

ECUACIONES EXPONENCIALES

● Son ecuaciones en las que las incógnitas están en los exponentes.

a) $2^{x+3} = 16$

b) $5^{2x} = \frac{1}{5}$

c) $7^{2x-5} = \sqrt{7}$

d) $7 \cdot 2^{x-3} = 14$

e) $3^{2x+7} = 5$

f) $8^{2x} = 351$

g) $3^x + 3^{x+1} = 12$

h) $2^x + 2^{x-1} = 6$

RESOLUCIÓN

① Aplicando propiedades de potencias hay que tratar de dejar una única potencia en cada lado de la ecuación

② Si las potencias tienen la misma base, entonces igualamos los exponentes y resolvemos la ecuación resultante

③ Si las potencias tienen distinta base, aplicamos logaritmos en los dos lados y resolvemos la ecuación resultante

④ Si no podemos aplicar los pasos anteriores, realizamos un cambio de variable

EJEMPLOS

$$\begin{aligned} \text{a) } 2^{x+3} &= 16 \\ 2^{x+3} &= 2^4 \\ x+3 &= 4 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 5^{2x} &= 1 \\ 5^{2x} &= 5^{-1} \\ 2x &= -1 \\ x &= -1/2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 7^{2x-5} &= \sqrt{7} \\ 7^{2x-5} &= 7^{1/2} \\ 2x-5 &= 1/2 \\ 2x &= 5 + 1/2 \\ 2x &= 11/2 \\ x &= 11/4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } 7 \cdot 2^{x^2-3} &= 14 \Rightarrow 2^{x^2-3} = 14/7 \\ 2^{x^2-3} &= 2^1 \Rightarrow x^2-3=1 \Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow \\ \Rightarrow x &= \pm\sqrt{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } 3^{x+7} &= 5 \Rightarrow \log(3^{x+7}) = \log 5 \Rightarrow \\ (x+7) \cdot \log 3 &= \log 5 \Rightarrow x+7 = \frac{\log 5}{\log 3} \Rightarrow \\ \Rightarrow x &= \frac{\log 5}{\log 3} - 7 \Rightarrow x = -5.54 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } 8^{2x} &= 351 \rightarrow \log 8^{2x} = \log 351 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2x \cdot \log 8 &= \log 351 \Rightarrow 2x = \frac{\log 351}{\log 8} \Rightarrow \\ \Rightarrow x &= \left(\frac{\log 351}{\log 8} \right) : 2 = 1.41 \end{aligned}$$

$$g) 3^x + 3^{x+1} = 12 ; \begin{cases} 3^x = A \text{ (cambio)} \\ 3^{x+1} = 3^x \cdot 3^1 = A \cdot 3 = 3A \end{cases}$$

$$A + 3A = 12 \Rightarrow 4A = 12 \Rightarrow \underline{\underline{A = 3}}$$

DESHACER CAMBIO

$$3^x = 3 \Rightarrow 3^x = 3^1 \Rightarrow x = 1$$

$$h) 2^x + 2^{x-1} = 6 ; \begin{cases} 2^x = A \text{ (cambio)} \\ 2^{x-1} = \frac{2^x}{2^1} = \frac{A}{2} \end{cases}$$

$$A + \frac{A}{2} = 6 \Rightarrow \frac{2A}{2} + \frac{A}{2} = \frac{12}{2} \Rightarrow 2A + A = 12$$

$$\Rightarrow 3A = 12 \Rightarrow A = 4$$

DESHACER CAMBIO

$$2^x = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$$

ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Son ecuaciones en las que la incógnita está dentro de un logaritmo

a) $\log_2(x+3)=4$

b) $\log(2x+3)=1$

c) $\log x + \log 4x = 2$

d) $\log_3(x+1) - \log_3 x = \log_3 9$

RESOLUCIÓN

Aplicando propiedades de logaritmos
hay que tratar de llegar a:

① Un único logaritmo en un lado
de la ecuación y un número
en el otro. Entonces usaremos la
definición de logaritmo y resolvemos

② Un único logaritmo, de la misma
base, en los dos lados. Entonces
igualaremos las expresiones de
los logaritmos y resolvemos

③ comprobar las soluciones

EJEMPLOS

$$a) \log_2(x+3)=4 \Rightarrow x+3=2^4 \Rightarrow x+3=16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=13$$

Comprobando en el enunciado inicial vemos que no aparece ningún logaritmo de cero, o de un número negativo

$$b) \log_{10}(2x+3)=1 \Rightarrow 2x+3=10^1 \Rightarrow 2x+3=10$$

$$\Rightarrow 2x=7 \Rightarrow x=7/2$$

Comprobando en el enunciado inicial vemos que no aparece ningún logaritmo de cero, o de un número negativo

$$c) \log_{10}x + \log_{10}4x = 2 \Rightarrow \log_{10}4x^2 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2 = 10^2 \Rightarrow 4x^2 = 100 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -5 \end{cases}$$

Comprobando en el enunciado inicial vemos que $x = -5$ no vale, porque aparece el logaritmo de un n.º negativo

$$d) \log_3(x+1) - \log_3x = \log_39 \Rightarrow \log_3\left(\frac{x+1}{x}\right) = \log_39 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{x} = 9 \Rightarrow x+1=9x \Rightarrow 8x=1 \Rightarrow x=1/8$$

Comprobando en el enunciado inicial, vemos que $x=1/8$ vale