & \\
\square & \square & \square & \square & & \\
\hline
\square & \square & -\ 5x^3 & -\ 6x^2 & +\ 3x & -\ 2
\end{array}$$

a)
$$\begin{array}{rrrr}
 & x^2 & -\ x & -\ 1 \\
 & \times & x & -\ 1 \\
\hline
 & -x^2 & +\ x & +\ 1 \\
x^3 & -\ x^2 & -\ x & \\
\hline
x^3 & -\ 2x^2 & & +\ 1
\end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & -4x^3 & -\ 2x^2 & & -\ 1 \\
 & & \times & x^2 & -\ x & -\ 2 \\
\hline
 & & -8x^3 & -\ 4x^2 & +\ 2x & -\ 2 \\
 & 4x^4 & +\ 2x^3 & -\ x^2 & +\ x & \\
-4x^5 & -\ 4x^4 & +\ x^3 & -\ x^2 & & \\
\hline
-4x^5 & & -\ 5x^3 & -\ 6x^2 & +\ 3x & -\ 2
\end{array}$$

48 Realiza las siguientes divisiones de polinomios y di cuál es el polinomio cociente y el resto en cada caso.

a) $(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1) : (x^2 - 3)$

b) $(x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1) : (x^3 - x + 1)$

a) El cociente es $x^3 + x^2 + 4x + 4$ y el resto es $12x + 13$.

b) El cociente es $x^5 - x^2 + x - 1$ y el resto es $x^2 - 2x + 2$.

49 Calcula el polinomio $A(x)$ cuya división entre $x^2 + 5x + 3$ tiene $x - 9$ de resto y $x^4 - 1$ de cociente.

Realizamos la prueba de la división.

$A(x) = (x^2 + 5x + 3)(x^4 - 1) + (x - 9) \rightarrow$
$\rightarrow A(x) = x^6 + 5x^5 + 3x^4 - x^2 - 4x - 9$

50 Divide los siguientes polinomios utilizando la regla de Ruffini.

a) $(2x^5 + 3x^4 + 7x^3 - 11x^2 - 1) : (x - 1)$

b) $(4x^2 - x + 1) : (x + 1)$

c) $(3x^6 + 5x^3 - x + 3) : (x + 3)$

d) $(x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1) : (x - 1)$

a)
$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 2 & 3 & 7 & -11 & 0 & -1 \\ 1 & & 2 & 5 & 12 & 1 & 1 \\ \hline & 2 & 5 & 12 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

Cociente: $2x^4 + 5x^3 + 12x^2 + x + 1$
Resto: 0

b)
$$\begin{array}{r|rrr} & 4 & -1 & 1 \\ -1 & & -4 & 5 \\ \hline & 4 & -5 & \boxed{6} \end{array}$$

Cociente: $4x - 5$

Resto: 6

c)
$$\begin{array}{r|rrrrrrr} & 3 & 0 & 0 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ -3 & & -9 & 27 & -81 & 228 & -684 & 2055 \\ \hline & 3 & -9 & 27 & -76 & 228 & -685 & \boxed{2058} \end{array}$$

Cociente:
$3x^5 - 9x^4 + 27x^3 - 76x^2 + 228x - 685$
Resto: 2058

d)
$$\begin{array}{r|rrrrrrrrr} & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{array}$$

Cociente: $x^7 + x^6 + x^3 + x^2$

Resto: 1

51 Si $P(x) = x^3 - 4x^2 - x + m$, calcula m para que la división $P(x) : (x - 2)$ sea exacta.

$P(2) = 0 \rightarrow 8 - 16 - 2 + m = 0 \rightarrow$
$\rightarrow m = 10$

52 ¿Qué valor debe tomar a para que el resto de dividir $x^3 + ax^2 - 3x - a$ entre $x - 4$ sea 67?

Dividimos el polinomio entre $x - 4$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & a & -3 & -a \\ 4 & & 4 & 16 + 4a & 52 + 16a \\ \hline & 1 & 4 + a & 13 + 4a & \boxed{52 + 15a} \end{array}$$

Igualamos el resto a 67.

$52 + 15a = 67 \rightarrow a = 1$

53 Determina a y b para que las divisiones del polinomio $x^3 + ax^2 + bx - 6$ entre los polinomios $x - 2$ y $x + 3$ sean divisiones exactas.

Dividimos el polinomio entre $x - 2$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & a & b & -6 \\ 2 & & 2 & 4 + 2a & 8 + 4a + 2b \\ \hline & 1 & 2 + a & 4 + 2a + b & \boxed{2 + 4a + 2b} \end{array}$$

Dividimos el polinomio entre $x + 3$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & a & b & -6 \\ -3 & & -3 & 9 - 3a & -27 + 9a - 3b \\ \hline & 1 & -3 + a & 9 - 3a + b & \boxed{-33 + 9a - 3b} \end{array}$$

Resolvemos el sistema.

$$\left.\begin{array}{r} 2 + 4a + 2b = 0 \\ -33 + 9a - 3b = 0 \end{array}\right\} \rightarrow a = 2 \qquad b = -5$$

54 **INVESTIGA.** Si el dividendo y el divisor de una división de polinomios se multiplican o dividen por un mismo polinomio, ¿qué les ocurre al cociente y al resto?

No varían, al igual que ocurre con los números.

55 Calcula el resto sin realizar las divisiones.

a) $(3x^{11} + 4x^6 - 5x^3 - 1) : (x + 1)$

b) $(9x^{105} - 3x^{60} + 5x^{21} - 6x^{12} + x^3 + 7) :$
$: (x^3 - 1)$

a) $P(-1) = -3 + 4 + 5 - 1 = 5$

b) Realizamos el cambio de variable $x^3 = z$.
$(9z^{35} - 3z^{20} + 5z^7 - 6z^4 + z + 7) : (z - 1)$
$P(-1) = 3 - 1 + 2 = 4$
$P(1) = 9 - 3 + 5 - 6 + 1 + 7 = 13$

56 **RETO.** Halla el resto de esta división.

$(3(x + 1)^{16} - (x + 1)^8 + 2) : (x^2 + 2x + 2)$

No se puede factorizar el divisor, pues sus raíces no son reales, por lo que no podemos calcular el resto del polinomio.

Hacemos el cambio: $(x + 1)^2 = z$

$(3(x + 1)^{16} - (x + 1)^8 + 2) : ((x + 1)^2 + 1) \rightarrow$
$\rightarrow (3z^8 - z^4 + 2) : (z + 1)$

$P(-1) = 3 - 1 + 2 = 4$

Luego el resto es 4.

Raíces de un polinomio. Factorización

ACTIVIDADES FLASH

57 Comprueba si los valores $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$ son raíces de estos polinomios.

a) $x^5 - x^4 - 3x^3 + x^2 + 2x$

b) $x^5 + 4x^4 - 6x^3 - 6x^2 - 7x - 10$

c) $x^5 - 1$

d) $x^5 - x^4 - \dfrac{13}{4}x^3 + \dfrac{13}{4}x^2 - 3x + 3$

a) $P(x) = x^5 - x^4 - 3x^3 + x^2 + 2x$

$P(-1) = 0 \quad P(0) = 0 \quad P(1) = 0$

Raíces: $x_1 = -1 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 0$

b) $P(x) = x^5 + 4x^4 - 6x^3 - 6x^2 - 7x - 10$

$P(-1) = 0 \quad P(0) = -10$

$P(1) = -24$

Raíz: $x = -1$

c) $P(x) = x^5 - 1$

$P(-1) = -2 \quad P(0) = -1 \quad P(1) = 0$

Raíz: $x = 1$

d) $P(x) = x^5 - x^4 - \dfrac{13}{4}x^3 + \dfrac{13}{4}x^2 -$

$- 3x + 3$

$P(-1) = \dfrac{21}{2} \quad P(0) = 3 \quad P(1) = 0$

Raíz: $x = 1$

58 Halla las raíces de estos polinomios.

a) $x^2 - 1$

b) $5x^2 - 25$

c) $3x^2 - 12$

d) $3x^2 + 6$

a) $x_1 = 1$

$x_2 = -1$

b) $x_1 = \sqrt{5}$

$x_2 = -\sqrt{5}$

c) $x_1 = 2$

$x_2 = -2$

d) No tiene solución.

59 Determina las raíces de los siguientes polinomios.

a) $(x - 3)(x + 5)(x - 2)$

b) $x(x - 2)^2(2x + 1)$

c) $(2x - 1)(3x + 2)(x + 3)^2$

d) $x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

e) $x^3 + 8x^2 + 17x + 10$

f) $3x^3 + 7x^2 - 22x - 8$

g) $2x^4 - 11x^3 + 21x^2 - 16x + 4$

h) $x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 32x + 64$

a) $x_1 = -5$

$x_2 = 2$

$x_3 = 3$

b) $x_1 = -\dfrac{1}{2}$

$x_2 = 0$

$x_3 = 2$

c) $x_1 = -3 \qquad x_2 = -\dfrac{2}{3} \qquad x_3 = \dfrac{1}{2}$

d)
$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -3 & -6 & 8 \\
1 & & 1 & -2 & -8 \\
\hline
 & 1 & -2 & -8 & \boxed{0} \\
-2 & & -2 & 8 & \\
\hline
 & 1 & -4 & \boxed{0} & \\
4 & & 4 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}
$$

$x_1 = -2 \qquad x_2 = 1 \qquad x_3 = 4$

e)
$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 8 & 17 & 10 \\
-1 & & -1 & -7 & -10 \\
\hline
 & 1 & 7 & 10 & \boxed{0} \\
-2 & & -2 & -10 & \\
\hline
 & 1 & 5 & \boxed{0} & \\
-5 & & -5 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}
$$

$x_1 = -5 \qquad x_2 = -2 \qquad x_3 = -1$

f)
$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 3 & 7 & -22 & -8 \\
2 & & 6 & 26 & 8 \\
\hline
 & 3 & 13 & 4 & \boxed{0} \\
-4 & & -12 & -4 & \\
\hline
 & 3 & 1 & \boxed{0} &
\end{array}
$$

$3x + 1 = 0 \rightarrow x = -\dfrac{1}{3}$

$x_1 = -4 \qquad x_2 = -\dfrac{1}{3} \qquad x_3 = 2$

g)
$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & -11 & 21 & -16 & 4 \\
1 & & 2 & -9 & 12 & -4 \\
\hline
 & 2 & -9 & 12 & -4 & \boxed{0} \\
2 & & 4 & -10 & 4 & \\
\hline
 & 2 & -5 & 2 & \boxed{0} & \\
2 & & 4 & -2 & & \\
\hline
 & 2 & -1 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

$2x - 1 = 0 \qquad x = \dfrac{1}{2}$

$x_1 = \dfrac{1}{2} \qquad x_2 = 1 \qquad x_3 = 2$

h)
$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -4 & -12 & 32 & 64 \\
-2 & & -2 & 12 & 0 & -64 \\
\hline
 & 1 & -6 & 0 & 32 & \boxed{0} \\
-2 & & -2 & 16 & -32 & \\
\hline
 & 1 & -8 & 16 & \boxed{0} & \\
4 & & 4 & -16 & & \\
\hline
 & 1 & -4 & \boxed{0} & & \\
4 & & 4 & & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & & &
\end{array}$$

$x_1 = -2 \qquad x_2 = 4$

60 ●○○ Escribe un polinomio de tercer grado con raíces:

a) 2, 3 y 5 b) −2, −1 y 4 c) 2, 2 y −4

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $(x - 2)(x - 3)(x - 5) =$
$= x^3 - 10x^2 + 31x - 30$

b) $(x + 2)(x + 1)(x - 4) =$
$= x^3 - x^2 - 10x - 8$

c) $(x - 2)^2(x + 4) = x^3 - 12x + 16$

61 ●○○ Escribe un polinomio de cuarto grado con raíces:

a) 3, 5, −1 y 0

b) 2 y −2

c) 2, 3, −1, −2 y −3

Si en algún caso no es posible, explica las razones.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $(x - 3)(x - 5)(x + 1)x =$
$= x^3 - 7x^2 + 7x + 15$

b) $(x - 2)^2(x + 2)^2 = x^4 - 8x^2 + 16$

c) No es posible porque un polinomio de cuarto grado puede tener como máximo cuatro raíces.

62 ●●○ **INVENTA.** Escribe dos polinomios en cada caso.

a) De tercer grado cuya única raíz sea −1.

b) De segundo grado cuyas raíces sean 2 y −3.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $(x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
y $5(x - 1)^3 = 5x^3 - 15x^2 + 15x - 5$

b) $(x - 2)(x + 3) = x^2 + x - 6$
y $3(x - 2)(x + 3) = 3x^2 + 3x - 18$

63 ●●○ **INVESTIGA.** Determina si existen estos polinomios y, si existen, busca un ejemplo.

a) De tercer grado y cuya única raíz real sea 0.

b) De tercer grado y con cuatro raíces reales.

c) De tercer grado y sin raíces reales.

a) $3x^3$

b) Si el polinomio es de tercer grado, como máximo puede tener tres raíces reales.

c) Un polinomio de tercer grado tiene al menos una raíz real.

64 ●○○ Obtén los valores de n y m.

a) $2x^3 + 2x^2 + nx + 3$ tiene −3 por raíz.

b) $mx^3 - 6x^2 - 4x + 8$ tiene 2 por raíz.

a) $P(-3) = -54 + 18 - 3n + 3 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow -33 - 3n = 0 \rightarrow n = -11$

b) $P(2) = 8m - 24 - 8 + 8 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow 8m - 24 = 0 \rightarrow m = 3$

65 ●●○ Encuentra un polinomio $P(x)$ de segundo grado cuyas raíces sean 1 y −2 y tal que $P(3) = 30$.

$P(x) = c \cdot (x - 1)(x + 2) = cx^2 + cx - 2c$

$P(3) = 9c + 3c - 2c = 30 \rightarrow c = 3$

$P(x) = 3x^2 + 3x - 6$

$P(x) = c \cdot (x - 1)(x + 2) = cx^2 + cx - 2c$

$P(3) = 9c + 3c - 2c = 30 \rightarrow c = 3 \rightarrow$
$\rightarrow P(x) = 3x^2 + 3x - 6$

66 Escribe un polinomio $Q(x)$ de tercer grado cuyas raíces sean 3, -1 y -1, y tal que $Q(2) = -18$.

$$Q(x) = c \cdot (x-3)(x+1)^2 = cx^3 - cx^2 - 5cx - 3c$$

$$Q(2) = 8c - 4c - 10c - 3c = -18 \rightarrow c = 2$$

$$Q(x) = 2x^3 - 2x^2 - 10x - 6$$

67 Calcula el polinomio de segundo grado $P(x)$ tal que $P(1) = -6$, $P(0) = -3$ y una de sus raíces sea 3.

$$P(x) = c \cdot (x-3)(x-a)$$

$$\left.\begin{array}{l} P(1) = -2(1-a)c = -6 \\ P(0) = 3ac = -3 \end{array}\right\} \rightarrow a = \frac{-1}{c} \rightarrow$$

$$\rightarrow -2\left(1 + \frac{1}{c}\right)c = -6 \rightarrow$$

$$\rightarrow -2(c+1) = -6 \rightarrow c = 2 \rightarrow a = \frac{-1}{2}$$

$$P(x) = 2(x-3)\left(x + \frac{1}{2}\right) = 2x^2 - 5x - 3$$

ACTIVIDADES FLASH

68 Descompón en factores estos polinomios.

a) $x^3 - x$
b) $x^2 - 4$
c) $9x^2 - 1$
d) $6x^2 - 6$
e) $x^2 - 5$
f) $9x^6 - 16x^2$
g) $x^2 - 6x + 9$
h) $3x^2 + 6x + 3$
i) $x^3 + 2x^2 + x$

a) $x(x-1)(x+1)$
b) $(x-2)(x+2)$
c) $(3x-1)(3x+1)$
d) $6(x-1)(x+1)$
e) $(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$
f) $x^2(3x^2-4)(3x^2+4)$
g) $(x-3)^2$
h) $3(x+1)^2$
i) $x(x+1)^2$

69 Factoriza estos polinomios.

a) $x^2 + x - 30$
b) $x^2 - 2x - 24$
c) $x^3 - 6x^2 + 3x + 10$
d) $2x^3 - 5x^2 - 2x + 5$
e) $x^3 + x^2 - 6x$
f) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$
g) $x^4 + 6x^3 + 5x^2 - 24x - 36$
h) $4x^4 - 12x^3 + 9x^2$

a) $(x-5)(x+6)$
b) $(x-6)(x+4)$
c) $(x-5)(x+1)(x-2)$
d) $(2x-5)(x-1)(x+1)$
e) $x(x-2)(x+3)$
f) $(x-1)^2(x+2)^2$
g) $(x-2)(x+2)(x+3)^2$
h) $x^2(2x-3)^2$

70 **INVESTIGA.** Opera y comprueba que:

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = (x^2 + x + 1)^2$$

¿Puede factorizarse un polinomio que no tiene raíces reales? Pon dos ejemplos.

Comprobación:

$$(x^2+x+1)^2 = (x^2+x+1)(x^2+x+1) = x^4 + x^3 + x^2 + x^3 + x^2 + x + x^2 + x + 1 = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

Se puede factorizar, pero en factores de grado par.

Ejemplos:

$$x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2+1)^2$$

$$16x^4 + 24x^2 + 9 = (4x^2+3)^2$$

71 **RETO.** Descompón este polinomio en dos factores, sabiendo que se anula para dos valores inversos entre sí.

$$P(x) = x^5 - 209x + 56$$

Definimos las raíces como a y $\frac{1}{a}$. Por tanto, uno de los factores sería:

$$(x-a)\left(x - \frac{1}{a}\right) = x^2 - Ax + 1, \text{ con}$$

$$A = a + \frac{1}{a}.$$

Por tanto: $x^5 - 209x + 56 =$
$= (x^2 - Ax + 1)(x^3 + Bx^2 + Cx + 56)$

Igualamos los coeficientes y queda el siguiente sistema.

$$\begin{cases} Bx^4 - Ax^4 = 0 \rightarrow A = B \\ Cx^3 - ABx^3 + x^3 = 0 \rightarrow C - A^2 + 1 = 0 \\ 56x^2 - ACx^2 + Bx^2 = 0 \rightarrow 56 - AC + A = 0 \\ -56A + C = -209 \end{cases}$$

Solución: $A = 4, B = 4, C = 15$

Por tanto: $x^5 - 209x + 56 =$
$= (x^2 - 4x + 1)(x^3 + 4x^2 + 15x + 56)$

Fracciones algebraicas

ACTIVIDADES FLASH

72 ¿Cuáles de estas son fracciones algebraicas?

a) $\dfrac{x^2+1}{x+2}$

b) $\dfrac{x^2+1}{5}$

c) $\dfrac{5}{x+2}$

d) $\dfrac{\sqrt{7}+1}{x^3-1}$

e) $\dfrac{\sqrt{x^2-5}}{x}$

f) $\dfrac{x-\sqrt{2}}{x^4}$

a), c), d) y f) son fracciones algebraicas.

b) es un polinomio.

e) no es una fracción algebraica porque tiene un exponente fraccionario.

73 Realiza las operaciones y simplifica el resultado.

a) $\dfrac{3x-2}{4x+12} - \dfrac{x+2}{4x-12}$

b) $\dfrac{2-x}{x^2-3x} - \dfrac{1}{4x-12} + \dfrac{5}{6x-18}$

c) $\dfrac{4}{x+y} - \dfrac{5}{x-y}$

d) $\dfrac{4-x^2}{x+2} + \dfrac{9-x^2}{x+3}$

a) $\dfrac{(3x-2)(x-3)-(x+2)(x+3)}{4(x+3)(x-3)} =$

$= \dfrac{2x^2-16x}{4(x+3)(x-3)} = \dfrac{x(x-8)}{2(x+3)(x-3)}$

b) $\dfrac{12(2-x)-3x+10x}{12x(x-3)} =$

$= \dfrac{24-5x}{12x(x-3)} = \dfrac{5x-24}{12x(3-x)}$

c) $\dfrac{4(x-y)-5(x+y)}{(x+y)(x-y)} = \dfrac{-x-9y}{(x+y)(x-y)}$

d) $\dfrac{(2-x)(2+x)}{(x+2)} + \dfrac{(3-x)(3+x)}{(x+3)} =$

$= 2 - x + 3 - x = 5 - 2x$

74 Calcula y simplifica.

a) $\left(\dfrac{x+2}{x+1} - \dfrac{x+1}{x-2}\right)\dfrac{x+1}{2x+5}$

b) $\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}\right)\left(x - \dfrac{x+1}{x-1}\right) -$
$- \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}\right) : \dfrac{1}{x-1}$

c) $\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x+1}\right) - \dfrac{x+1}{x}\left(3 - \dfrac{4}{x+1}\right)$

a) $\dfrac{-2x-5}{(x+1)(x-2)} \cdot \dfrac{x+1}{2x+5} = \dfrac{1}{2-x}$

b) $\dfrac{1}{x(x+1)} \cdot \dfrac{x^2-2x-1}{x-1} -$
$- \dfrac{1}{x(x+1)} : \dfrac{1}{x-1} =$

$= \dfrac{x^2-2x-1}{x(x+1)(x-1)} - \dfrac{x-1}{x(x+1)} =$

$= \dfrac{-2}{x(x^2-1)} = \dfrac{-2}{x^3-x}$

c) $\dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{2-x}{x(x+1)} - \dfrac{x+1}{x} \cdot \dfrac{3x-1}{x+1} =$

$= \dfrac{2-x}{x^2(x+1)} - \dfrac{3x-1}{x} =$

$= \dfrac{-3x^3-2x^2+2}{x^2(x+1)}$

75 Realiza estas operaciones y simplifica.

a) $\dfrac{\dfrac{x-1}{x+2}-\dfrac{x+2}{x-1}}{1-\dfrac{1}{x-1}}$ b) $\dfrac{\dfrac{x-1}{x-\dfrac{2x-1}{x}}}{x^2-9}$

a) $\dfrac{\dfrac{(x-1)^2-(x+2)^2}{(x+2)(x-1)}}{\dfrac{x-2}{x-1}}=\dfrac{\dfrac{-6x-3}{x+2}}{x-2}=$
$=\dfrac{-6x-3}{x^2-4}$

b) $\dfrac{\dfrac{x-1}{x^2-2x+1}}{\dfrac{x}{x^2-9}}=\dfrac{\dfrac{x-1}{(x-1)^2}}{\dfrac{x}{x^2-9}}=$
$=\dfrac{x}{(x-1)(x^2-9)}$

76 Indica cuáles de estas fracciones son equivalentes.

$\dfrac{4x^3+14x^2}{6x^4}$ $\dfrac{3abx^2}{\dfrac{1}{2}(x^2-10x+25)^2}$

$\dfrac{6abx^2}{(x-5)^2}$ $\dfrac{2x+7}{3x^2}$

Si simplificamos la primera fracción, obtenemos:

$\dfrac{2x^2(2x+7)}{6x^4}=\dfrac{2x+7}{3x^2}$

Por tanto, la primera fracción es equivalente a la última fracción.

Si operamos en la tercera fracción $3:\dfrac{1}{2}$, obtenemos la segunda fracción, luego estas dos fracciones son equivalentes.

Por tanto, son equivalentes entre sí:

- La primera y la última fracción.
- La segunda y la tercera fracción.

77 Determina los valores de A y B en cada caso.

a) $\dfrac{x+2}{x^2-1}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}$

b) $\dfrac{3x+1}{(x+1)^2}=\dfrac{A}{(x+1)^2}+\dfrac{B}{x+1}$

a) $\dfrac{x+2}{x^2-1}=\dfrac{A(x+1)}{x-1}+\dfrac{B(x-1)}{x+1}=$
$=\dfrac{Ax+A+Bx-B}{(x-1)(x+1)}\rightarrow\begin{cases}A+B=1\\A-B=2\end{cases}\rightarrow$
$\rightarrow A=\dfrac{3}{2}\qquad B=-\dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{3x+1}{(x+1)^2}=\dfrac{A}{(x+1)^2}+\dfrac{B(x+1)}{(x+1)^2}=$
$=\dfrac{A+Bx+1}{(x+1)^2}\rightarrow\begin{cases}B=3\\A+1=1\end{cases}\rightarrow$
$\rightarrow A=0\qquad B=3$

78 Descompón en suma de dos fracciones.

a) $\dfrac{1}{x(x+2)}$

b) $\dfrac{x+6}{x^2-x-6}$

c) $\dfrac{7x+6}{x^2-x-6}$

a) $\dfrac{1}{x(x+2)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+2}=$
$=\dfrac{Ax+2A+Bx}{x(x+2)}\rightarrow$
$\rightarrow\begin{cases}A+B=0\\2A=1\end{cases}\rightarrow A=\dfrac{1}{2}\qquad B=-\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{1}{x(x+2)}=\dfrac{\dfrac{1}{2}}{x}+\dfrac{-\dfrac{1}{2}}{x+2}$

b) $\dfrac{x+6}{x^2-x-6}=\dfrac{A}{x-3}+\dfrac{B}{x+2}=$
$=\dfrac{Ax+2A+Bx-3B}{x(x+2)}\rightarrow$
$\rightarrow\begin{cases}A+B=1\\2A-3B=6\end{cases}\rightarrow A=\dfrac{9}{5}\quad B=\dfrac{-4}{5}$

c) $\dfrac{7x+6}{x^2-x-6}=\dfrac{A}{x-3}+\dfrac{B}{x+2}=$
$=\dfrac{Ax+2A+Bx-3B}{(x-3)(x+2)}\rightarrow$
$\rightarrow\begin{cases}A+B=7\\2A-3B=6\end{cases}\rightarrow$
$\rightarrow A=\dfrac{27}{5}\qquad B=\dfrac{8}{5}$

2. Traduce enunciados a lenguaje algebraico

INTERNET

79 ●●○ **MATEMÁTICAS Y… CONSUMO.** Estas son las tarifas de una compañía telefónica.

a) Expresa con un polinomio el importe de una factura en función de las llamadas.

b) ¿Cuál sería el importe de la factura si se han realizado 25 llamadas?

c) ¿Cuántas llamadas se habrán hecho si la factura de este mes ha sido de 9,85 €?

a) $P(x) = (5{,}85 + 0{,}1525x) \cdot 1{,}21 =$
$= 7{,}0785 + 0{,}184525x$

b) $P(25) = 7{,}0785 + 0{,}184525 \cdot 25 = 11{,}69$

El importe de la factura, si se han realizado 25 llamadas, es 11,69 €.

c) $7{,}0785 + 0{,}184525x = 9{,}85 \rightarrow$
$\rightarrow x = 15$

Este mes habrá hecho 15 llamadas.

INTERNET

80 ●●○ **MATEMÁTICAS Y… CONSUMO.** Observa la factura de la luz de un hogar que tiene contratados 4,6 kW de potencia y ha consumido 363 kWh los dos últimos meses.

CONOZCA AL DETALLE SU FACTURACIÓN Y CONSUMOS

ENERGÍA		
Potencia facturada	4,6 W × 62 días × 0,117126 €/kW	33,40 €
Consumo facturado	363 kWh × 0,128518 €/kWh	46,66 €
Impuesto sobre electricidad	5,1127 % s/80,06 €	4,009 €
TOTAL ENERGÍA		**84,15 €**
SERVICIOS Y OTROS CONCEPTOS		
Potencia facturada	62 días × 0,000986 €/día	0,06 €
Servicio Urgencias Eléctricas	2 meses × 1,99 €/mes	3,98 €
TOTAL SERVICIOS Y OTROS CONCEPTOS		**4,04 €**
TOTAL ENERGÍA, SERVICIOS Y OTROS CONCEPTOS		88,19 €
IVA	21 % s/88,19	18,52 €
TOTAL IMPORTE FACTURA		**106,71 €**

a) Escribe un polinomio para calcular el coste de la factura dependiendo de los kWh consumidos.

b) ¿Cuál será el importe si se consumen 500 kWh?

c) Si la potencia contratada es inferior a 10 kW, su precio es de 0,117126 €/kW al día. Modifica la fórmula para calcular el precio si la potencia contratada sube a 6,5 kW. ¿Cuál será el importe si se consumen 500 kWh?

a) $P(x) = [(4{,}6 \cdot 62 \cdot 0{,}117126 + 0{,}128518x) \cdot$
$\cdot 1{,}051127 + 62 \cdot 0{,}000986 + 2 \cdot 1{,}99] \cdot$
$\cdot 1{,}21 = (39{,}15333065 + 0{,}13508874x) \cdot$
$\cdot 1{,}21 = 47{,}37553009 + 0{,}1634573751x$

b) $P(500) = 47{,}37553009 +$
$+ 0{,}1634573751 \cdot 500 = 129{,}10$

500 kWh, el importe será 129,10 €.

c) $P(x) = [(6{,}5 \cdot 62 \cdot 0{,}117126 + 0{,}128518x) \cdot$
$\cdot 1{,}051127 + 62 \cdot 0{,}000986 + 2 \cdot 1{,}99] \cdot$
$\cdot 1{,}21 = (53{,}6561953 + 0{,}135088739x) \cdot$
$\cdot 1{,}21 = 64{,}92399632 + 0{,}163457375x$
$P(500) = 64{,}92399632 +$
$+ 0{,}163457375 \cdot 500 = 146{,}65$

En este caso, el importe será 146,65 €.

Esta actividad puede utilizarse para trabajar el ODS 7, energía asequible y no contaminante.

81 ●●○ **INVESTIGA.** Escribe una expresión algebraica que refleje este proceso y explica por qué ocurre.

- Pide a tu compañero o compañera que multiplique por 2 el número del mes en que nació (enero = 1, febrero = 2, marzo = 3…) y al resultado le sume 5.
- Pídele después que multiplique por 50 y a ese resultado le sume su edad.
- Dile que diga el número que le ha salido y réstale 250.

En el número resultante, las dos cifras de la derecha se corresponden con su edad, y las de la izquierda con su mes de nacimiento.

Llamamos m al mes y x a la edad.
$(2m + 5) \cdot 50 + x - 250 = 100m + x$
Las dos primeras cifras del número obtenido corresponden al mes, como son las centenas están multiplicadas por 100. La edad se corresponde con las dos últimas cifras, que corresponden a las unidades, y por tanto se multiplican por 1.

Por ejemplo, si el mes de nacimiento es noviembre y el compañero tiene 16 años.
$(2 \cdot 11 + 5) \cdot 50 + 16 - 250 = 1\,116$

82 **MATEMÁTICAS Y... FÍSICA.** Se deja caer una pelota desde 20 m de altura. Por la acción de la gravedad, la altura y varía en función del tiempo t medido en segundos según la siguiente fórmula.

$$y = 20 - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8t^2$$

a) Determina la altura de la pelota en los instantes $t = 0$, $t = 1$ y $t = 2$. ¿Qué significado tienen esos resultados?

b) ¿Tiene sentido considerar valores de t menores que 0?

c) ¿Cuántos segundos tarda la pelota en llegar al suelo?

d) ¿Qué resultado obtienes para $t = 4$? ¿Tiene sentido este resultado en la situación que se presenta?

a) $t = 0 \rightarrow y = 20 - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot 0^2 = 20$ m

$t = 1 \rightarrow y = 20 - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot 1^2 = 15{,}1$ m

$t = 2 \rightarrow y = 20 - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot 2^2 = 0{,}4$ m

La pelota cae desde 20 m de altura.

b) No, porque el tiempo es una magnitud que solo toma valores positivos.

c) $y = 0 \rightarrow 0 = 20 - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8t^2 \rightarrow$
$\rightarrow t = 2{,}02$ s

d) $t = 4 \rightarrow y = 20 - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot 4^2 =$
$= -58{,}4$ m

No tiene sentido en esta situación porque la pelota estaría por debajo del suelo.

83 En un supermercado el número de clientes atendidos por dependiente y hora está relacionado con su experiencia. Se ha estimado que ese número se puede calcular con:

$$C = \frac{40d}{d + 3}$$

donde d son los días que el dependiente lleva trabajando y C es el número de clientes atendidos en una hora.

a) ¿Cuántos clientes por hora atendería un dependiente que lleve trabajando dos días?

b) Un dependiente empieza a ser rentable cuando atiende a 32 clientes por hora. ¿Cuándo sucede eso?

c) Investiga lo que sucede con el número de clientes atendidos por dependientes que tienen mucha experiencia.

a) $d = 2 \rightarrow C = \frac{40 \cdot 2}{2 + 3} = 16$ clientes

b) $C = 32 \rightarrow 32 = \frac{40 \cdot d}{d + 3} \rightarrow$
$\rightarrow d = 12$ días

c) $d = 1\,000 \rightarrow C = \frac{40 \cdot 1\,000}{1\,000 + 3} =$
$= 39{,}88$ clientes

$d = 10\,000 \rightarrow C = \frac{40 \cdot 10\,000}{10\,000 + 3} =$
$= 39{,}89$ clientes

Podemos afirmar que por mucha experiencia que tenga un dependiente nunca podrá atender a más de 39 clientes.

3. Resuelve ecuaciones con polinomios y radicales

ACTIVIDADES FLASH

84 Comprueba si $x = -2$ es solución de estas ecuaciones.

a) $x^2 - 3x + 2 = 0$

b) $x^2 - 3x + 2 = 12$

c) $(x - 2)(x + 1) = 0$

d) $(x - 2)(x + 2) = 0$

e) $(x + 1)(x - 1) - 3 = 0$

f) $\dfrac{x^2 + 4}{2x} - 2x = 5$

a) $4 + 6 + 2 = 12 \neq 0$. No es solución.

b) $4 + 6 + 2 = 12$. Es solución.

c) $-4 \cdot (-1) = 4 \neq 0$. No es solución.

d) $(-4) \cdot 0 = 0$. Es solución.

e) $(-1) \cdot (-3) - 3 = 0$. Es solución.

f) $(-2) + 4 = 2 \neq 5$. No es solución.

85 Determina la solución de estas ecuaciones sin hacer su resolución.

a) $x^2 - 25 = 0$ d) $2x^2 + 2x = 0$

b) $x^2 + 9 = 18$ e) $(x + 2)^2 = 0$

c) $x^2 - 4x = 0$ f) $(x + 3)(x - 3) = 7$

a) $x_1 = 5$ $x_2 = -5$

b) $x_1 = 3$ $x_2 = -3$

c) $x_1 = 0$ $x_2 = 4$

d) $x_1 = 0$ $x_2 = -1$

e) $x = -2$ doble

f) $x_1 = 4$ $x_2 = -4$

86 Resuelve estas ecuaciones de segundo grado.

a) $3x^2 - 48 = 0$

b) $3x^2 - 48x = 0$

c) $3x^2 + 48 = 0$

d) $x^2 + 3x + 9 = 0$

e) $x^2 - 3x + 9 = 0$

f) $-3x^2 + 18x - 3 = 0$

g) $-3x^2 - 18x + 3 = 0$

h) $x^2 + x - 12 = 0$

a) $x^2 = 16 \rightarrow x_1 = -4$ $x_2 = 4$

b) $x(3x - 48) = 0 \rightarrow x_1 = 0$ $x_2 = 16$

c) $x^2 = -16 \rightarrow$ No tiene solución.

d) $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{-27}}{2} \rightarrow$ No tiene solución.

e) $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{-27}}{2} \rightarrow$ No tiene solución.

f) $x = \dfrac{-18 \pm \sqrt{288}}{-6} \rightarrow x_1 = 3 - 2\sqrt{2}$

$x_2 = 3 + 2\sqrt{2}$

g) $x = \dfrac{18 \pm \sqrt{360}}{-6} \rightarrow x_1 = -3 - \sqrt{10}$

$x_2 = -3 + \sqrt{10}$

h) $x^2 + x - 12 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-1 \pm 7}{2} \rightarrow$

$\rightarrow x_1 = 3$ $x_2 = -4$

87 Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado con denominadores.

a) $\dfrac{3x^2 - 1}{2} + \dfrac{x^2 - x}{3} - x^2 = 0$

b) $\dfrac{x - 2}{2} + 1 = \dfrac{3x^2 - 2x + 3}{3} + \dfrac{19x}{6}$

c) $\dfrac{x(x + 1) - 10}{5} = \dfrac{x^2 + 2x}{2} - 2$

d) $x^2 + \dfrac{11x - 5}{6} = \dfrac{2x^2 - 1}{3} + x$

a) $5x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x_1 = 1$ $x_2 = -\dfrac{3}{5}$

b) $x^2 + 2x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$ doble

c) $3x^2 + 8x = 0 \rightarrow x_1 = 0$ $x_2 = -\dfrac{8}{3}$

d) $2x^2 + 5x - 3 = 0 \rightarrow x_1 = \dfrac{1}{2}$ $x_2 = -3$

88 Halla el valor de k para que esta ecuación tenga por solución $x = 7$.

$$x^2 - 13x + k = 0$$

Para este valor de k, ¿cuál es la otra solución?

$x = 7 \rightarrow 7^2 - 13 \cdot 7 + k = 0 \rightarrow k = 42 \rightarrow$

$\rightarrow x_1 = 7$ $x_2 = 6$

89 Indica el número de soluciones de cada una de las siguientes ecuaciones.

a) $3x^2 - 4x + 5 = 0$
b) $12 - 2x^2 + 3x = 0$
c) $-x + x^2 - 3 = 0$
d) $6x - x^2 + 9 = 0$

a) $\Delta = 16 - 60 = -44$
No tiene solución.

b) $\Delta = 9 + 96 = 105$
Tiene dos soluciones.

c) $\Delta = 1 + 12 = 13$
Tiene dos soluciones.

d) $\Delta = 36 + 36 = 72$
Tiene dos soluciones.

90 Calcula k en cada caso.

a) $x^2 + kx + 25 = 0$ tiene una solución.
b) $x^2 - 4x + k = 0$ no tiene soluciones.
c) $kx^2 + 8x + 5 = 0$ tiene dos soluciones.

a) $\Delta = k^2 - 100 = 0 \rightarrow k = \pm 10$
b) $\Delta = 16 - 4k < 0 \rightarrow k > 4$
c) $\Delta = 64 - 20k > 0 \rightarrow k < \frac{16}{5}$

91 Halla los valores de m para los cuales:

a) $x^2 + mx + (2m - 3) = 0$ no tiene solución.
b) $x^2 + 6x + m^2 - 7 = 0$ tiene dos soluciones.

a) $\Delta = m^2 - 4(2m - 3) < 0 \rightarrow$
$\rightarrow m^2 - 8m + 12 < 0$

Resolvemos la ecuación.

$$m^2 - 8m + 12 = 0 \rightarrow \begin{cases} m_1 = 2 \\ m_2 = 6 \end{cases}$$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta.

$m = 0 \qquad m = 5 \qquad m = 10$

Si $m = 0 \rightarrow 0^2 - 8 \cdot 0 + 12 > 0 \rightarrow$
$\rightarrow (-\infty, 2)$ no es solución de la inecuación.

Si $m = 5 \rightarrow 5^2 - 8 \cdot 5 + 12 < 0 \rightarrow$
$\rightarrow (2, 6)$ es solución de la inecuación.

Si $m = 10 \rightarrow 10^2 - 8 \cdot 10 + 12 > 0 \rightarrow$
$\rightarrow (6, +\infty)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no son soluciones de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(2, 6)$.

b) $\Delta = 36 - 4(m^2 - 7) > 0 \rightarrow$
$\rightarrow -4m^2 + 64 > 0$

Resolvemos la ecuación.

$$-4m^2 + 64 = 0 \rightarrow \begin{cases} m_1 = -4 \\ m_2 = 4 \end{cases}$$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta.

$m = -10 \qquad m = 0 \qquad m = 10$

Si $m = -10 \rightarrow -4 \cdot (-10)^2 + 64 < 0 \rightarrow$
$\rightarrow (-\infty, -4)$ no es solución de la inecuación.

Si $m = 0 \rightarrow -4 \cdot 0^2 + 64 > 0 \rightarrow$
$\rightarrow (-4, 4)$ es solución de la inecuación.

Si $m = 10 \rightarrow -4 \cdot 10^2 + 64 < 0 \rightarrow$
$\rightarrow (4, +\infty)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no son soluciones de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-4, 4)$.

92 **INVESTIGA.** Considera la ecuación $x^2 + ax + a = 1$. ¿Para qué valores del parámetro a se tienen dos soluciones reales distintas?

$x^2 + ax + a - 1 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow \Delta = a^2 - 4a + 4 > 0$

Resolvemos la ecuación.
$a^2 - 4a + 4 = 0 \rightarrow a = 2$ doble.

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta.

$a = 0 \qquad a = 5$

Si $a = 0 \rightarrow 0^2 - 4 \cdot 0 + 4 > 0 \rightarrow$
$\rightarrow (-\infty, 2)$ es solución de la inecuación.

Si $a = 5 \rightarrow 5^2 - 4 \cdot 5 + 4 > 0 \rightarrow$
$\rightarrow (2, +\infty)$ es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no son soluciones de la inecuación.

Por tanto, la solución es $\mathbb{R} - \{2\}$.

93 **INVENTA.** Escribe en cada caso tres ecuaciones de segundo grado con estas soluciones.

a) $x_1 = 2, x_2 = -5$

b) $x_1 = -4, x_2 = 4$

c) $x_1 = 0, x_2 = -2$

d) $x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = -\frac{2}{3}$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $x^2 + 3x - 10 = 0$
$5x^2 + 15x - 50 = 0$
$-x^2 - 3x + 10 = 0$

b) $x^2 - 16 = 0$
$2x^2 - 32 = 0$
$-x^2 + 16 = 0$

c) $x^2 + 2x = 0$
$-x^2 - 2x = 0$
$-3x^2 - 6x = 0$

d) $x^2 + x + \frac{2}{9} = 0$
$9x^2 + 9x + 2 = 0$
$-x^2 - x - \frac{2}{9} = 0$

94 ¿Cuáles son los valores que deben tomar a y b para que la ecuación $ax^2 + bx - 30 = 0$ tenga las soluciones $x_1 = 5$ y $x_2 = -3$?

Sustituimos las dos soluciones en la ecuación y formamos un sistema donde las incógnitas son a y b.

$$\left.\begin{array}{r} 25a + 5b - 30 = 0 \\ 9a - 3b - 30 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\cdot 3} \\ \xrightarrow{\cdot 5} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \rightarrow 75a + 15b = 90 \\ \rightarrow 45a - 15b = 150 \\ \hline \quad 120a \qquad = 240 \rightarrow a = 2 \rightarrow b = -4 \end{array}$$

95 Sabiendo que la ecuación $2x^2 + 5x - 3 = 0$ tiene como soluciones x_1 y x_2, halla la ecuación que tiene como soluciones $\frac{1}{x_1}$ y $\frac{1}{x_2}$.

Hallamos las soluciones de la ecuación.

$x_1 = -3 \qquad x_2 = \frac{1}{2}$

Una ecuación que tiene por soluciones $x_1 = -\frac{1}{3}$ y $x_2 = 2$ es:

$$3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 2) = 0 \rightarrow 3x^2 - 5x - 2 = 0$$

96 Di, sin resolverlas, cuál es la suma y el producto de las raíces de las siguientes ecuaciones, y luego calcúlalas para comprobarlo.

a) $x^2 + 5x - 14 = 0$

b) $x^2 + x = 0$

c) $6x^2 + 13x - 5 = 0$

d) $9x^2 + 9x - 10 = 0$

e) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

f) $10x^2 + 3x - 1 = 0$

Partimos de una ecuación de segundo grado cuyas soluciones son a y b.

$(x - a)(x - b) = 0 \rightarrow$
$\rightarrow x^2 - ax - bx + ab = 0 \rightarrow$
$\rightarrow x^2 - (a + b)x + ab = 0$

a) El producto de las raíces es -14 y la suma es -5.
Las raíces son $x_1 = -7$ y $x_2 = 2$.

b) El producto de las raíces es 0 y la suma es -1.
Las raíces son $x_1 = -1$ y $x_2 = 0$.

c) El producto de las raíces es $-\frac{5}{6}$ y la suma es $-\frac{13}{6}$.
Las raíces son $x_1 = -\frac{5}{2}$ y $x_2 = \frac{1}{3}$.

d) El producto de las raíces es $-\frac{10}{9}$ y la suma es -1.
Las raíces son $x_1 = -\frac{5}{3}$ y $x_2 = \frac{2}{3}$.

e) El producto de las raíces es $\frac{1}{4}$ y la suma es 1.
La raíz es $x = \frac{1}{2}$.

f) El producto de las raíces es $-\frac{1}{10}$ y la suma es $-\frac{3}{10}$.
Las raíces son $x_1 = -\frac{1}{2}$ y $x_2 = \frac{1}{5}$.

97 La suma de las soluciones de una ecuación de segundo grado es 4 y su producto es -21.

a) Escribe la ecuación correspondiente.

b) Determina dichas soluciones.

a) $x(4 - x) = -21$

b) $-x^2 + 4x + 21 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 21}}{2 \cdot (-1)} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 7 \end{cases}$$

98 ●●○ En la ecuación $x^2 + mx - 16 = 0$, ¿qué valor debe tomar el parámetro m para que las soluciones sean opuestas?

Para que las soluciones sean opuestas, la ecuación debe ser incompleta sin término de primer grado, por tanto, $m = 0$.

99 ●●○ Dada la ecuación $x^2 + mx + n = 0$, ¿qué condición tienen que cumplir m y n para que el producto de las raíces sea doble que su suma?

La suma de las dos raíces es $-m$ y el producto de las soluciones es n, por tanto, $n = -2m$.

100 ●●● **RETO.** Halla el valor de m y las soluciones de la ecuación $x^2 - 10x + m = 0$, si la suma de los cuadrados de sus soluciones es 68.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 10 \\ x_1^2 + x_2^2 = 68 \end{array}\right\} \rightarrow x_1 = 2 \qquad x_2 = 8$$

Por tanto, $m = 2 \cdot 8 = 16$.

101 ●●○ **INVESTIGA.** ¿Cuál es la relación entre la diferencia de las soluciones de una ecuación de segundo grado y sus coeficientes? Determina la ecuación cuya diferencia entre sus soluciones es 2 y su producto es -1.

$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}$$

La diferencia entre sus soluciones es:

$$x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 = \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a} \\ -1 = \dfrac{c}{a} \end{array}\right\} \rightarrow c = -a \rightarrow$$

$$\rightarrow 2a = \sqrt{b^2 + 4a^2} \rightarrow b = 0$$

Luego a puede ser cualquier valor positivo, por tanto, si $a = 1$, $c = -1$, $b = 0$, entonces, una ecuación que cumple las condiciones es: $x^2 - 1 = 0$.

102 ●●○ En la ecuación $x^2 - (5 + m)x + n = 0$, la suma de las raíces vale -2 y su diferencia es 8. Calcula el valor de m y n y escribe la ecuación.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 - x_2 = 8 \end{array}\right\} \rightarrow x_1 = 3 \qquad x_2 = -5$$

Por tanto: $\begin{cases} 5 + m = -2 \rightarrow m = -7 \\ n = -15 \end{cases}$

103 ●○○ Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas.

a) $25x^4 - 101x^2 + 4 = 0$

b) $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$

c) $3x^4 - 30x^2 + 27 = 0$

d) $9(1 - x^2)(1 + x^2) + 80x^2 = 0$

a) $25z^2 - 101z + 4 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow z = \frac{101 \pm 99}{50} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} z_1 = 4 \rightarrow x_1 = 2 \qquad x_2 = -2 \\ z_2 = \dfrac{1}{25} \rightarrow x_3 = \dfrac{1}{5} \qquad x_4 = -\dfrac{1}{5} \end{cases}$$

b) $z^2 - 25z + 144 = 0 \rightarrow z = \dfrac{25 \pm 7}{2} \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} z_1 = 16 \rightarrow x_1 = 4 \qquad x_2 = -4 \\ z_2 = 9 \rightarrow x_3 = 3 \qquad x_4 = -3 \end{cases}$$

c) $3z^2 - 30z + 27 = 0 \rightarrow z = \dfrac{30 \pm 24}{6} \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} z_1 = 9 \rightarrow x_1 = 3 \qquad x_2 = -3 \\ z_2 = 1 \rightarrow x_3 = 1 \qquad x_4 = -1 \end{cases}$$

d) $-9z^2 + 80z + 9 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow z = \dfrac{-80 \pm 82}{-18} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} z_1 = 9 \rightarrow x_1 = 3 \qquad x_2 = -3 \\ z_2 = -\dfrac{1}{9} \rightarrow \text{No tiene solución.} \end{cases}$

104 Encuentra las soluciones de las ecuaciones que aparecen a continuación.

a) $\dfrac{x^3 - x}{x^2 - 1} - \dfrac{1}{4x} = 0$

b) $1 - \dfrac{18}{x^2} + \dfrac{81}{x^4} = 0$

c) $\dfrac{1 - x^2}{x} + \dfrac{3x + 1}{4} + \dfrac{1}{6} = 0$

d) $\dfrac{x^2 + 4}{x} + \dfrac{1 - 4x}{3} + \dfrac{8}{15} = 0$

e) $\dfrac{2 - x}{2x} = \dfrac{5}{6} - \dfrac{3x^2 - 2x}{3x}$

a) $4x(x^3 - x) - (x^2 - 1) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

$25z^2 - 101z + 4 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow z = \dfrac{101 \pm 99}{50} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} z_1 = 4 \rightarrow x_1 = 2 \qquad x_2 = -2 \\ z_2 = \dfrac{1}{25} \rightarrow x_3 = \dfrac{1}{5} \qquad x_4 = -\dfrac{1}{5} \end{cases}$

$z = x^2 \rightarrow 4z^2 - 5z + 1 \rightarrow \begin{cases} z_1 = 1 \\ z_2 = \dfrac{1}{4} \end{cases}$

$z_1 = 1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

$z_2 = \dfrac{1}{4} \rightarrow \begin{cases} x_3 = \dfrac{1}{2} \\ x_4 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Las soluciones $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$ no son válidas pues anulan un denominador en la ecuación.

b) $x^4 - 18x^2 + 81 = 0$

$z = x^2 \rightarrow z^2 - 18z + 81 \rightarrow z = 9 \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{cases}$

c) $-3x^2 + 5x + 12 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = \dfrac{-5 \pm 13}{-6} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$

d) $-5x^2 + 13x + 60 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = \dfrac{-13 \pm 37}{-10} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -\dfrac{12}{5} \end{cases}$

e) $x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x = 1$

105 Resuelve las ecuaciones con fracciones algebraicas que aparecen a continuación.

a) $\dfrac{x + 4}{4x + 7} = \dfrac{x - 3}{x^2 - x - 6}$

b) $\dfrac{x + 1}{2x - 1} - \dfrac{7}{4x^2 - 1} = \dfrac{x}{2x + 1}$

c) $\dfrac{4}{x^2 - 1} + 1 = \dfrac{x}{x + 1}$

d) $\dfrac{1}{x + 3} - \dfrac{1}{x - 3} = \dfrac{1}{x^2 - 9}$

e) $\dfrac{x^2 + 1}{x} - x = \dfrac{7x^2 - 7 - 6x}{6x^2 - 6}$

a) $(x + 4)(x^2 - x - 6) = (4x + 7)(x - 3) \rightarrow$

$\rightarrow x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

La única solución válida es $x = -1$, pues $x = 3$ se descarta por anular el segundo denominador.

b) $\dfrac{2x^2 + 3x + 1}{4x^2 - 1} - \dfrac{7}{4x^2 - 1} = \dfrac{2x^2 - x}{4x^2 - 1} \rightarrow$

$\rightarrow 4x - 6 = 0 \rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

c) $\dfrac{4}{x^2 - 1} + \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 1} = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1} \rightarrow$

$\rightarrow 3 + x = 0 \rightarrow x = -3$

d) $\dfrac{x - 3}{x^2 - 9} - \dfrac{x + 3}{x^2 - 9} = \dfrac{1}{x^2 - 9} \rightarrow$

$\rightarrow -7 = 0 \rightarrow$ No tiene solución.

e) $\dfrac{6x^4 - 6}{6x(x^2 - 1)} - \dfrac{6x^4 - 6x^2}{6x(x^2 - 1)} =$

$= \dfrac{7x^3 - 6x^2 - 7x}{6x(x^2 - 1)} \rightarrow$

$\rightarrow 7x^3 - 12x^2 - 7x + 6 = 0 \rightarrow x_1 = 2$

$x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{22}}{7} \qquad x_3 = \dfrac{-1+\sqrt{22}}{7}$

106 ●●○ **INVENTA.** Escribe un polinomio $P(x)$ de grado 1 tal que $x = 3$ sea solución de la ecuación

$$\frac{P(x)}{x+4} + 1 = \frac{x+3}{-x+6}.$$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$\dfrac{P(3)}{7} + 1 = \dfrac{6}{3} \rightarrow P(3) = 7 \rightarrow P(x) = x + 4$

107 ●●○ Obtén las soluciones de las ecuaciones.

a) $\dfrac{2x(x^3-7x)}{2x^2-12} = 6$

b) $3x^2(x^2-2) = \dfrac{x^2-2}{3}$

c) $8x + \dfrac{12}{x} = \dfrac{20}{x^3}$

d) $\dfrac{9}{2x^2} = 1 - 3x^2$

e) $\dfrac{x^3+x^2}{3} + x\dfrac{x+1}{6} = x + 1$

f) $3x^2\left(4 + \dfrac{7}{x}\right) = \dfrac{6(17x-4)}{x}$

g) $\dfrac{3}{x+1} + \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{2}$

h) $\dfrac{2x^2(x-2)+4x}{x^2+1} = 3$

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow z^2 - 13z + 36 = 0 \rightarrow x = \dfrac{13 \pm 5}{2} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} z_1 = 9 \rightarrow x_1 = 3 & x_2 = -3 \\ z_2 = 4 \rightarrow x_3 = 2 & x_4 = -2 \end{cases}$

b) $9x^4 - 19x^2 + 2 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 9z^2 - 19z + 2 = 0 \rightarrow x = \dfrac{19 \pm 17}{18} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} z_1 = 2 \rightarrow x_1 = \sqrt{2} & x_2 = -\sqrt{2} \\ z_2 = \dfrac{1}{9} \rightarrow x_3 = \dfrac{1}{3} & x_4 = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$

c) $2x^4 + 3x^2 - 5 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 2z^2 + 3z - 5 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-3 \pm 7}{4} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} z_1 = 1 \rightarrow x_1 = 1 & x_2 = -1 \\ z_2 = -\dfrac{5}{2} \rightarrow \text{No tiene solución.} \end{cases}$

d) $6x^4 - 2x^2 + 9 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 6z^2 - 2z + 9 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{-212}}{12} \rightarrow$

$\rightarrow$ No tiene solución.

e) $2x^3 + 3x^2 - 5x - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

f) $12x^3 + 21x^2 - 102x + 24 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = \dfrac{1}{4} \\ x_3 = 2 \end{cases}$

g) $-5x^3 + 8x^2 + 3x + 2 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow$ Tiene una única solución $x = 2$.

h) Tiene una única solución $x = 3$.

108 ●●○ Copia y completa las siguientes ecuaciones escribiendo un número en el segundo miembro de manera que tengan la solución indicada.

a) $\sqrt{x+7} - 2\sqrt{4x+1} = \blacksquare$

Solución: $x = 2$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x+5}} = \blacksquare - \dfrac{1}{\sqrt{4x}}$

Solución: $x = 4$

a) $\sqrt{x+7} - 2\sqrt{4x+1} = -3$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x+5}} = \dfrac{13}{12} - \dfrac{1}{\sqrt{4x}}$

109 ●○○ Halla las soluciones de estas ecuaciones con radicales.

a) $\sqrt{6x-2} = 4$

b) $\sqrt{6x-8} = x$

c) $\sqrt{x^2+9} - 1 = x$

d) $\sqrt{2x^2+7x-5} = x + 1$

a) $6x - 2 = 16 \rightarrow 6x - 18 = 0 \rightarrow x = 3$

b) $6x - 8 = x^2 \rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x_1 = 2 \qquad x_2 = 4$

c) $x^2 + 9 = x^2 + 2x + 1 \rightarrow$
$\rightarrow 2x - 8 = 0 \rightarrow x = 4$

d) $x^2 + 5x - 6 = 0 \rightarrow x_1 = -6 \qquad x_2 = 1$
La única solución válida es $x = 1$.

110 Resuelve estas ecuaciones con radicales.

a) $\sqrt{2x - 10} = 5\sqrt{x - 10}$

b) $\sqrt{x + 2} - \sqrt{x + 3} = 5$

c) $\sqrt{4x - 11} = 7\sqrt{2x - 29}$

d) $\sqrt{x + 3} - \sqrt{x + 1} = 3$

a) $2x - 10 = 25(x - 10) \rightarrow$
$\rightarrow 23x - 240 = 0 \rightarrow x = \dfrac{240}{23}$

b) $x + 2 = x + 10\sqrt{x + 3} + 28 \rightarrow$
$\rightarrow x - \dfrac{94}{25} = 0 \rightarrow x = \dfrac{94}{25}$
No es solución.

c) $4x - 11 = 49(2x - 29) \rightarrow$
$\rightarrow 94x - 1\,410 = 0 \rightarrow x = 15$

d) $x + 3 = x + 6\sqrt{x + 1} + 10 \rightarrow$
$\rightarrow x - \dfrac{13}{36} = 0 \rightarrow x = \dfrac{13}{36}$
No es solución.

111 Resuelve y comprueba las soluciones.

a) $x + \sqrt{2x + 3} = 6$

b) $2\sqrt{3x + 1} - 2x + 2 = 0$

c) $\dfrac{\sqrt{2x - 2}}{x - 5} = 1$

d) $\sqrt{x + 2} - \sqrt{x - 6} - 2 = 0$

a) $\sqrt{2x + 3} = 6 - x \rightarrow$
$\rightarrow x^2 - 14x + 33 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow x_1 = 11 \qquad x_2 = 3$
La única solución válida es $x = 3$.

b) $\sqrt{3x + 1} = x - 1 \rightarrow x^2 - 5x = 0 \rightarrow$
$\rightarrow x_1 = 0 \qquad x_2 = 5$
La única solución válida es $x = 5$.

c) $\sqrt{2x - 2} = x - 5 \rightarrow$
$\rightarrow x^2 - 12x + 27 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow x_1 = 9 \qquad x_2 = 3$
La única solución válida es $x = 9$.

d) $\sqrt{x + 2} = 2 + \sqrt{x - 6} \rightarrow$
$\rightarrow 1 = \sqrt{x - 6} \rightarrow x = 7$

112 Determina las soluciones de estas ecuaciones.

a) $2\sqrt{x + 1} - 3\sqrt{4x - 3} - 5 = 0$

b) $\sqrt{3x - 2} - \sqrt{x - 2} = 2$

c) $\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x + 8} = 0$

d) $\dfrac{3}{1 + \sqrt{x}} = \dfrac{5 - \sqrt{x}}{3}$

e) $\sqrt{2x - 2} - \sqrt{x - 5} + 1 = 0$

a) $2\sqrt{x + 1} = 5 + 3\sqrt{4x - 3} \rightarrow$
$\rightarrow -32x + 6 = 30\sqrt{4x - 3} \rightarrow$
$\rightarrow 64x^2 - 249x + 171 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = \dfrac{57}{64} \end{cases}$
Ninguna de las soluciones es válida.

b) $\sqrt{3x - 2} = 2 + \sqrt{x - 2} \rightarrow$
$\rightarrow x - 2 = 2\sqrt{x - 2} \rightarrow$
$\rightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 2 \end{cases}$
Ambas soluciones son válidas.

c) $\sqrt{x^2 + 3x} = \sqrt{x + 8} \rightarrow$
$\rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow x_1 = 2 \qquad x_2 = -4$
Ambas soluciones son válidas.

d) $9 = \left(1 + \sqrt{x}\right)\left(5 - \sqrt{x}\right) \rightarrow$
$\rightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \rightarrow x = 4$
Es una solución válida.

e) $\sqrt{2x - 2} = \sqrt{x - 5} - 1 \rightarrow$
$\rightarrow x + 2 = -2\sqrt{x - 5} \rightarrow$
$\rightarrow x^2 + 24 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow$ No tiene solución.

113 Calcula las soluciones de las siguientes ecuaciones.

a) $(x^2 - 4)(x^2 - 3x + 2) = 0$

b) $(x^2 - x)(x^2 + 16) = 0$

c) $(x - 1)(x^2 + 4)(x^2 - 9) = 0$

d) $(x^2 - 4x - 5)(x^2 - 2x - 8) = 0$

a) $(x - 1)(x + 2)(x - 2)^2 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow x_1 = -2 \qquad x_2 = 1 \qquad x_3 = 2$

b) $x(x-1)(x^2+16)=0 \rightarrow$
$\rightarrow x_1 = 0 \qquad x_2 = 1$

c) $(x-1)(x-3)(x+3)(x^2+4)=0 \rightarrow$
$\rightarrow x_1 = -3$
$x_2 = 1$
$x_3 = 3$

d) $(x+1)(x+2)(x-5)(x-4)=0 \rightarrow$
$\rightarrow x_1 = -2$
$x_2 = -1$
$x_3 = 4$
$x_4 = 5$

114 Resuelve las ecuaciones que aparecen a continuación.

a) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$
b) $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$
c) $x^5 + x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 4x + 4 = 0$
d) $x^3 - 7x^2 + 4x - 28 = 0$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -6 & 11 & -6 \\
1 & & 1 & -5 & 6 \\ \hline
 & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} \\
2 & & 2 & -6 & \\ \hline
 & 1 & -3 & \boxed{0} & \\
3 & & 3 & & \\ \hline
 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

Las raíces enteras son {1, 2, 3}.

b)
$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -3 & -13 & 15 \\
1 & & 1 & -2 & -15 \\ \hline
 & 1 & -2 & -15 & \boxed{0} \\
5 & & 5 & 15 & \\ \hline
 & 1 & 3 & \boxed{0} & \\
-3 & & -3 & & \\ \hline
 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

Las raíces enteras son {−3, 1, 5}.

c)
$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 1 & 1 & -5 & -5 & 4 & 4 \\
1 & & 1 & 2 & -3 & -8 & -4 \\ \hline
 & 1 & 2 & -3 & -8 & -4 & \boxed{0} \\
-1 & & -1 & -1 & 4 & 4 & \\ \hline
 & 1 & 1 & -4 & -4 & \boxed{0} & \\
2 & & 2 & 6 & 4 & & \\ \hline
 & 1 & 3 & 2 & \boxed{0} & & \\
-2 & & -2 & -2 & & & \\ \hline
 & 1 & 1 & \boxed{0} & & & \\
-1 & & -1 & & & & \\ \hline
 & 1 & \boxed{0} & & & &
\end{array}$$

Las raíces enteras son {−2, −1, 1, 2}.

d)
$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -7 & 4 & -28 \\
7 & & 7 & 0 & 28 \\ \hline
 & 1 & 0 & 4 & \boxed{0}
\end{array}$$

$x + 4 = 0$ no tiene soluciones reales, por tanto, la única raíz entera es $x = 7$.

115 Halla las soluciones de estas ecuaciones.

a) $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$
b) $x^2(x+6) = 32$
c) $x^2(x^2+1) + 2x^3 + 36 = 12x(x+1)$
d) $2x^3 - 5x^2 - 14x + 8 = 0$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 4 & 1 & -6 \\
1 & & 1 & 5 & 6 \\ \hline
 & 1 & 5 & 6 & \boxed{0} \\
-2 & & -2 & -6 & \\ \hline
 & 1 & 3 & \boxed{0} & \\
-3 & & -3 & & \\ \hline
 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

$x_1 = -3 \qquad x_2 = -2 \qquad x_3 = 1$

b) $x^3 + 6x^2 - 32 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 6 & 0 & -32 \\
2 & & 2 & 16 & 32 \\ \hline
 & 1 & 8 & 16 & \boxed{32} \\
-4 & & -4 & -16 & \\ \hline
 & 1 & 4 & \boxed{0} & \\
-4 & & -4 & & \\ \hline
 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

$x_1 = -4 \qquad x_2 = 2$

c) $x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12x + 36 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 2 & -11 & -12 & 36 \\
2 & & 2 & 8 & -6 & -36 \\ \hline
 & 1 & 4 & -3 & -18 & \boxed{0} \\
2 & & 2 & 12 & 18 & \\ \hline
 & 1 & 6 & 9 & \boxed{0} & \\
-3 & & -3 & -9 & & \\ \hline
 & 1 & 3 & \boxed{0} & & \\
-3 & & -3 & & & \\ \hline
 & 1 & \boxed{0} & & &
\end{array}$$

$x_1 = -3 \qquad x_2 = 2$

d)
$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -5 & -14 & 8 \\
-2 & & -4 & 18 & -8 \\ \hline
 & 2 & -9 & 4 & \boxed{0} \\
4 & & 8 & -4 & \\ \hline
 & 2 & -1 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$2x - 1 = 0 \rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

$$x_1 = \frac{1}{2} \qquad x_2 = -2 \qquad x_3 = 4$$

116 Calcula las soluciones de estas ecuaciones.

●●○

a) $6x^3 - 7x^2 - x + 2 = 0$

b) $4x^3(x - 3) + 2x^2 + 30(x + 1) =$
$= 23x(x - 1)$

c) $x^4 + 3x^3 - 11x^2 + 2x = 0$

d) $x^2(x^2 - x - 6) = 3(x^2 - 3x)$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & -7 & -1 & 2 \\ 1 & & 6 & -1 & -2 \\ \hline & 6 & -1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

Resolvemos la ecuación $6x^2 - x - 2 = 0$.

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2)}}{2 \cdot 6} =$$

$$= \frac{1 \pm 7}{12} \rightarrow x_1 = -\frac{1}{2} \qquad x_2 = \frac{2}{3}$$

$$x_1 = -\frac{1}{2} \qquad x_2 = \frac{2}{3} \qquad x_3 = 1$$

b) $4x^4 - 12x^3 - 21x^2 + 53x + 30 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 4 & -12 & -21 & 53 & 30 \\ -2 & & -8 & 40 & -38 & -30 \\ \hline & 4 & -20 & 19 & 15 & \boxed{0} \\ 3 & & 12 & -24 & -15 & \\ \hline & 4 & -8 & -5 & \boxed{0} & \end{array}$$

Resolvemos la ecuación
$4x^2 - 8x - 5 = 0$.

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-5)}}{2 \cdot 4} =$$

$$= \frac{8 \pm 12}{8} \rightarrow x_1 = -\frac{1}{2} \qquad x_2 = \frac{5}{2}$$

$$x_1 = -\frac{1}{2} \qquad x_3 = \frac{5}{2}$$

$$x_2 = -2 \qquad x_4 = 3$$

c) $x(x^3 + 3x^2 - 11x + 2) = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -11 & 2 \\ 2 & & 2 & 10 & -2 \\ \hline & 1 & 5 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

Resolvemos la ecuación $x^2 + 5x - 1 = 0$.

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{29}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{29}}{2} \qquad x_3 = 0$$

$$x_2 = \frac{-5 + \sqrt{29}}{2} \qquad x_4 = 2$$

d) $x^2(x - 3)(x + 2) - 3x(x - 3) = 0 \rightarrow$
$\rightarrow x(x - 3)[x(x + 2) - 3] = 0$
$\rightarrow x(x - 3)(x^2 + 2x - 3) = 0 \rightarrow$
$\rightarrow x(x - 3)(x + 3)(x - 1) = 0 \rightarrow$
$\rightarrow x_1 = 0 \qquad x_3 = -3$
$x_2 = 3 \qquad x_4 = 1$

117 **INVENTA.** Escribe una ecuación en cada caso que cumpla las condiciones dadas.

●●○

a) Con soluciones los valores $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ y $x_3 = 3$.

b) De grado 3 y con una única solución real, que es $x = \frac{1}{2}$.

c) De grado 3 con dos soluciones reales siendo una la opuesta de la otra.

d) Una ecuación de grado 6 cuyas soluciones son $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{8}$ y $x_3 = \frac{1}{2}$.

e) De grado 3 con coeficientes enteros y siendo valores $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $x_2 = -3$ dos de sus soluciones.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $7(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0 \rightarrow$
$\rightarrow 7x^3 - 42x^2 + 77x - 42 = 0$

b) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{8} = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = 0$

c) Si dos de las soluciones son reales, entonces la tercera solución también será real.

$(x - 1)(x + 1)x = 0 \rightarrow x^3 - x = 0$

d) $\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 \left(x - \frac{1}{8}\right)^2 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$

e) Tomando como tercera solución

$x_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(x+3)=0 \rightarrow$$
$$\rightarrow 2x^3+6x^2-x-3=0$$

4. Resuelve ecuaciones logarítmicas y exponenciales

ACTIVIDADES FLASH

118 Calcula el valor de x.

a) $\log_3 x = 4$
b) $\log_5 x = 3$
c) $\log_2 x = -1$
d) $\log_{\frac{2}{3}} x = 4$
e) $\log x = 2$
f) $\log_7 x = 0$

a) $x = 3^4 = 81$
b) $x = 5^3 = 125$
c) $x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$
d) $x = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$
e) $x = 10^2 = 100$
f) $x = 7^0 = 1$

119 Halla cuánto vale x.

a) $\log_x 9 = 2$
b) $\log_x \frac{1}{9} = -2$
c) $\log_x 1 = 0$

a) $x^2 = 9 \rightarrow x = 3$
b) $x^{-2} = \frac{1}{9} = 3^{-2} \rightarrow x = 3$
c) $x^0 = 1 \rightarrow x \in (0, +\infty)$

120 Halla cuánto vale x.

a) $\log_3 9^x = 4$
b) $\log 2^x = \frac{3}{2}$
c) $\ln 3^x = -1$
d) $\log_2 4^{x+4} = -2$
e) $\log 2^{\frac{x}{2}} = \frac{3}{2}$
f) $\log_3 9^{x+3} = 3$
g) $\ln 3^{x+6} = 3$
h) $\log_3 27^{3x+4} = -2$
i) $\log_3 27^{2x-6} = 1$

a) $3^4 = 9^x \rightarrow 3^4 = 3^{2x} \rightarrow 4 = 2x \rightarrow$
$\rightarrow x = 2$

b) $x \cdot \log 2 = \frac{3}{2} \rightarrow x = \frac{\frac{3}{2}}{\log 2} \approx 4{,}983$

c) $x \cdot \ln 3 = -1 \rightarrow x \approx -0{,}9102$

d) $2^{-2} = 4^{x+4} \rightarrow 2^{-2} = 2^{2x+8} \rightarrow x = -5$

e) $\frac{x}{2} \cdot \log 2 = \frac{3}{2} \rightarrow x \approx 9{,}966$

f) $3^3 = 9^{x+3} \rightarrow 3 = 2x + 6 \rightarrow x = -\frac{3}{2}$

g) $(x + 6) \cdot \ln 3 = 3 \rightarrow x \approx -3{,}269$

h) $(3x + 4)\log_3 27 = -2 \rightarrow$
$\rightarrow 3x + 4 = -\frac{2}{3} \rightarrow x = -\frac{14}{9}$

i) $(2x - 6)\log_3 27 = 1 \rightarrow$
$\rightarrow 2x - 6 = \frac{1}{3} \rightarrow x = \frac{19}{6}$

121 Resuelve estas ecuaciones logarítmicas.

a) $\log x = -1 + \log 5$
b) $\log_5 x = 2 + \log_5 7$
c) $\log_2 x = 3 + \log_2 9$

a) $\log \frac{x}{5} = -1 \rightarrow \frac{x}{5} = \frac{1}{10} \rightarrow x = \frac{1}{2}$

b) $\log_5 \frac{x}{7} = 2 \rightarrow \frac{x}{7} = 25 \rightarrow x = 175$

c) $\log_2 \frac{x}{9} = 3 \rightarrow \frac{x}{9} = 8 \rightarrow x = 72$

122 Resuelve las ecuaciones.

a) $175\log (x^2 - 8) = 0$
b) $25\log_x x + \log x = 4$
c) $\log_3 x + \frac{1}{2}\log_3 (x + 1) = \log_3 (3x)$
d) $2\log (x - 2) = \log (x + 4)$
e) $\log (2x + 12) - \log (3x - 2) = \log 2$
f) $5\ln x - 4\ln x = \ln 3$

a) $\log(x^2 - 8) = 0 \rightarrow 1 = x^2 - 8 \rightarrow$
$\rightarrow x = 3 \qquad x = -3$
Ambas soluciones son válidas.

b) $25 \cdot 1 + \log x = 4 \rightarrow \log x = -21 \rightarrow$
$\rightarrow x = 10^{-21} = \dfrac{1}{10^{21}}$

c) $\log_3 x + \log_3 \sqrt{x+1} = \log_3 3x \rightarrow$
$\rightarrow x\sqrt{x+1} = 3x \rightarrow x = 8$

d) $\log(x-2)^2 = \log(x+4) \rightarrow$
$\rightarrow x^2 - 5x = 0 \rightarrow x_1 = 0 \qquad x_2 = 5$
La única solución válida es $x = 5$.

e) $\dfrac{2x+12}{3x-2} = 2 \rightarrow x = 4$

f) $\dfrac{x^5}{x^4} = 3 \rightarrow x = 3$

123 Halla el valor de x en las siguientes ecuaciones.

a) $\log_3 \sqrt{x-5} + \log_3 \sqrt{2x-3} = 1$

b) $\log_2 \sqrt{x} - \log_2 \sqrt[3]{x} = \dfrac{2}{3}$

a) $\dfrac{1}{2}\log_3 [(x-5)(2x-3)] = 1 \rightarrow$
$\rightarrow (x-5)(2x-3) = 9 \rightarrow$
$\rightarrow 2x^2 - 13x + 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

La única solución válida es $x_1 = 6$.

b) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} = 2^{\frac{2}{3}} \rightarrow x^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{2}{3}} \rightarrow$
$\rightarrow x = \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^6 = 16$

124 **INVESTIGA.** Da valores a A y B para que $x = 1$ sea solución de $\log(Ax + B) + \log(Bx + A) = \log(4x)$.

$\log(A+B) + \log(B+A) = 4 \rightarrow$
$\rightarrow (A+B)(B+A) = 4 \rightarrow (A+B)^2 = 4$

Hay dos posibilidades.

$A + B = 2 \rightarrow$ Hay infinitas soluciones.
Por ejemplo: $A = 1 \qquad B = 1$
$A + B = -2 \rightarrow$ Imposible porque no existen los logaritmos de números negativos.

125 Si $\log(xy^3) = 1$ y $\log(x^2y) = 1$, averigua cuánto vale $\log(xy)$.

$\left.\begin{array}{l} xy^3 = 10 \\ x^2y = 10 \end{array}\right\} \rightarrow y = \dfrac{10}{x^2} \rightarrow$

$\rightarrow x\left(\dfrac{10}{x^2}\right)^3 = 10 \rightarrow \dfrac{10^3}{x^5} = 10 \rightarrow$

$\rightarrow x = \sqrt[5]{100},\ y = \sqrt[5]{10} \rightarrow$

$\rightarrow \log(xy) = \log(10^{3/5}) = \dfrac{3}{5}$

126 **RETO.** Resuelve la siguiente ecuación: $\log_{x^2+2}(4 - 5x^2 - 6x^3) = 2$.

$(x^2+2)^2 = 4 - 5x^2 - 6x^3 \rightarrow$
$\rightarrow x^2(x^2 + 6x + 9) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -3 \end{cases}$

127 **INVESTIGA.** Halla el número de soluciones de la ecuación $x^2 - 2x + \log m = 0$ según los valores de m.

$\Delta = 4 - 4\log m$

Si $4 - 4\log m = 0 \rightarrow m = 10 \rightarrow$
$\rightarrow$ Tiene 1 solución.

Si $4 - 4\log m > 0 \rightarrow m > 10 \rightarrow$
$\rightarrow$ Tiene 2 soluciones.

Si $4 - 4\log m < 0 \rightarrow m < 10 \rightarrow$
$\rightarrow$ No tiene solución.

128 Halla cuánto vale x.

a) $8^x = 1024$
b) $3^{x^2} = 27$
c) $3^{x^2-6} = 27$
d) $10^{x-1} = 10^3$
e) $(3^x)^2 = 27$
f) $3^{x^2} + 18 = 27$
g) $2^{x^2-2x+1} = 1$
h) $7^{x-1} = 5$

a) $x = \dfrac{10}{3}$

b) $x_1 = \sqrt{3} \qquad x_2 = -\sqrt{3}$

c) $x_1 = 3 \qquad x_2 = -3$

d) $x = 4$

e) $x = \dfrac{3}{2}$

f) $x_1 = \sqrt{2} \qquad x_2 = -\sqrt{2}$

g) $x = 1$

h) $x \approx 1{,}827$

129 Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales.

a) $3 \cdot 27^{x-2} = 9^x$

b) $5^{x+4} = 125^{x-4}$

c) $\dfrac{1}{81^{6-x}} = 3^{4-x}$

d) $32^{2x-3} = 2^{x+3}$

e) $125^{x+2} = 5^{2x}$

f) $256^x = 4 \cdot 4^{2x-3}$

a) $3^{3x-6+1} = 3^{2x} \rightarrow 3x - 5 = 2x \rightarrow x = 5$

b) $x + 4 = 3x - 12 \rightarrow x = 8$

c) $3^{4(x-6)} = 3^{4-x} \rightarrow 4x - 24 = 4 - x \rightarrow$
$\rightarrow x = \dfrac{28}{5}$

d) $10x - 15 = x + 3 \rightarrow x = 2$

e) $3x + 6 = 2x \rightarrow x = -6$

f) $4^{4x} = 4^{2x-2} \rightarrow 2x = -2 \rightarrow x = -1$

130 Resuelve.

a) $5^{x-1} = 2 + \dfrac{3}{5^{x-2}}$

b) $\sqrt[2x-1]{216} = 6$

c) $2^{x-1} + \dfrac{1}{2^{x-3}} = 5$

d) $\sqrt{a^{5-x}} = a^{3-x}$

a) $\dfrac{5^x}{5} = 2 + \dfrac{3 \cdot 5^2}{5^x}$

Hacemos el cambio: $5^x = t$

$t^2 - 10t - 375 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} t = -15 \\ t = 25 \rightarrow 5^x = 25 \rightarrow x = 2 \end{cases}$

b) Aplicamos $\log_6$ en ambos miembros de la ecuación:

$\dfrac{1}{2x-1} \cdot 3 = 1 \rightarrow x = 2$

c) $\dfrac{2^x}{2} + \dfrac{8}{2^x} = 5$

Hacemos el cambio: $2^x = t$

$t^2 - 10t + 16 = 0 \rightarrow \begin{cases} t_1 = 8 \rightarrow x_1 = 3 \\ t_2 = 2 \rightarrow x_2 = 1 \end{cases}$

d) $a^{\frac{5-x}{2}} = a^{3-x} \rightarrow \dfrac{5-x}{2} = 3 - x \rightarrow$
$\rightarrow x = 1$

131 Resuelve estas ecuaciones exponenciales ayudándote de un cambio de variable.

a) $9^{2x} - 3 \cdot 9^x + 2 = 0$

b) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x} - 2 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^x = 35$

c) $7^{4x} - 3 \cdot 7^{3x} - 5 \cdot 7^{2x} + 13 \cdot 7^x + 6 = 0$

d) $\left(\dfrac{5}{6}\right)^{4x} - 2 \cdot \left(\dfrac{5}{6}\right)^x + 1 = 0$

a) $9^x = t \rightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \rightarrow 9^{x_1} = 1 \rightarrow x_1 = 0 \\ t_2 = 2 \rightarrow 9^{x_2} = 2 \rightarrow \end{cases}$

$\rightarrow x_2 = \dfrac{\log 2}{\log 9} \approx 0{,}3155$

b) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = t \rightarrow t^2 - 2t - 35 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} t_1 = -5 \rightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^{x_1} = -5 \rightarrow \text{No} \\ t_2 = 7 \rightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^{x_2} = 7 \rightarrow \end{cases}$

$\rightarrow x_2 = \dfrac{\log 7}{\log \dfrac{2}{3}} \approx -4{,}8$

c) $7^x = t \rightarrow t^4 - 3t^3 - 5t^2 + 13t + 6 = 0$

$\begin{cases} t_1 = -2 \rightarrow 7^{x_1} = -2 \rightarrow \text{No} \\ t_2 = 3 \rightarrow 7^{x_2} = 3 \rightarrow x_2 = \dfrac{\log 3}{\log 7} \approx 0{,}57 \\ t_3 = 1 - \sqrt{2} \rightarrow 7^{x_3} = 1 - \sqrt{2} \rightarrow \text{No} \\ t_4 = 1 + \sqrt{2} \rightarrow 7^{x_4} = 1 + \sqrt{2} \rightarrow \end{cases}$

$\rightarrow x_4 = \log_7\left(1 + \sqrt{2}\right) \approx 0{,}45$

d) $\left(\dfrac{5}{6}\right)^x = t \rightarrow t^4 - 2t + 1 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \rightarrow \left(\dfrac{5}{6}\right)^{x_1} = 1 \rightarrow x_1 = 0 \\ t_2 = 0{,}54369 \rightarrow \left(\dfrac{5}{6}\right)^{x_2} = 0{,}54369 \rightarrow \end{cases}$

$\rightarrow x_2 = \dfrac{\log 0{,}54369}{\log\left(\dfrac{5}{6}\right)} \approx 3{,}3423$

132 **INVESTIGA.** Si $P(x)$ es un polinomio de grado 2, y $x = 1$ y $x = -2$ son soluciones de $3^{P(x)} = 9^{P(x)}$, ¿cuánto vale $P(x)$?

$3^{P(x)} = 9^{P(x)} \rightarrow P(x) = 2P(x) \rightarrow P(x) = 0$

Por tanto, $x = 1$ y $x = 2$ son raíces de $P(x)$.

Respuesta abierta. Por ejemplo:
$P(x) = (x-1)(x+2) = x^2 + x - 2$

133 **RETO.** Si $9^y = 256$ y $4^x = 9$, averigua el valor de xy.

$9^y = 256 \rightarrow y = \dfrac{\log 256}{\log 9}$

$4^x = 9 \rightarrow x = \dfrac{\log 9}{\log 4}$

Por tanto,

$xy = \dfrac{\log 9}{\log 4} \cdot \dfrac{\log 256}{\log 9} = \dfrac{\log 256}{\log 4} = 4$

5. Resuelve inecuaciones de primer y segundo grado

ACTIVIDADES FLASH

134 Indica si $x = 0$ y $x = 2$ están entre las soluciones de estas ecuaciones.

a) $-x + 15 \leq 3 - 7x$

b) $x + 11 \geq 3 - 4x$

c) $-x - 13 \leq 3 + 7x$

d) $2x + 11 \geq 6 + 5x$

e) $x^2 + 8x + 7 < 0$

f) $x^2 + 1 > 2x - 3$

g) $x^2 + 3 > 4x - 1$

h) $5x + 3 \leq 2x^2$

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
$x = 0$	No	Sí	Sí	Sí	No	Sí	Sí	No
$x = 2$	No	Sí	Sí	No	No	Sí	No	No

135 Halla la solución de las inecuaciones siguientes.

a) $2x - 30 \leq 5x + 3$

b) $2x - 6 < 5x + 18$

c) $11 - 3x \leq 23$

d) $3(x-2) > 1 - 3(2x-3)$

e) $5(4-3x) + 3 \leq 1 + 3x$

f) $2(x-3) - 4(3-2x) > 0$

a) $-33 \leq 3x \rightarrow x \geq -11,\ x \in [-11, +\infty)$

b) $-24 < 3x \rightarrow x > -8,\ x \in (-8, +\infty)$

c) $-12 \leq 3x \rightarrow x \geq -4,\ x \in [-4, +\infty)$

d) $9x > 13 \rightarrow x > \dfrac{13}{9} \qquad x \in \left(\dfrac{13}{9}, +\infty\right)$

e) $22 \leq 18x \rightarrow x \geq \dfrac{11}{9} \qquad x \in \left[\dfrac{11}{9}, +\infty\right)$

f) $10x > 18 \rightarrow x > \dfrac{9}{5} \qquad x \in \left(\dfrac{9}{5}, +\infty\right)$

136 Encuentra la solución de las siguientes inecuaciones.

a) $\dfrac{x}{3} + 1 < \dfrac{3x}{4} + 3$

b) $\dfrac{3(x-1)}{2} + x \leq \dfrac{x}{3} + 5$

c) $\dfrac{x-1}{10} < \dfrac{x+2}{40} + \dfrac{x-2}{30}$

a) $4x + 12 < 9x + 36 \rightarrow -24 < 5x \rightarrow$
$\rightarrow x > -\dfrac{24}{5} \rightarrow x \in \left(-\dfrac{24}{5}, +\infty\right)$

b) $9x - 9 + 6x \leq 2x + 30 \rightarrow 13x \leq 39 \rightarrow$
$\rightarrow x \leq 3 \rightarrow x \in (-\infty, 3]$

c) $12x - 12 < 3x + 6 + 4x - 8 \rightarrow$
$\rightarrow 5x < 10 \rightarrow x < 2 \rightarrow x \in (-\infty, 2)$

137 ¿Cuál es la solución de estas inecuaciones?

a) $x^2 - x - 6 < 0$

b) $-x^2 - 2x + 8 < 0$

c) $2x^2 + 5x + 6 < 0$

d) $-x^2 + 3x - 4 < 0$

e) $2x^2 + 5x - 3 > 0$

f) $6x^2 + 31x + 18 \leq 0$

a) $x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta.

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow (-10)^2 + 10 - 6 > 0 \rightarrow$
$\rightarrow (-\infty, -2)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 0^2 - 0 - 6 < 0 \rightarrow$
$\rightarrow (-2, 3)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow 10^2 - 10 - 6 > 0 \rightarrow$
$\rightarrow (3, +\infty)$ no es solución de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-2, 3)$.

b) $-x^2 - 2x + 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta.

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow$
$\rightarrow -(-10)^2 - 2 \cdot (-10) + 8 < 0 \rightarrow$
$\rightarrow (-\infty, -4)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow -0^2 - 2 \cdot 0 + 8 > 0 \rightarrow$
$\rightarrow (-4, 2)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow$
$\rightarrow -10^2 - 2 \cdot 10 + 8 < 0 \rightarrow$
$\rightarrow (2, +\infty)$ es solución de la inecuación.

Por tanto, la solución es
$(-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$.

c) $2x^2 + 5x + 6 = 0$ no tiene solución real.

El primer miembro de la ecuación siempre toma valores positivos.

No tiene solución.

d) $-x^2 + 3x - 4 = 0$ no tiene solución real.

El primer miembro de la ecuación siempre toma valores negativos.

Es una identidad.

e) $2x^2 + 5x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta.

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow$
$\rightarrow 2 \cdot (-10)^2 + 5 \cdot (-10) - 3 > 0 \rightarrow$
$\rightarrow (-\infty, -3)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 2 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0 - 3 < 0 \rightarrow$
$\rightarrow \left(-3, \dfrac{1}{2}\right)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow$
$\rightarrow 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 - 3 > 0 \rightarrow$
$\rightarrow \left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$ es solución de la inecuación.

Por tanto, la solución es
$(-\infty, -3) \cup \left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$.

f) $6x^2 + 31x + 18 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{9}{2} \\ x_2 = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta.

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow 6(-10)^2 + 31 \cdot (-10) +$
$+ 18 > 0 \rightarrow \left(-\infty, -\dfrac{9}{2}\right)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = -1 \rightarrow$
$\rightarrow 6 \cdot (-1)^2 + 31 \cdot (-1) + 18 < 0 \rightarrow$
$\rightarrow \left(-\dfrac{9}{2}, -\dfrac{2}{3}\right)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 6 \cdot 0^2 + 31 \cdot 0 + 18 > 0 \rightarrow$
$\left(-\dfrac{2}{3}, +\infty\right)$ no es solución de la inecuación.

Por tanto, la solución es $\left[-\dfrac{9}{2}, -\dfrac{2}{3}\right]$.

138 ●●○ Resuelve las inecuaciones que aparecen a continuación.

a) $x^2 + 6x - 1 < 3x^2 + 3x - 6$
b) $2x^2 + 25x > x(x - 10)$
c) $x^2 - (2x + 1)(x - 1) \leq 7$
d) $(x - 1)^2 < (2x + 1)^2 - 10 - x$

a) $2x^2 - 3x - 5 > 0 \rightarrow x_1 = -1 \quad x_2 = \dfrac{5}{2}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta.

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow$
$\rightarrow 2(-10)^2 - 3(-10) - 5 = 225 > 0 \rightarrow$
$\rightarrow$ Cumple la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 2(0)^2 - 3(0) - 5 = -5 < 0 \rightarrow$
$\rightarrow$ No cumple la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow$
$\rightarrow 2(10)^2 - 3(10) - 5 = 165 > 0 \rightarrow$
$\rightarrow$ Cumple la inecuación.

Por tanto, la solución es

$$x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right).$$

b) $x^2 + 35x > 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -35 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta.

$x = -100$ $\quad x = -10$ $\quad x = 100$

Si $x = -100 \rightarrow$
$\rightarrow (-100)^2 + 35(-100) = 6\,500 > 0 \rightarrow$
$\rightarrow$ Cumple la inecuación.

Si $x = -10 \rightarrow$
$\rightarrow (-10)^2 + 35(-10) = -250 < 0 \rightarrow$
$\rightarrow$ No cumple la inecuación.

Si $x = 100 \rightarrow$
$\rightarrow (100)^2 + 35(100) = 13\,500 > 0 \rightarrow$
$\rightarrow$ Cumple la inecuación.

Por tanto, la solución es
$(-\infty, -35) \cup (0, +\infty)$.

c) $x^2 - x + 6 \geq 0$ no tiene solución real.

Entonces, o todos los puntos cumplen la inecuación o ninguno de ellos lo hace.

Por ejemplo, $x = 0$ cumple la inecuación.

Por tanto, la solución es $\mathbb{R}$.

d) $3x^2 + 5x - 10 > 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-5 + \sqrt{145}}{6} \\ x_2 = \dfrac{-5 - \sqrt{145}}{6} \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta.

$x = -10$ $\quad x = 0$ $\quad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow$
$\rightarrow 3 \cdot (-10)^2 + 5 \cdot (-10) - 10 > 0 \rightarrow$
$\rightarrow$ Cumple la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 3 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0 - 10 < 0 \rightarrow$
$\rightarrow$ No cumple la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 - 10 > 0 \rightarrow$
$\rightarrow$ Cumple la inecuación.

Por tanto, la solución es

$$x \in \left(-\infty, \frac{-5 - \sqrt{145}}{6}\right) \cup$$
$$\cup \left(\frac{-5 + \sqrt{145}}{6}, +\infty\right).$$

139 Determina las soluciones de estas inecuaciones.

a) $\dfrac{x + 2}{3} + \dfrac{x(x - 1)}{5} > 0$

b) $\dfrac{3x - 1}{2} - \dfrac{x - x^2}{3} + 1 < 0$

c) $x - \dfrac{1 - 2x}{3} - \dfrac{2x^2 + 1}{4} \geq 5$

d) $-3x - \dfrac{2x - 4}{2} + \dfrac{16x + x^2}{3} \geq 0$

e) $\dfrac{x - 1}{4} - \dfrac{x - x^2}{3} \geq \dfrac{2x^2 + 1}{3} - x$

a) $5x + 10 + 3x^2 - 3x > 0 \rightarrow$
$\rightarrow 3x^2 + 2x + 10 > 0$

El primer miembro de la inecuación es siempre positivo, por lo que siempre se cumple.

Por tanto, la solución es $\mathbb{R}$.

b) $9x - 3 - 2x + 2x^2 + 6 < 0 \rightarrow$
$\rightarrow 2x^2 + 7x + 3 < 0$

Resolvemos la ecuación.

$$2x^2 + 7x + 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta.

$x = -10$ $\quad x = 0$ $\quad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow$
$\rightarrow 2 \cdot (-10)^2 + 7 \cdot (-10) + 3 > 0 \rightarrow$
$\rightarrow (-\infty, -3)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = -1 \rightarrow$
$\rightarrow 2 \cdot (-1)^2 + 7 \cdot (-1) + 3 < 0 \rightarrow$
$\rightarrow \left(-3, -\dfrac{1}{2}\right)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 2 \cdot 0^2 + 7 \cdot 0 + 3 > 0 \rightarrow$
$\rightarrow \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ no es solución de la inecuación.

Por tanto, la solución es $\left(-3, -\frac{1}{2}\right)$.

c) $12x - 4 + 8x - 6x^2 - 3 \geq 60 \rightarrow$
$\rightarrow -6x^2 + 20x - 67 \geq 0$

La ecuación
$-6x^2 + 20x - 67 = 0$ no tiene solución real.

Como el primer miembro de la ecuación toma siempre valores negativos, la inecuación no tiene solución.

d) $x^2 + 4x + 6 > 0$

El primer miembro de la inecuación es siempre positivo, por lo que siempre se cumple.

Por tanto, la solución es $\mathbb{R}$.

e) $-4x^2 + 11x - 7 \geq 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{7}{4} \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta.

$x = 0 \qquad x = 1{,}5 \qquad x = 10$

Si $x = 0 \rightarrow -4 \cdot 0^2 + 11 \cdot 0 - 7 < 0 \rightarrow$
$\rightarrow$ No cumple la inecuación.

Si $x = 1{,}5 \rightarrow$
$\rightarrow -4 \cdot 1{,}5^2 + 11 \cdot 1{,}5 - 7 > 0 \rightarrow$
$\rightarrow$ Cumple la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow$
$\rightarrow -4 \cdot 10^2 + 11 \cdot 10 - 7 < 0 \rightarrow$
$\rightarrow$ No cumple la inecuación.

Por tanto, la solución es $\left[1, \frac{7}{4}\right]$.

140 ●●○ **INVENTA.** Escribe una inecuación de segundo grado cuya solución sea $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$.

Respuesta abierta. Por ejemplo:
$(x + 1)(x - 3) \geq 0 \rightarrow x^2 - 2x - 3 \geq 0$

141 ●●○ Resuelve estas inecuaciones que contienen fracciones algebraicas.

a) $\frac{x+3}{x-5} < 0$

b) $\frac{2x-3}{x+3} < 0$

c) $\frac{-4x+3}{2-3x} > 0$

d) $\frac{2x^2+x-1}{x+1} \leq x$

e) $\frac{x^2-3x}{x^2-4} > 0$

f) $\frac{-x+3}{2x^2-18} \geq 0$

a) $\left.\begin{matrix} x + 3 > 0 \\ x - 5 < 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} x > -3 \\ x < 5 \end{matrix}\right\}$

$(-3, 5)$

b) $\left.\begin{matrix} 2x - 3 < 0 \\ x + 3 > 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} x < \frac{3}{2} \\ x > -3 \end{matrix}\right\}$

$\left(-3, \frac{3}{2}\right)$

c) $\begin{cases} -4x - 3 > 0 \\ 2 - 3x > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < \frac{3}{4} \\ x < \frac{2}{3} \end{cases}$

O bien: $\begin{cases} -4x - 3 < 0 \\ 2 - 3x < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{4} \\ x > \frac{2}{3} \end{cases}$

$\left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$

d) $2x - 1 \leq x \rightarrow x \leq 1 \qquad x \neq 1$

$(-\infty, -1) \cup (-1, 1]$

e) $\begin{cases} x^2 - 3x > 0 \rightarrow (-\infty, 0) \cup (3, +\infty) \\ x^2 - 4 > 0 \rightarrow (-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \end{cases}$

O bien: $\begin{cases} x^2 - 3x < 0 \rightarrow (0, 3) \\ x^2 - 4 < 0 \rightarrow (-2, 2) \end{cases}$

$(-\infty, -2) \cup (0, 2) \cup (3, +\infty)$

f) $-\frac{1}{2(x+3)} \geq 0 \rightarrow x + 3 < 0$

$(-\infty, -3)$

142 ●●○ Determina para qué valores de x es posible realizar las operaciones indicadas.

a) $\sqrt{5 - 3x}$

b) $\log(2 - 5x)$

a) $5 - 3x \geq 0 \rightarrow 5 \geq 3x \rightarrow x \leq \frac{5}{3} \rightarrow$

$\rightarrow$ Se puede realizar la operación para valores de $x \in \left(-\infty, \frac{5}{3}\right]$.

b) $2 - 5x > 0 \rightarrow x < \frac{2}{5} \rightarrow$ Se puede realizar la operación para valores de $\left(-\infty, \frac{2}{5}\right)$.

143 **INVESTIGA.** ¿Cuál es el conjunto de todos los números reales x que cumplen la siguiente propiedad?

$$2^{4^x} < 4^{2^x}$$

Tomamos logaritmos en ambos miembros de la inecuación.

$\log 2^{4^x} < \log 4^{2^x} \rightarrow$

$\rightarrow 4^x \log 2 < 2^x \log 4 \rightarrow$

$\rightarrow \frac{4^x}{2^x} < \frac{\log 4}{\log 2} \rightarrow$

$\rightarrow 2^x < \frac{2 \log 2}{\log 2} \rightarrow$

$\rightarrow 2^x < 2 \rightarrow x < 1$

Por tanto, la propiedad se cumple para $x \in (-\infty, 1)$.

6. Resuelve problemas con ecuaciones e inecuaciones

144 Cada vez que una pelota cae al suelo, rebota y sube $\frac{2}{5}$ de la altura desde la que ha caído. Si en el cuarto salto se eleva 80 cm, averigua a qué altura se encontraba al inicio.

Sea x la altura desde la que se deja caer la pelota. Después del cuarto salto tendremos la siguiente ecuación:

$\left(\frac{2}{5}\right)^4 x = 0,8 \rightarrow x = 31,25$

Se deja caer desde una altura de 31,25 m.

145 Un comerciante compra melones a 40 céntimos el kilo y los vende a 60 céntimos el kilo. Halla cuántos kilogramos de melones compró si se le estropearon 10 kg y ganó 42 €.

Sea x los kilogramos de melones que compra, el beneficio que obtiene viene dado por la siguiente ecuación:

$60(x - 10) - 40x = 4\,200 \rightarrow x = 180$

Compró 180 kg de melones.

146 Carmen se dispone a invertir 100 000 €. En el banco le ofrecen dos productos: Fondo Tipo A, al 4 % de interés anual, y Fondo Riesgo B, al 6 % de interés anual. Invierte una parte en cada tipo de fondo y al cabo del año obtiene 4 500 € de intereses. ¿Cuánto adquirió de cada producto?

Sea x la cantidad en euros que invierte en el Fondo Tipo A, entonces $100\,000 - x$ será la cantidad que invierte en el fondo Riesgo B.

Los beneficios vienen dados por la siguiente ecuación.

$0,04 \cdot x + 0,06(100\,000 - x) = 4\,500 \rightarrow$

$\rightarrow x = 75\,000$

Por tanto, adquirió 75 000 euros en el Fondo Tipo A y 25 000 en el Fondo Riesgo B.

147 Una madre, para estimular a su hijo, le da 1 € por cada ejercicio que haga bien. Si le sale mal, este debe darle 50 céntimos. Después de 20 ejercicios, el hijo lleva ganados 15,50 €. ¿Cuántos ejercicios hizo bien?

Sean x el número de ejercicios que ha realizado mal. Entonces, $20 - x$ será el número de ejercicios bien resueltos. Como lleva ganados 15,50 €, se plantea y se resuelve la siguiente ecuación.

$(20 - x) - 0,5x = 15,50 \rightarrow$

$\rightarrow 20 - 1,5x = 15,5 \rightarrow$

$\rightarrow x = 1,5x = 4,5 \rightarrow x = 3$

Es decir, hizo 3 ejercicios mal y 17 bien.

148 Cuatro amigas llevan bollos de pan a un comedor social. Primero, las cuatro cogieron la misma cantidad de bollos, pero las tres mayores vieron que podían cargar más y cogieron además la mitad de lo que habían tomado. Después, las dos de mayor edad volvieron a aumentar su carga en un tercio de la que llevaban. Cuando ya se iban, la mayor de todas volvió a añadir una quinta parte más de lo que llevaba. Si entre las cuatro se llevaron en total 138 bollos, ¿cuántos transportó cada una?

Sea x la cantidad inicial de pan, que es igual para todas, la cantidad de pan que cada una lleva al final viene dada por los siguientes polinomios.

1.ª chica: $x + \frac{x}{2} + \frac{1}{3}\left(x + \frac{x}{2}\right) + \frac{1}{5}\left(x + \frac{x}{2} + \frac{1}{3}\left(x + \frac{x}{2}\right)\right)$

2.ª chica: $x + \frac{x}{2} + \frac{1}{3}\left(x + \frac{x}{2}\right)$

3.ª chica: $x + \frac{x}{2}$

4.ª chica: x

Luego, la cantidad total de pan viene dada por la ecuación:

$$4x + \frac{3x}{2} + \frac{2}{3}\left(x + \frac{x}{2}\right) + \frac{1}{5}\left(x + \frac{x}{2} + \frac{1}{3}\left(x + \frac{x}{2}\right)\right) = 138 \rightarrow$$
$$\rightarrow x = 20$$

La chica mayor transportó 48 bollos, la segunda, 40 bollos, la tercera, 30 bollos, y la más joven, 20 bollos.

Esta actividad puede utilizarse para trabajar el ODS 2, hambre cero.

INTERNET

149 **MATEMÁTICAS E… HISTORIA.** El carbono-14 es un isótopo que se utiliza para datar materia orgánica. La cantidad de carbono-14 que contiene la materia se reduce a la mitad cada 5 730 años. Si se encuentra un resto en el que queda el 30 % del carbono-14 que debería tener, ¿de hace cuántos años es ese resto?

Sea t al número de periodos de 5 730 años que transcurren, planteamos la siguiente ecuación.

$$0{,}5^t = 0{,}3 \rightarrow t = \frac{\ln 0{,}3}{\ln 0{,}5} \approx 1{,}73 \text{ periodos}$$

$$1{,}73 \cdot 5\,730 = 9\,912{,}9$$

El resto es de hace aproximadamente 9 913 años.

150 Si Max sube de tres en tres los escalones de una torre, tiene que dar 30 pasos menos que si los sube de dos en dos. ¿Cuántos escalones tiene la torre?

Sea x el número de escalones de la torre e y el número de pasos que da Max, planteamos el siguiente sistema.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x}{3} = y - 30 \\ \frac{x}{2} = y \end{array}\right\} \rightarrow \frac{x}{3} = \frac{x}{2} - 30 \rightarrow x = 180$$

La torre tiene 180 escalones.

151 **MATEMÁTICAS Y… FÍSICA.** El espacio, e, que se recorre a una cierta velocidad, v, en un espacio de tiempo, t, viene dado por la fórmula $e = v \cdot t$. Una persona ha tardado 30 min en ir y venir hasta el faro en bicicleta. A la ida llevaba una velocidad de 7 m/s, y a la vuelta, de 5 m/s, ¿cuál es la distancia hasta el faro?

Sea t el tiempo que tarda en hacer todo el recorrido y x la distancia al faro.

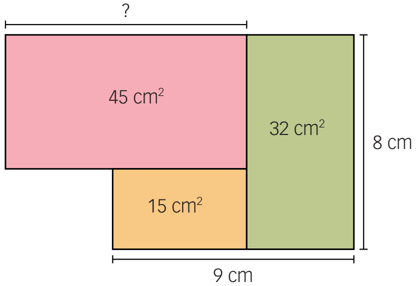
$7t = 5(1\,800 - t) \rightarrow t = 750$ s

Calculamos la distancia recorrida.

$7 \cdot 750 \cdot 2 = 10\,500$ m

La distancia hasta el faro es 10,5 km.

152 ●●○ **RETO.** Calcula la medida desconocida.



$A_{\text{verde}} = b \cdot h \rightarrow 32 = b \cdot 8 \rightarrow b = 4$ cm

$A_{\text{naranja}} = b \cdot h \rightarrow 15 = 5 \cdot h \rightarrow h = 3$ cm

$A_{\text{rosa}} = b \cdot h \rightarrow 45 = b \cdot 5 \rightarrow b = 9$ cm

Por tanto, la medida desconocida es 9 cm.

153 ●●● Una lancha recorre 50 metros por minuto al bajar un río y 20 metros por minuto al subirlo. ¿A qué distancia se puede bajar por el río si se dispone de 3 horas para la excursión y hay que volver al punto de partida?

Si t es el tiempo que se tarda en bajar en minutos, el tiempo que se tarda en subir será $180 - t$.

$50t = 20(180 - t) \rightarrow t \approx 51{,}43$ min

Por tanto, la distancia que se puede bajar en el río es 2 571,43 m.

154 ●●● **INVESTIGA.** En una botella se tiene un litro de zumo, y en otra, un litro de agua. De la primera a la segunda se transvasa una cucharada de zumo y, después, de la segunda a la primera se transvasa una cucharada de la mezcla obtenida. ¿Ahora, hay más agua en la primera botella o más zumo en la segunda?

La cantidad de agua que hay en la cucharada de mezcla que se pasa a la botella de zumo es menor que la cantidad de zumo que se ha pasado previamente a la botella de agua (que era una cucharada completa), luego habrá más zumo en la segunda botella que agua en la primera.

155 ●○○ La longitud del terreno de juego de un campo de fútbol es 40 m mayor que su anchura, y su superficie mide 6 825 m². ¿Cuáles son sus dimensiones?

Sea x el ancho del terreno de juego, su área viene dada por la siguiente ecuación:

$x\,(x + 40) = 6\,825 \rightarrow x = 65$ m

Las dimensiones del terreno de juego son 65 m de ancho y 105 m de largo.

156 ●●○ **RETO.** Halla tres números consecutivos que se correspondan con las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo.

Sea x el primer número, el segundo será $x + 1$, y el tercero, $x + 2$.

$$x^2 + (x + 1)^2 = (x + 2)^2 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Por tanto, los lados del triángulo miden 3, 4 y 5 unidades.

157 ●●○ **MATEMÁTICAS Y… BALONCESTO.** El espacio recorrido, e, por un objeto lanzado verticalmente hacia arriba, se obtiene mediante la expresión:

$$e = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

donde v_0 es la velocidad inicial del objeto, g es la aceleración de la gravedad ($g = 9{,}8$ m/s²) y t es el tiempo transcurrido.

Para iniciar un partido de baloncesto, el árbitro lanza verticalmente la pelota hacia arriba, entre dos jugadores, desde una altura de 48 cm y con una velocidad de 15 m/s.

a) ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzar 10 m?

b) ¿Llegará la pelota hasta los 20 m de altura?

c) ¿Cuánto tiempo tardará en volver a la misma altura desde donde se ha lanzado si no la toca nadie?

d) ¿Cuánto tardará en llegar al suelo si no la toca nadie?

Tomamos el sistema de referencia con origen el punto en el que se inicia el lanzamiento.

a) $9{,}52 = 15t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8t^2 \rightarrow \begin{cases} t_1 = 2{,}16 \\ t_2 = 0{,}9 \end{cases}$

El balón alcanza una altura de 10 m dos veces, cuando sube, a los 0,9 s, y cuando baja, a los 2,16 s.

b) $19{,}52 = 15t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8t^2 \rightarrow$ No tiene solución, por tanto, no alcanzará esa altura.

c) $0 = 15t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8t^2 \rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 3{,}06 \end{cases}$

El balón tardará 3,06 s en volver a la altura inicial.

d) $-0{,}48 = 15t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8t^2 \rightarrow \begin{cases} t_1 = 3{,}09 \\ t_2 = -0{,}03 \end{cases}$

El balón tardará 3,09 s en caer al suelo.

158 ●○○ Pedro tiene que poner moqueta en dos habitaciones cuadradas. La superficie que tiene que enmoquetar es de 67,25 m² y la longitud de la pared de una de las habitaciones es metro y medio más larga que la de la otra habitación. ¿Cuánto mide la pared de las habitaciones?

Sea x la longitud del lado de la habitación pequeña:

$x^2 + (x + 1{,}5)^2 = 67{,}25 \rightarrow x = 5$ m

La pared de la habitación pequeña mide 5 m, y la otra, 6,5 m.

159 ●○○ Encuentra un número positivo tal que dos veces su cuarta potencia más nueve veces su cuadrado sea igual a 68.

$2x^4 + 9x^2 = 68 \rightarrow 2t^2 + 9t - 68 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} t = 4 \rightarrow x = 2 \\ t = -\dfrac{17}{2} \rightarrow \text{No tiene solución.} \end{cases}$

El número es el 2.

160 ●●○ Si se aumenta en 4 cm la arista de un cubo, su volumen se multiplicaría por 8. Halla la medida de la arista.

Sea x la longitud en cm de la arista del cubo pequeño. Entonces, la arista del cubo grande medirá $x + 4$ cm. Como el volumen del cubo grande es 8 veces el del cubo pequeño, se tiene la siguiente ecuación:

$8x^3 = (x + 4)^3 \rightarrow$

$\rightarrow 8x^3 = x^3 + 12x^2 + 48 + 64 \rightarrow$

$\rightarrow 7x^3 - 12x^2 - 48 - 64 = 0 \rightarrow x = 4$

Luego, las aristas miden 4 cm y 8 cm, respectivamente.

161 ●○○ El triple de un número menos su mitad es mayor que 3. ¿Qué números cumplen esta propiedad?

$3x - \frac{x}{2} > 3 \rightarrow x \in \left(\frac{6}{5}, +\infty\right)$

162 ●○○ Un cateto de un triángulo rectángulo es 7 cm menor que el otro cateto. ¿Qué longitud tendrá el cateto menor si la hipotenusa mide al menos 13 cm?

$x^2 + (x + 7)^2 > 13^2 \rightarrow$

$\rightarrow 2x^2 + 14x - 120 > 0 \rightarrow x \in (5, +\infty)$

El cateto medirá más de 5 cm.

163 ●○○ ¿Es cierto que la suma de un número y de su cuadrado es siempre positiva? ¿Qué números cumplen esa condición?

Comprobamos si se cumple siempre la siguiente inecuación.

$x + x^2 > 0 \rightarrow x(x + 1) > 0 \rightarrow$
$\rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$

No se cumple siempre, solo cumplen la condición los números menores que -1 y los mayores que 0.

164 En una empresa que se dedica a la fabricación de recipientes de cristal se ha calculado que para fabricar un tipo de botella hay unos gastos fijos de 3 000 € y un gasto en materia prima de 1,50 € por botella. ¿Cuántas botellas se podrán producir con un gasto máximo de 7 000 €?

Sea x el número máximo de vasos que se podrá fabricar. Entonces, como el gasto máximo permitido es de 7 000 €, planteamos la siguiente inecuación.

$3\,000 + 1{,}5x \le 7\,000 \rightarrow 1{,}5x \le 4\,000 \rightarrow$
$\rightarrow x \le 2\,666{,}667$

Por tanto, como máximo se podrán producir 2 666 botellas.

165 Doblando 8 m de alambre se quiere formar un rectángulo. ¿Entre qué valores estará el área de ese rectángulo?

Como el alambre tiene una longitud de 8 m, el semiperímetro del rectángulo será de 4 m.

Si x es la base del rectángulo, entonces $4 - x$ será su altura, con $x \in (0, 4)$.

El área del rectángulo viene determinada por la expresión $A = x(4 - x) = 4x - x^2$, que es una parábola, cuya imagen para $x \in (0, 4)$ es el intervalo (0, 4].

Es decir, el área mínima es prácticamente nula, y el área máxima vale 4 m^2.

166 **MATEMÁTICAS Y... CONSUMO.** Las compañías eléctricas suelen ofertar tarifas con las que hay que pagar una parte fija y una proporcional al consumo.

- Tarifa A: 6,70 € cantidad fija más 0,18 € por kilovatio consumido.
- Tarifa B: 9,60 € cantidad fija más 0,13 € por kilovatio consumido.
- Tarifa C: 14 € cantidad fija más 0,09 € por kilovatio consumido.

a) ¿A partir de qué consumo la tarifa B es mejor que la A?

b) ¿Y la C mejor tarifa que la A?

c) ¿A partir de qué consumo la tarifa C es la mejor de todas?

Que una tarifa sea mejor que otra quiere decir que un cliente gaste menos con la primera tarifa que con la segunda.

Sea x el número de kWh consumidos, se tiene:

a) $6{,}70 + 0{,}18x > 9{,}60 + 0{,}13x \rightarrow$
$\rightarrow 5x > 290 \rightarrow x > 58$

Cuando se consuman más de 58 kWh, la tarifa B será más rentable que la tarifa A.

b) $6{,}70 + 0{,}18x > 14 + 0{,}09x \rightarrow$
$$\rightarrow 9x > 730 \rightarrow x > \frac{730}{9} \rightarrow x > 81{,}11$$

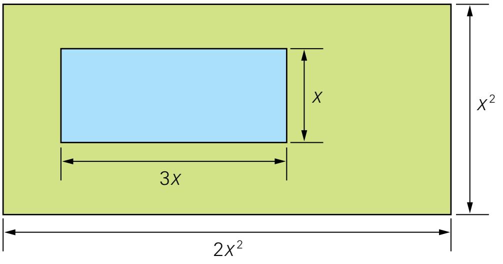
Cuando se consuman más de 81,11 kWh, la tarifa C será más rentable que la tarifa A.

c) $$\left.\begin{array}{l} 6{,}70 + 0{,}18x > 14 + 0{,}09x \\ 9{,}60 + 0{,}13x > 14 + 0{,}09x \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} 9x > 730 \\ 4x > 440 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x > 81{,}11 \\ x > 110 \end{array}\right\} \rightarrow x > 110$$

Cuando se consuman más de 110 kWh, la tarifa C será la más rentable de todas.

167 Para construir una piscina rectangular en un jardín se dibuja un esquema con las dimensiones del jardín y de la piscina. ¿Cuáles son las dimensiones de la piscina, si la diferencia de áreas entre el jardín y la piscina es de 135 m²?



Llamando x al lado menor de la piscina, se tiene:

$2x^4 - 3x^2 = 135 \rightarrow$

$\rightarrow 2x^4 - 3x^2 - 135 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 2z^2 - 3z - 135 = 0$

$$z = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-135)}}{2 \cdot 2} \rightarrow$$

$$\rightarrow z = \frac{3 \pm 33}{4} \rightarrow z_1 = -\frac{15}{2} \quad z_2 = 9$$

$$z_1 = -\frac{15}{2} \rightarrow x^2 = -\frac{15}{2} \rightarrow$$

$\rightarrow$ No tiene solución real.

$z_2 = 9 \rightarrow x_1 = -3 \quad x_2 = 3$

Se descarta $x_1 = -3$ como solución, pues la longitud tiene que ser positiva.

Por lo tanto, la piscina mide 9 m de largo y 3 m de ancho.

168 **RETO.** Jesús compró 12 botes de refresco, pagó con un billete de 10 € y le devolvieron una moneda de 2 € y otras monedas más. Beatriz compró 10 botes y recuerda que pagó la cantidad exacta con un billete de 5 €, una moneda de 2 € y alguna moneda más. Con estos datos, ¿qué podrías decir del precio del bote de refresco?

Jesús, se gastó menos de 8 euros, por tanto: $12x < 8 \rightarrow x < 0,\widehat{6}$

Beatriz se gastó más de 7 euros, por tanto: $10x > 7 \rightarrow x > 0,7$

Podemos deducir que el precio del bote de refresco es menor si se compra más cantidad.

FAKE NEWS

Asistencia masiva

La concentración ocupó toda la avenida Felipe VI, una avenida de 2 km de largo y 60 m de ancho, en la que se hicieron dos pasillos de seguridad de entre 5 m y 10 m de ancho y se vigiló que la densidad de asistentes no superase las 6 personas por metro cuadrado, tal y como marca la ley.

Según los convocantes, la asistencia fue masiva, más de un millón de personas. Las autoridades cifran en medio millón las personas que asistieron al acto.

Y tú, ¿qué opinas?

Si los pasillos miden 5 m de ancho, la superficie ocupada por la manifestación mediría:

$2\,000 \cdot 60 - (5 \cdot 2\,000 \cdot 2) = 100\,000$ m²

Y habría como máximo 600 000 asistentes.

Si los pasillos miden 10 m de ancho, la superficie ocupada por la manifestación mediría:

$2\,000 \cdot 60 - (10 \cdot 2\,000 \cdot 2) = 80\,000$ m²

Y habría como máximo 480 000 asistentes.

Por tanto, las autoridades han dado la cifra más próxima.

PROBLEMAS APARENTEMENTE DISTINTOS

169 Resuelve esta ecuación.

$$x\left(\frac{110}{2}-x\right)=750$$

$-2x^2+110x-1\,500=0 \rightarrow$
$\rightarrow \begin{cases} x_1=30 \\ x_2=25 \end{cases}$

170 Para cercar una parcela rectangular se utilizan 110 m de valla metálica. En el centro de la parcela hay una casa de 220 m² rodeada por 530 m² de jardín. ¿Cuáles son las dimensiones de la parcela?

La finca mide: $220+530=750$ m²

Sea x una de las dimensiones de la parcela, la otra medirá $\frac{110}{2}-x$ m².

$x\left(\frac{110}{2}-x\right)=750 \rightarrow$
$\rightarrow -2x^2+110x-1\,500=0 \rightarrow$
$\rightarrow \begin{cases} x_1=30 \\ x_2=25 \end{cases}$

Las dimensiones de la parcela son 25 m de ancho y 30 m de largo.

171 Resuelve la ecuación $100\cdot 1{,}2^x=10^6$ sabiendo que $\log 12=1{,}0792$.

$1{,}2^x=10\,000 \rightarrow$
$\rightarrow x\cdot\log 12=\log 10\,000 \rightarrow$
$\rightarrow x=\dfrac{4}{1{,}0792}=3{,}7064$

172 Hay 100 afectados por una enfermedad contagiosa y cada día el número de infectados aumenta un 20%. ¿Cuántos días transcurrirán hasta llegar a un millón de afectados si se mantiene el mismo incremento?

$100\cdot 1{,}2^t=1\,000\,000 \rightarrow 1{,}2^x=10\,000 \rightarrow$
$\rightarrow x\cdot\log 12=\log 10\,000 \rightarrow$
$\rightarrow x=\dfrac{4}{1{,}0792}=3{,}7064$

Transcurrirán 4 días.

173 Busca las soluciones comunes de estas inecuaciones.

$$x(24-x)\le 140$$
$$128\le x(24-x)$$

$x(24-x)\le 140 \rightarrow x^2-24x+140\ge 0 \rightarrow$
$\rightarrow x\in(-\infty, 10]\cup[14, +\infty)$

$128\le x(24-x) \rightarrow x^2-24x+128\le 0 \rightarrow$
$\rightarrow x\in[8, 16]$

Por tanto, la solución es $[8, 10]\cup[14, 16]$.

174 Se dispone de material para construir un recinto rectangular de 48 m de perímetro. ¿Qué medidas tendrá el recinto si se quiere que su área esté entre 128 m² y 140 m²?

Sea x una de las dimensiones, la otra será $24-x$.

$x(24-x)\le 140 \rightarrow x^2-24x+140\ge 0 \rightarrow$
$\rightarrow x\in(-\infty, 10]\cup[14, +\infty)$

$128\le x(24-x) \rightarrow x^2-24x+128\le 0 \rightarrow$
$\rightarrow x\in[8, 16]$

Por tanto, una de las medidas del recinto está entre 8 y 10 m y la otra entre 14 y 16 m.

¿PARA QUÉ SIRVE…?

1 ¿Qué ventajas tiene el uso del teléfono móvil frente al del teléfono fijo?

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Tiene las mismas características del fijo, pero con la ventaja de que se puede usar en cualquier parte. Además, incorpora otras muchas funciones.

2 Explica qué representan las variables M y N en la inecuación del texto.

M es la cantidad de minutos adicionales, a partir del primero en cada llamada, y N es el número de llamadas que se han realizado en un mes.

3 Plantea una inecuación similar a la del ejemplo para el plan C y fijando un consumo máximo de 42 €.

$9{,}68+0{,}0968(N+M)+0{,}1815N\le 42$

4 Una persona que solo utiliza el teléfono para llamar una vez al día a su familia, ¿cuántos minutos puede hablar por término medio cada día para que su consumo no supere los 40 € si tiene la tarifa B? ¿Y si tiene la tarifa E?

Si tiene la tarifa B:

si $N + M \leq 60$
$14{,}52 + 0{,}1815N \leq 40 \rightarrow N \leq 140{,}38$

si $N + M > 60$
$14{,}52 + 0{,}0726(N + M - 60) + 0{,}1815N \leq 40$

Como habla como máximo una vez al día, $N = 30$.

$14{,}52 + 0{,}0726(30 + M - 60) +$
$+ 0{,}1815 \cdot 30 \leq 40 \rightarrow M \leq 305{,}96$

Luego puede hablar de media cada día 10,1 min.

Si tiene la tarifa E:

si $N + M \leq 300$
$29{,}5 + 0{,}1815N \leq 40 \rightarrow N \leq 57{,}85$

si $N + M > 300$
$29{,}5 + 0{,}2124(N + M - 300) + 0{,}1815N \leq 40$

Como habla como máximo una vez al día, $N = 30$.

$29{,}5 + 0{,}2124(30 + M - 300) +$
$+ 0{,}1815 \cdot 30 \leq 40 \rightarrow M \leq 293{,}8$

Luego puede hablar de media cada día 9,7 min.

INTERNET

5 Detalla y compara tres ofertas diferentes de diversas compañías de telefonía móvil que estén en vigor en este momento.

Respuesta abierta