BIBLIOTECA DEL PROFESORADO

Matemáticas I

SOLUCIONARIO

1 BACHILLERATO

Este material es una obra colectiva concebida, diseñada y creada en el Departamento de Ediciones de Santillana, bajo la dirección de **Teresa Grence**.

En su elaboración han participado:
Sonia Alejo Sánchez
María Arribas Fernández
José María Fernández Díaz
Coral Victoria de la Iglesia Meleiro
Clara Inés Lavado Campos
Silvia Marín García
Natalia Polo Rodríguez
Lorena Ramos San Millán
Rocío Rubio Álvarez
María de las Mercedes Sánchez Martín

EDICIÓN
Sonia Alejo Sánchez
Clara Inés Lavado Campos
Silvia Marín García
Aída Moya Librero

EDICIÓN EJECUTIVA
Carlos Pérez Saavedra

DIRECCIÓN DEL PROYECTO
Domingo Sánchez Figueroa

PROYECTO construyendo mundos

Santillana

DESAFÍO

El poder de la mayoría

Encuentra la propuesta adecuada para que lo que proponga el primer *influencer* sea aceptado y además sea lo más beneficioso para él.

Observaciones importantes

Ten en cuenta que, dependiendo de cada propuesta, no todos los *influencers* tienen que tener premio y el reparto entre los que lo reciban no tiene por qué ser equitativo. Además, evidentemente, ninguno votará una propuesta que le expulse de la red social ni con la que reciba menos premios que los otros.

Tenemos las siguientes condiciones:

- Ninguno vota una propuesta que le expulse.
- Vota en contra si recibe menos premios que los demás.

Por la segunda condición se ha de repartir de la siguiente manera:

Influencer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N.º de premios	2	2	2	2	2	0	0	0	0	0
Votos	sí	sí	sí	sí	sí	no	no	no	no	no

De esta forma, los 5 primeros reciben los mismos premios, por lo que votarán «sí», haciendo que los 5 últimos no reciban, por lo que su voto será «no».

Esto hará que la votación reciba el 50 % de votos a favor, por lo que la propuesta será admitida, ya que requiere al menos la mitad de los votos para salir adelante.

PIENSA

Si $\log_a b < 0$, ¿puedes decir que a es mayor que b?

No.

Por ejemplo:

$$\log_{0,5} 2 = -1 < 0 \rightarrow a = 0,5 < b = 2$$

Ocurre para valores de a mayores que 1 pero no para aquellos valores de a pertenecientes al intervalo (0, 1).

ACTIVIDADES

1 Calcula el representante canónico de estos números.

a) $\frac{-16}{24}$ b) $\frac{18}{39}$ c) $\frac{-24}{-60}$

a) $-\frac{2}{3}$

b) $\frac{6}{13}$

c) $\frac{2}{5}$

2 Escribe dos representantes de los números racionales.

a) $\frac{7}{12}$ b) $\frac{9}{2}$ c) $\frac{8}{25}$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $\left\{\dots, \frac{14}{24}, \frac{21}{36}, \dots\right\}$

b) $\left\{\dots, \frac{18}{4}, \frac{27}{6}, \dots\right\}$

c) $\left\{\dots, \frac{16}{50}, \frac{24}{75}, \dots\right\}$

3 Halla cuántos números racionales distintos hay en esta secuencia.

$\frac{5}{3}$ $-\frac{5}{3}$ $\frac{-5}{3}$ $\frac{5}{-3}$ $\frac{10}{6}$ $1,\widehat{6}$

Hay dos números racionales distintos, que son:

$$\frac{5}{3} = \frac{10}{6} = 1,\widehat{6}$$

$$-\frac{5}{3} = \frac{-5}{3} = \frac{5}{-3}$$

4 Una fracción que tenga un término negativo y otra que tenga sus dos términos positivos, ¿pueden ser representantes del mismo número racional?

No pueden representar el mismo número racional, puesto que si una fracción tiene un término negativo, el cociente es negativo; y si sus dos términos son positivos, el cociente es positivo.

5 Escribe cuatro números irracionales, especificando su regla de formación.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Tras la coma se sitúan todos los múltiplos de 3: 0,3691215…

Tras la coma se sitúan todos los múltiplos de 4: 0,481216…

Al número irracional $\sqrt{2}$ se le suma el número 1: $\sqrt{2} + 1$.

Al número irracional $\sqrt{2}$ se le suma el número 2: $\sqrt{2} + 2$.

6 Decide si los siguientes números son irracionales.

a) 0,51015202530… c) $2 - \pi$

b) $\dfrac{3\pi}{4\pi}$ d) $\dfrac{10}{17}$

a) Es un número irracional, ya que tiene infinitas cifras decimales que no se repiten de forma periódica.

b) Es un número decimal exacto, luego no es un número irracional.

c) Es un número irracional, porque si a un número irracional se le resta un número entero, el resultado es irracional.

d) No es un número irracional, puesto que es una fracción.

7 Encuentra, sin hacer operaciones con decimales, un número irracional comprendido entre $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$.

Respuesta abierta. Por ejemplo: $\sqrt{2} - 1$

8 Razona si son ciertas o no las siguientes afirmaciones.

a) La raíz cuadrada de un irracional es irracional.

b) Un número irracional al cuadrado no es racional.

a) Cierta. Sigue teniendo infinitas cifras decimales no periódicas.

b) Falsa. Por ejemplo: $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$

9 Indica el conjunto numérico mínimo al que pertenece cada número.

a) 8,0999… c) $\sqrt{15}$ e) 2,5

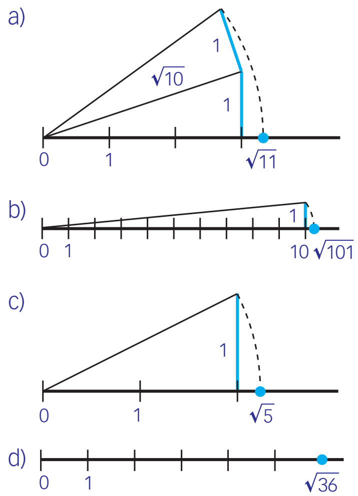
b) 1,223334444… d) $6,1\overset{\frown}{26}$ f) -11

a) $\mathbb{Q}$ c) $\mathbb{I}$ e) $\mathbb{Q}$

b) $\mathbb{I}$ d) $\mathbb{Q}$ f) $\mathbb{Z}$

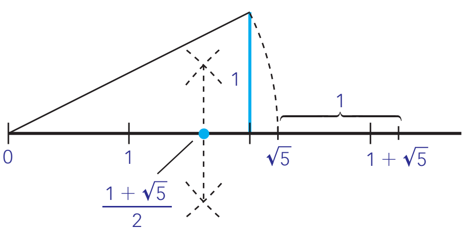
10 Representa las raíces.

a) $\sqrt{11}$ b) $\sqrt{101}$ c) $\sqrt{5}$ d) $\sqrt{36}$

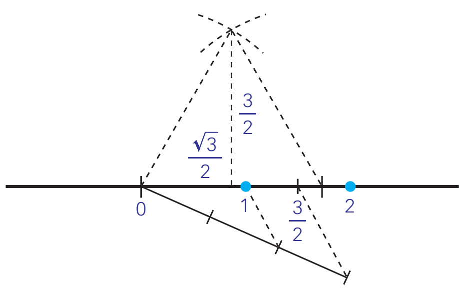


11 Coloca, en la recta real, el número:

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$



12 Representa, en la siguiente recta real, los números 1 y 2.



13 Aplica la propiedad distributiva y opera.

a) $\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{2}{7}-\frac{2}{5}\right)$

b) $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{7}-\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{7}+3\cdot\frac{2}{7}$

a) $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{7}-\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{30-42}{140}=$
$=-\frac{12}{140}=-\frac{3}{35}$

b) $\frac{2}{7}\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{5}+3\right)=\frac{2}{7}\cdot\frac{67}{20}=\frac{67}{70}$

14 Encuentra tres números situados entre estos.

a) $\frac{301}{200}$ y $\frac{302}{200}$

b) $\sqrt{5}$ y $\sqrt{5}+\frac{1}{10}$

a) Respuesta abierta. Por ejemplo:
$\frac{3011}{2000}, \frac{3012}{2000}$ y $\frac{3013}{2000}$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo:
$\sqrt{5}+\frac{1}{100}, \sqrt{5}+\frac{2}{100}$ y $\sqrt{5}+\frac{3}{100}$

15 Ordena, de menor a mayor, los siguientes números racionales e irracionales.

$$3 \qquad \frac{22}{7} \qquad \pi \qquad \frac{2827}{900}$$

$3<\frac{2827}{900}<\pi<\frac{22}{7}$

16 Con ayuda de la propiedad distributiva, calcula sin realizar los cuadrados.

a) 99^2

b) 999^2

c) 9999^2

a) $99\cdot 99=99\cdot(100-1)=$
$=9900-99=9801$

b) $999\cdot 999=999\cdot(1000-1)=$
$=999000-999=998001$

c) $9999\cdot 9999=9999\cdot(10000-1)=$
$=99990000-9999=99980001$

17 Representa los siguientes conjuntos numéricos de todas las formas que conozcas.

a) Números menores que π

b) Números mayores que $\sqrt{3}$ y menores o iguales que 7

c) Números menores o iguales que 2 y mayores que -2

d) Números comprendidos entre los dos primeros números pares, ambos incluidos

e) Números comprendidos entre $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$

a) $(-\infty, \pi)=\{x: x<\pi\}$

b) $(\sqrt{3}, 7]=\{x: \sqrt{3}<x\leq 7\}$

c) $(-2, 2]=\{x: -2<x\leq 2\}$

d) $[2, 4]=\{x: 2\leq x\leq 4\}$

e) $\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right)=\left\{x: \sqrt{2}<x<\sqrt{3}\right\}$

18 Escribe, de todas las maneras que conozcas, estos intervalos de la recta real.

a) 

b) 

c) 

d) 

a) $(-\infty, 2)=\{x: x<2\}$

b) $[-3, 3)=\{x: -3\leq x<3\}$

c) $(-3, +\infty)=\{x: -3<x\}$

d) $(-4, 2)=\{x: -4<x<2\}$

19 Representa el conjunto $\{x: |x-3|\leq 1\}$ de todas las formas que conozcas.

$[2, 4]=\{x: 2\leq x\leq 4\}$

20 Escribe en notación científica los siguientes números.

a) 0,0000085

b) 5 000 000 000 000

c) 31 940 000 000

d) 0,000000000479

a) $8,5 \cdot 10^{-6}$

b) $5 \cdot 10^{12}$

c) $3,194 \cdot 10^{10}$

d) $4,79 \cdot 10^{-10}$

21 Opera y expresa el resultado en notación científica.

a) $(5,2 \cdot 10^{3} + 4,75 \cdot 10^{-2}) : (8,05 \cdot 10^{-4})$

b) $3,79 \cdot 10^{8} \cdot (7,73 \cdot 10^{4} - 6,54 \cdot 10^{-2})$

a) $6,45969 \cdot 10^{6}$

b) $2,92966752134 \cdot 10^{13}$

22 Escribe $\sqrt{3}$ en forma decimal y sus aproximaciones por exceso y por defecto a las diezmilésimas y a las cienmilésimas.

$$\sqrt{3} = 1,73205080...$$

Aproximación por exceso a las diezmilésimas: 1,7321

Aproximación por defecto a las diezmilésimas: 1,7320

Aproximación por exceso a las cienmilésimas: 1,73206

Aproximación por defecto a las cienmilésimas: 1,73205

23 Piensa y explica una situación en que dos medidas tengan los mismos errores absolutos, pero distintos errores relativos.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

María mide 173 cm y Luisa mide 167 cm. Redondeamos ambas medidas por 170.

En ambos casos, el error absoluto es 3 cm, pero los errores relativos son distintos:

$$E_r = \left|\frac{3}{173}\right| = 0,01734...$$

$$E_r = \left|\frac{3}{167}\right| = 0,01796...$$

24 Indica dos ejemplos de medida y da sus correspondientes cotas de error.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

- Velocidad en autopista: 115,45 km/h

  Aproximación: 115 km/h

$$\begin{cases} \text{Cota } E_a = \left|\dfrac{1}{2 \cdot 10^{0}}\right| = 0,5 \\ \text{Cota } E_r = \dfrac{0,5}{115 - 0,5} = 0,00437 \end{cases}$$

- Media de edad de jubilación: 64,3 años

  Aproximación: 64 años

$$\begin{cases} \text{Cota } E_a = \left|\dfrac{1}{2 \cdot 10^{0}}\right| = 0,5 \\ \text{Cota } E_r = \dfrac{0,5}{64 - 0,5} = 0,007874 \end{cases}$$

25 Calcula las cotas de error absoluto y relativo al redondear el número $\sqrt{2}$:

a) A las centésimas. b) A las milésimas.

a) $\text{Cota } E_a = \left|\dfrac{1}{2 \cdot 10^{2}}\right| = 0,005$

$\text{Cota } E_r = \left|\dfrac{0,005}{1,41 - 0,005}\right| = 0,0035$

b) $\text{Cota } E_a = 0,0005$

$\text{Cota } E_r = \left|\dfrac{0,0005}{1,414 - 0,0005}\right| = 0,00035$

26 La población de un pueblo, redondeada a las decenas, es de 310 habitantes. ¿Puedes indicar los errores? ¿Sabrías dar las cotas de error cometido?

Para calcular los errores relativos y absolutos es necesario conocer el valor real; por tanto, no se pueden calcular. Las cotas de error son:

$$E_a = \left|\frac{1}{2 \cdot 10^{-1}}\right| = 5$$

$$E_r = \left|\frac{5}{310 - 5}\right| = 0,016$$

27 Calcula una cota de error absoluto cuando se trunca un número a las décimas. ¿Y si fuera a las centésimas?

$$E_a = \left|\frac{1}{2 \cdot 10^{1}}\right| = 0,5$$

$$E_a = \left|\frac{1}{2 \cdot 10^{2}}\right| = 0,05$$

28 Decide si son ciertas las siguientes igualdades. Razona la respuesta.

a) $\sqrt[4]{-16} = -2$

b) $\sqrt[8]{256} = \pm 4$

c) $\sqrt[3]{1\,000\,000} = \pm 1000$

d) $\sqrt[5]{32} = \pm 2$

a) Falsa: $(-2)^4 = 16$

b) Falsa: $4^8 = 65\,536$

c) Falsa: $(-1\,000)^3 = -1\,000\,000\,000$

d) Falsa: $(-2)^5 = -32$

29 Calcula el valor numérico, si existe, de los siguientes radicales.

a) $\sqrt[4]{16}$ c) $\sqrt[4]{-10\,000}$

b) $\sqrt[3]{-8}$ d) $\sqrt[5]{243}$

a) ± 2

b) -2

c) No existe ninguna raíz real.

d) 3

30 Transforma los radicales en potencias, y viceversa.

a) $3^{\frac{1}{4}}$ b) $5^{\frac{2}{3}}$ c) $2^{\frac{1}{6}}$ d) $\sqrt[4]{5^7}$

a) $\sqrt[4]{3}$ b) $\sqrt[3]{5^2}$ c) $\sqrt[6]{2}$ d) $5^{\frac{7}{4}}$

31 Indica si son equivalentes los siguientes radicales.

a) $\sqrt[4]{3^6}$ y $\sqrt{3^3}$

b) $\sqrt[5]{2^{10}}$ y $\sqrt{2}$

c) $\sqrt[4]{36}$ y $\sqrt{6}$

a) Son equivalentes.

b) No son equivalentes.

c) Son equivalentes.

32 Efectúa estas operaciones.

a) $\sqrt{20} - 3\sqrt{125} + 2\sqrt{45}$

b) $7\sqrt[3]{81} - 2\sqrt[6]{3^2} + \dfrac{\sqrt[3]{3}}{5}$

a) $2\sqrt{5} - 15\sqrt{5} + 6\sqrt{5} = -7\sqrt{5}$

b) $21\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{3} + \dfrac{\sqrt[3]{3}}{5} = \dfrac{96\sqrt[3]{3}}{5}$

33 Opera y simplifica.

a) $4\sqrt{27} \cdot 5\sqrt{6}$ c) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3}$

b) $\left(\dfrac{\sqrt[6]{32}}{\sqrt{8}}\right)^3$ d) $\dfrac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{3}}$

a) $20\sqrt{162} = 180\sqrt{2}$

b) $\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{8^3}} = \sqrt{\dfrac{2^5}{2^9}} = \dfrac{1}{4}$

c) $\sqrt[6]{4} \cdot \sqrt[6]{27} = \sqrt[6]{108}$

d) $\sqrt[12]{\dfrac{3^6 \cdot 3^4}{3^3}} = \sqrt[12]{3^7}$

34 Racionaliza las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

b) $\dfrac{-3}{5\sqrt[4]{2^3}}$

c) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{6\sqrt[5]{7^3}}$

a) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

b) $\dfrac{-3\sqrt[4]{2}}{10}$

c) $\dfrac{(2+\sqrt{3})\sqrt[5]{7^2}}{42}$

35 Racionaliza y opera.

a) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{8\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{7}}$

c) $\dfrac{5\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$

a) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}} = \dfrac{1-\sqrt{2}}{-1} = -1+\sqrt{2}$

b) $\dfrac{8\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{7}} = \dfrac{8\sqrt{6}+8\sqrt{14}}{-4} = -2\sqrt{6} - 2\sqrt{14}$

c) $\dfrac{5\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}} = \dfrac{10\sqrt{3}+5\sqrt{15}}{-1} = -10\sqrt{3} - 5\sqrt{15}$

36 Calcula, mediante la definición, estos logaritmos.

a) $\log_2 8$
b) $\log_3 81$
c) $\log 1\,000$
d) $\log 0{,}0001$
e) $\ln e^{33}$
f) $\ln e^{-4}$
g) $\log_4 16$
h) $\log_4 0{,}25$

a) 3
b) 4
c) 3
d) -4
e) 33
f) -4
g) 2
h) -1

37 Halla, mediante la definición, los siguientes logaritmos.

a) $\log_3 243$
b) $\log_9 81$
c) $\log 1\,000\,000$
d) $\log 0{,}00001$
e) $\ln e^2$
f) $\ln e^{-14}$
g) $\log_7 343$
h) $\log_4 0{,}0625$

a) 5
b) 2
c) 6
d) -5
e) 2
f) -14
g) 3
h) -2

38 Calcula los logaritmos y deja indicado el resultado.

a) $\log_4 32$
b) $\log_2 32$
c) $\log_{27} 81$
d) $\log_9 243$
e) $\log_{32} 4$
f) $\log_{36} 216$

a) $\dfrac{\log_2 32}{\log_2 4} = \dfrac{5}{2}$

b) 5

c) $\dfrac{\log_3 81}{\log_3 27} = \dfrac{4}{3}$

d) $\dfrac{\log_3 243}{\log_3 9} = \dfrac{5}{2}$

e) $\dfrac{\log_2 4}{\log_2 32} = \dfrac{2}{5}$

f) $\dfrac{\log_6 216}{\log_6 36} = \dfrac{3}{2}$

39 Sabiendo que $\log 2 = 0{,}3010$; $\log 3 = 0{,}4771$ y $\log 7 = 0{,}8451$, determina los logaritmos decimales de los 10 primeros números naturales. Con estos datos, ¿sabrías calcular $\log 3{,}5$? ¿Y $\log 1{,}5$?

$\log 4 = \log(2 \cdot 2) = \log 2 + \log 2 =$
$= 2 \cdot 0{,}3010 = 0{,}6020$

$\log 5 = \log\left(\dfrac{10}{2}\right) = \log 10 - \log 2 =$
$= 1 - 0{,}3010 = 0{,}6990$

$\log 6 = \log(3 \cdot 2) = \log 3 + \log 2 =$
$= 0{,}4771 + 0{,}3010 = 0{,}7781$

$\log 8 = \log(4 \cdot 2) = \log 4 + \log 2 =$
$= 0{,}6020 + 0{,}3010 = 0{,}9030$

$\log 9 = \log(3 \cdot 3) = \log 3 + \log 3 =$
$= 0{,}4771 + 0{,}4771 = 0{,}9542$

$\log 10 = 1$

$\log 3{,}5 = \log\left(\dfrac{7}{2}\right) = \log 7 - \log 2 = 0{,}5441$

$\log 1{,}5 = \log\left(\dfrac{3}{2}\right) = \log 3 - \log 2 = 0{,}1761$

40 Halla, sin ayuda de la calculadora, $\log_2 5$ sabiendo que $\log_5 2 = 0{,}4307$. Comprueba que su producto es 1.

Aplicamos el cambio de base:

$$\log_2 5 = \frac{\log_5 5}{\log_5 2} = \frac{1}{0{,}4307} = 2{,}3218$$

Comprobación:

$$\log_2 5 \cdot \log_5 2 = \frac{\log 5}{\log 2} \cdot \frac{\log 2}{\log 5} = 1$$

41 Obtén el valor de x en las siguientes igualdades.

a) $\log_x 256 = -8$
b) $\log_4 x = \dfrac{1}{2}$
c) $\log_5 \sqrt[6]{625} = x$
d) $\log_x 3 = 2$

a) $x = \dfrac{1}{2}$

b) $x = 2$

c) $x = \dfrac{2}{3}$

d) $x = \sqrt{3}$

42 Calcula cuánto vale $\log_a b \cdot \log_b a$.

$$\log_a b \cdot \log_b a = \frac{\log b}{\log a} \cdot \frac{\log a}{\log b} = 1$$

PRACTICA

43 Suma y resta.

a) $2,\widehat{7} + 4,\widehat{3}$

b) $20,2\widehat{1} - 7,\widehat{5}$

c) $6,\widehat{13} + 5,\widehat{2}$

d) $5,\widehat{4} + 7,\widehat{6}$

e) $6,\widehat{34} + 4,2\widehat{13}$

f) $1,\widehat{23} - 1,0\widehat{12}$

a) $\dfrac{27-2}{9} + \dfrac{43-4}{9} = \dfrac{64}{9} = 7,\widehat{1}$

b) $\dfrac{1\,819}{90} - \dfrac{68}{9} = \dfrac{1\,139}{90} = 12,6\widehat{5}$

c) $\dfrac{607}{99} + \dfrac{47}{9} = \dfrac{1\,124}{99} = 11,\widehat{35}$

d) $\dfrac{49}{9} + \dfrac{69}{9} = \dfrac{118}{9} = 13,\widehat{1}$

e) $\dfrac{628}{99} + \dfrac{4\,171}{990} = \dfrac{10\,451}{990} = 10,5\widehat{56}$

f) $\dfrac{122}{99} - \dfrac{167}{165} = \dfrac{109}{495} = 0,2\widehat{20}$

44 Multiplica y divide.

a) $1,2 \cdot 2,\widehat{1}$

b) $1,5 : 1,\widehat{6}$

c) $1,1\widehat{6} \cdot 4,\widehat{6}$

d) $1,1\widehat{6} : 4,\widehat{6}$

a) $\dfrac{12}{10} \cdot \dfrac{19}{9} = \dfrac{38}{15} = 2,5\widehat{3}$

b) $\dfrac{15}{10} : \dfrac{15}{9} = \dfrac{9}{10} = 0,9$

c) $\dfrac{105}{90} \cdot \dfrac{42}{9} = \dfrac{49}{9} = 5,\widehat{4}$

d) $\dfrac{105}{90} : \dfrac{42}{9} = \dfrac{1}{4} = 0,25$

45 Opera.

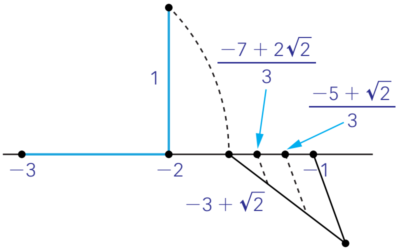
a) $\left(\dfrac{5}{6} - \dfrac{4}{5}\right)^{-1} \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-2} + \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2}$

b) $\left(\dfrac{5}{6} - \dfrac{4}{5}\right)^{-1} : \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-1} + \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}$

a) $\left(\dfrac{1}{30}\right)^{-1} \cdot \dfrac{4}{9} + \dfrac{4}{9} = \dfrac{40}{3} + \dfrac{4}{9} = \dfrac{124}{9}$

b) $\left(\dfrac{1}{30}\right)^{-1} : \dfrac{2}{3} + \dfrac{9}{4} = 45 + \dfrac{9}{4} = \dfrac{189}{4}$

46 Divide el segmento comprendido entre $-3 + \sqrt{2}$ y -1 en 3 partes iguales.



La distancia entre -1 y $-3 + \sqrt{2}$ es:

$\left|-1 - \left(-3 + \sqrt{2}\right)\right| = \left|2 - \sqrt{2}\right|$ u.

Dividimos el segmento en tres partes iguales de longitud $\dfrac{2-\sqrt{2}}{3}$ u.

Los puntos que dividen el segmento en tres partes iguales son:

$\dfrac{-7+2\sqrt{2}}{3}$ y $\dfrac{-5+\sqrt{2}}{3}$

47 Halla la unión de estos intervalos.

a) $(-4, -2] \cup (-3, 0)$

b) $(2, 8] \cup [-2, 0)$

a) $(-4, 0)$

b) $[-2, 0) \cup (2, 8]$

48 Halla la intersección de estos intervalos.

a) $(-4, -2] \cap (-3, 0)$

b) $(2, 8] \cap [-2, 0)$

a) $(-3, -2]$

b) $\varnothing$

49 Resuelve esta operación.

$$6,4 \cdot 10^{-6} - 5,1 \cdot 10^{-4} + 9,3 \cdot 10^{-2}$$

$(0,00064 - 0,051 + 9,3) \cdot 10^{-2} =$
$= 9,24964 \cdot 10^{-2}$

50 Calcula el resultado de estas operaciones.

a) $(3,57 \cdot 10^{5} \cdot 2,3 \cdot 10^{-2}) : (5,324 \cdot 10^{9})$

b) $(7,1 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^{5}) : (2,3 \cdot 10^{8} : 1,7 \cdot 10^{-7})$

a) $(3,57 \cdot 2,3 : 5,324) \cdot (10^{5} \cdot 10^{-2} : 10^{9}) =$
$= 1,54226 \cdot 10^{-6}$

b) $(7,1 \cdot 4 : (2,3 : 1,7)) \cdot (10^{-6} \cdot 10^{5} : (10^{8} : 10^{-7})) =$
$= 2,1 \cdot 10^{-15}$

51 Convierte las siguientes expresiones en un solo radical.

a) $5^{-\frac{2}{3}}$

b) $-5^{\frac{2}{3}}$

c) $(-5)^{\frac{2}{3}}$

d) $(-5)^{-\frac{2}{3}}$

e) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{23}}$

f) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}$

a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5^2}} = \dfrac{1}{5}\sqrt[3]{5}$

b) $-\sqrt[3]{5^2}$

c) $\sqrt[3]{5^2}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{(-5)^2}} = \dfrac{1}{5}\sqrt[3]{5}$

e) $\sqrt[12]{23}$

f) $\sqrt[9]{3}$

52 Introduce los factores de las siguientes expresiones dentro del radical.

a) $3x^2\sqrt[3]{3y}$

b) $8b\sqrt{8a^3b}$

c) $2ab^2c\sqrt[4]{4}$

d) $(2a-b)\sqrt{b}$

a) $3x^2\sqrt[3]{3y} = \sqrt[3]{3^3\cdot(x^2)^3\cdot 3y} = \sqrt[3]{27x^6 3y} =$
$= \sqrt[3]{81x^6y}$

b) $8b\sqrt{8a^3b} = \sqrt{8^2\cdot b^2\cdot 8a^3b} = \sqrt{512a^3b^3}$

c) $2ab^2c\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^4\cdot a^4(b^2)^4\cdot c^4\cdot 4} =$
$= \sqrt[4]{64a^4b^8c^4}$

d) $(2a-b)\sqrt{b} = \sqrt{(2a-b)^2b} =$
$= \sqrt{4a^2b+b^3-4ab^2}$

53 Racionaliza estas expresiones.

a) $\dfrac{3}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{5}}$

b) $\dfrac{6}{\sqrt[3]{2}\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)}$

c) $\dfrac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}-2\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}$

a) $\dfrac{3}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{5}} = \dfrac{3\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{5^3}} =$
$= \dfrac{3\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{5^3}}{15} = \dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{5^3}}{5} =$
$= \dfrac{\sqrt[4]{3^2\cdot 5^3}}{5} = \dfrac{\sqrt[4]{1125}}{5}$

b) $\dfrac{6}{\sqrt[3]{2}\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)} =$
$= \dfrac{6\cdot\sqrt[3]{2^2}\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)}{\sqrt[3]{2}\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt[3]{2^2}\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)} =$
$= \dfrac{6\cdot\sqrt[3]{2^2}\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)}{2\cdot(4-3)} =$
$= 3\cdot\sqrt[3]{2^2}\cdot\left(2-\sqrt{3}\right) = 6\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[6]{432}$

c) $\dfrac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}-2\right)\cdot\left(3-\sqrt{5}\right)} =$
$= \dfrac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}-2\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}\cdot\dfrac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+2} =$
$= \dfrac{\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{3-\sqrt{5}}\cdot\dfrac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} =$
$= -\dfrac{3\sqrt{6}+\sqrt{30}+6\sqrt{2}+2\sqrt{10}}{4}$

54 Resuelve esta operación.

$$\frac{5}{\sqrt{2}+\sqrt{7}} + \frac{3}{\sqrt{2}-1}$$

$\dfrac{5\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{7}\right)}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{7}\right)} +$
$+ \dfrac{3\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)} =$
$= -\sqrt{2}+\sqrt{7}+3\sqrt{2}+3 = \sqrt{7}+2\sqrt{2}+3$

55 Calcula $\log_2 \dfrac{15\sqrt{12}}{10\sqrt[3]{5}}$ sabiendo que $\log_2 3 = 1{,}5849$ y $\log_2 5 = 2{,}3219$.

$\log_2\dfrac{15\sqrt{12}}{10\sqrt[3]{5}} = \log_2\dfrac{30\sqrt{3}}{10\sqrt[3]{5}} = \log_2\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt[3]{5}} =$
$= \dfrac{3}{2}\cdot\log_2 3 - \dfrac{1}{3}\cdot\log_2 5 =$
$= \dfrac{3}{2}\cdot 1{,}5849 - \dfrac{1}{3}\cdot 2{,}3219 =$
$= 1{,}6034$

ACTIVIDADES FINALES

1. Reconoce los distintos tipos de números y los representa en la recta real

ACTIVIDADES FLASH

56 Clasifica las fracciones en reducibles e irreducibles.

a) $\frac{-5}{12}$ b) $\frac{9}{6}$ c) $\frac{15}{18}$ d) $\frac{104}{-206}$

a) $\frac{-5}{12}$

Es una fracción irreducible, porque el m.c.d.(5, 12) = 1.

b) $\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

Es una fracción reducible.

c) $\frac{15}{18} = \frac{5}{6}$

Es una fracción reducible.

d) $\frac{104}{-206} = -\frac{52}{103}$

Es una fracción reducible.

57 Calcula el representante canónico.

a) $\frac{5}{200}$ b) $\frac{-1080}{432}$ c) $\frac{26}{130}$ d) $\frac{-702}{1053}$ e) $\frac{12}{400}$ f) $\frac{72}{243}$ g) $\frac{88}{176}$ h) $\frac{104}{216}$

a) $\frac{1}{40}$ b) $\frac{-5}{2}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{-2}{3}$ e) $\frac{3}{100}$ f) $\frac{8}{27}$ g) $\frac{1}{2}$ h) $\frac{13}{27}$

ACTIVIDADES FLASH

58 Halla x para que las dos fracciones representen al mismo número racional.

a) $\frac{3}{5} = \frac{6}{x}$ b) $\frac{-5}{2} = \frac{x}{8}$ c) $\frac{x}{-3} = \frac{4}{6}$ d) $\frac{4}{x} = -\frac{1}{3}$

a) $x = 10$ b) $x = -20$ c) $x = -2$ d) $x = -12$

59 Encuentra los valores de x para que estas fracciones sean representantes canónicos.

a) La fracción propia $\frac{x}{18}$

b) La fracción impropia $\frac{12}{x}$

a) $x = \{1, 5, 7, 11, 13, 17\}$

b) $x = \{5, 7, 11\}$

60 Indica de qué tipo son estos números decimales.

a) 2,331 b) 4,1234… c) 6,2727… d) 0,03131… e) 4 f) −32,207

a) Decimal exacto

b) Irracional

c) Decimal periódico puro

d) Decimal periódico mixto

e) Natural

f) Decimal exacto

61 ¿Qué tipo de decimal se obtiene de la fracción $\frac{a}{2^2 \cdot 5^3}$, siendo a un número entero?

Al dividir un número entero entre un número cuya descomposición factorial esté formada únicamente por potencias de 2 o 5, o de ambos, se obtiene un decimal exacto. Si el numerador es múltiplo del denominador, se obtiene un número entero.

62 **INVESTIGA.** Si a y b son enteros negativos, y $a > b$, ¿es $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$?

No, la respuesta correcta es $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$.

Puesto que a y b son números negativos, su producto $a \cdot b$ es un número positivo. Por tanto, si dividimos entre este producto, $a \cdot b$, se obtiene lo siguiente:

$a > b;\ \frac{a}{a \cdot b} > \frac{b}{a \cdot b};\ \frac{1}{b} > \frac{1}{a}$

63 **RETO.** ¿Cómo se pueden repartir 30 salchichas iguales entre 18 personas equitativamente, realizando el menor número posible de cortes? ¿Cuál es el número mínimo de trozos que se necesita hacer?

Hemos de dividir $\frac{30}{18} = \frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}$, luego cada persona ha de recibir 1 salchicha entera y $\frac{2}{3}$ de otra.

Por tanto, 18 salchichas no se cortan y las otras 12, solo se cortan una vez, dejando $\frac{2}{3}$ de un lado y $\frac{1}{3}$ del otro. Por ello, el mínimo número de cortes es 12 y el mínimo número de trozos es 24.

64 Ordena estos números decimales de menor a mayor.

a) $2{,}9\overset{\frown}{95}$ $\quad 2{,}\overset{\frown}{9}$ $\quad 2{,}\overset{\frown}{95}$ $\quad 2{,}9\overset{\frown}{59}$ $\quad 2{,}9\overset{\frown}{5}$

b) $4{,}75$ $\quad 4{,}\overset{\frown}{75}$ $\quad 4{,}7\overset{\frown}{5}$ $\quad 4{,}775$ $\quad 4{,}757$ $\quad 4{,}7\overset{\frown}{57}$

a) $2{,}9\overset{\frown}{5} < 2{,}9\overset{\frown}{59} = 2{,}\overset{\frown}{95} < 2{,}9\overset{\frown}{95} < 2{,}\overset{\frown}{9}$

b) $4{,}75 < 4{,}7\overset{\frown}{5} < 4{,}757 < 4{,}\overset{\frown}{75} =$
$= 4{,}7\overset{\frown}{57} < 4{,}775$

65 Halla la fracción generatriz de los siguientes números.

a) $0{,}2$ $\quad$ d) $8{,}0002$ $\quad$ g) $0{,}01$

b) $3{,}\overset{\frown}{5}$ $\quad$ e) $42{,}\overset{\frown}{78}$ $\quad$ h) $5{,}\overset{\frown}{902}$

c) $2{,}37$ $\quad$ f) $10{,}5\overset{\frown}{23}$ $\quad$ i) $0{,}01\overset{\frown}{57}$

a) $\frac{1}{5}$ $\quad$ d) $\frac{40\,001}{5\,000}$ $\quad$ g) $\frac{1}{100}$

b) $\frac{32}{9}$ $\quad$ e) $\frac{1\,412}{33}$ $\quad$ h) $\frac{5\,897}{999}$

c) $\frac{237}{100}$ $\quad$ f) $\frac{5\,209}{495}$ $\quad$ i) $\frac{13}{825}$

66 Efectúa, utilizando las fracciones generatrices.

a) $1{,}\overset{\frown}{3} + 3{,}4$ $\quad$ c) $6{,}3\overset{\frown}{4} + 2{,}\overset{\frown}{5}$

b) $10{,}2\overset{\frown}{5} - 5{,}\overset{\frown}{7}$ $\quad$ d) $4{,}32 - 7{,}0\overset{\frown}{2}$

a) $\frac{4}{3} + \frac{17}{5} = \frac{71}{15}$

b) $\frac{923}{90} - \frac{52}{9} = \frac{403}{90}$

c) $\frac{571}{90} + \frac{23}{9} = \frac{89}{10}$

d) $\frac{108}{25} - \frac{316}{45} = -\frac{608}{225}$

67 Realiza las siguientes operaciones.

a) $1{,}25 \cdot 2{,}\overset{\frown}{5}$

b) $0{,}0\overset{\frown}{3} : 2{,}9\overset{\frown}{2}$

c) $3{,}7\overset{\frown}{6} \cdot 4{,}\overset{\frown}{8}$

d) $1{,}25 : 2{,}2\overset{\frown}{5}$

a) $\frac{5}{4} \cdot \frac{23}{9} = \frac{115}{36}$

b) $\frac{1}{30} : \frac{263}{90} = \frac{90}{7\,890} = \frac{3}{263}$

c) $\frac{113}{30} \cdot \frac{44}{9} = \frac{4\,972}{270} = \frac{2\,486}{135}$

d) $\frac{5}{4} : \frac{203}{90} = \frac{450}{812} = \frac{225}{406}$

68 **RETO.** Busca un número que sea mayor que $0{,}\overset{\frown}{9}$ y menor que 1.

Vamos a intentar calcular el número que está en medio de los dos dados. Para ello, calculamos la distancia entre ambos:

$|1 - 0{,}\overset{\frown}{9}| = \left|1 - \frac{9}{9}\right| = 0$

Por tanto, concluimos que no se puede escribir ningún número que sea mayor que $0{,}\overset{\frown}{9}$ y menor que 1.

69 Utilizando las fracciones generatrices, comprueba si son verdaderas o falsas las igualdades.

a) $1,\overset{\frown}{9} = 2$

b) $1,\overset{\frown}{3} : 3 = 0,\overset{\frown}{4}$

c) $1,8\overset{\frown}{9} + 0,1\overset{\frown}{1} = 2$

d) $0,\overset{\frown}{3} + 0,\overset{\frown}{6} = 1$

a) Verdadera: $\frac{19-1}{9} = 2$

b) Verdadera:

$$\frac{13-1}{9} : 3 = \frac{12}{9} : 3 = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$$

c) Falsa: $\frac{189-18}{90} + \frac{11-1}{90} =$

$$= \frac{171}{90} + \frac{10}{90} = \frac{181}{90} \neq 2$$

d) Verdadera: $\frac{3}{9} + \frac{6}{9} = \frac{9}{9} = 1$

70 **RETO.** Transforma la fracción $\frac{1}{104}$ en otra equivalente cuyo denominador sea potencia de 26.

Como $104 = 26 \cdot 4$, multiplicamos el numerador y denominador por 13^2.

$$\frac{1}{104} = \frac{x}{26^a} \rightarrow \frac{1}{\underbrace{2 \cdot 13}_{26} \cdot 2 \cdot 2} =$$

$$= \frac{13 \cdot 13}{\underbrace{2 \cdot 13}_{26} \cdot \underbrace{2 \cdot 13}_{26} \cdot \underbrace{2 \cdot 13}_{26}} = \frac{169}{26^3}$$

71 Señala cada número racional y halla su fracción irreducible. $-2,5$; $\sqrt{3}$; $5,666\ldots$; $5,6060060006\ldots$; $\frac{7}{9}$; π; $3,1416$.

Los números racionales son:

$$-2,5 = -\frac{5}{2}; 5,666 = \frac{51}{9}; \frac{7}{9};$$

$$3,1416 = \frac{3\,927}{1\,250}$$

72 Indica cuáles de estos números son irracionales.

$$\frac{\sqrt{4}}{2} \quad \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \frac{\sqrt{9}}{3} \quad \frac{\sqrt{16}}{5} \quad \frac{\sqrt{36}}{3}$$

$$1 + \sqrt{2} \quad 3 + \sqrt{4} \quad 5 - \sqrt{9}$$

$$8 + \sqrt{10} \quad 3\sqrt{16} \quad 5\sqrt{49}$$

Los números irracionales son:

$$\frac{\sqrt{5}}{2}, 1 + \sqrt{2}, 8 + \sqrt{10}$$

73 **INVENTA.** Escribe tres números racionales y tres irracionales que estén entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Números racionales:

$$\frac{1}{2} < \frac{51}{100} < \frac{13}{25} < \frac{53}{100} < \frac{3}{4}$$

Números irracionales:

$$\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{2\sqrt{3}}{5} < \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{3}{4}$$

74 Da un número racional y otro irracional comprendidos entre:

a) $3,4$ y $3,40\overset{\frown}{023}$

b) $2,5\overset{\frown}{2}$ y $2,\overset{\frown}{52}$

c) 1 y 2

d) $5,6$ y $5,\overset{\frown}{68}$

e) $-2,6\overset{\frown}{8}$ y $-2,\overset{\frown}{68}$

f) $0,2$ y $0,25$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) Racional: 3,40022
Irracional: 3,4002201001…

b) Racional: 2,523
Irracional: 2,52301001…

c) Racional: 1,1
Irracional: 1,101001…

d) Racional: 5,62
Irracional: 5,6201001…

e) Racional: −2,67
Irracional: −2,6701001…

f) Racional: 0,21
Irracional: 0,2101001…

75 Encuentra, sin hacer operaciones, un número irracional comprendido entre $-\sqrt{3}$ y $\sqrt{3}$.

Respuesta abierta. Por ejemplo: $\frac{\sqrt{3}}{2}$

76 Opera y clasifica el tipo de número real.

a) $\sqrt{2,\widehat{7}}$ b) $\sqrt{4,\widehat{9}}$ c) $\sqrt{\dfrac{1,\widehat{3}}{3}}$

a) $\sqrt{\dfrac{25}{9}} = \pm\dfrac{5}{3}$

Es un número racional.

b) $\sqrt{\dfrac{45}{9}} = \sqrt{5}$

Es un número irracional.

c) $\sqrt{\dfrac{12}{27}} = \sqrt{\dfrac{4}{9}} = \pm\dfrac{2}{3}$

Es un número racional.

77 **INVESTIGA.** Demuestra que $2\sqrt{5}$ es un número irracional.

Lo demostraremos por reducción al absurdo: si $2\sqrt{5}$ fuera un número racional entonces se podría escribir $2\sqrt{5} = \dfrac{a}{b}$, siendo a y b números naturales coprimos.

Entonces $\sqrt{5} = \dfrac{a}{2b}$ sería un número racional, pero sabemos que no lo es.

Si queremos demostrar que $\sqrt{5}$ es un número irracional, basta con hacer un razonamiento similar. Suponemos que es racional, entonces $\sqrt{5} = \dfrac{a}{b} \rightarrow 5 = \dfrac{a^2}{b^2} \rightarrow$
$\rightarrow 5b^2 = a^2$, entonces b sería un divisor de a, pero hemos dicho que son coprimos. Por lo tanto, $\sqrt{5}$ es un número irracional.

78 **INVENTA.** Busca dos números irracionales cuyo producto sea un número racional.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{8}}{3} = \dfrac{\sqrt{16}}{3} = \dfrac{4}{3}$

79 Razona si son verdaderas o falsas las afirmaciones.

a) Todos los números decimales se pueden escribir en forma de fracción.
b) Todos los números reales son racionales.
c) Cualquier número irracional es real.
d) Hay números enteros que son irracionales.
e) Existen números reales que son racionales.
f) Todo número decimal es racional.
g) Cada número irracional tiene infinitas cifras decimales.
h) Todos los números racionales tienen infinitas cifras decimales que se repiten.
i) Todos los números racionales se pueden escribir mediante fracciones.

a) Falsa, pues los números irracionales tienen infinitas cifras decimales no periódicas y no se pueden escribir como fracción.
b) Falsa, porque hay números reales que son irracionales.
c) Verdadera, ya que los números racionales y los irracionales forman el conjunto de los números reales.
d) Falsa, porque si son enteros no pueden tener infinitas cifras decimales no periódicas.
e) Verdadero, pues todos los números que se pueden expresar como fracción son racionales, que además son reales.
f) Falsa, porque los números decimales con infinitas cifras decimales no periódicas son irracionales.
g) Verdadero, ya que tiene infinitas cifras decimales no periódicas.
h) Falsa, pues los decimales exactos también son racionales.
i) Verdadero, por definición los números racionales son todos aquellos que se pueden escribir en forma de fracción.

80 **INVESTIGA.** ¿Por qué la raíz cuadrada de cualquier número terminado en 2 es un número irracional? ¿Existe otro conjunto de números con esas características?

Porque no hay ningún número que al multiplicarlo por sí mismo dé un número terminado en 2.

Todas las familias de números terminadas en 3, 7 y 8 tienen esta característica.

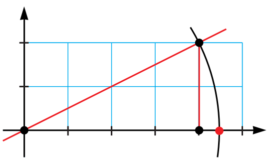
81 **RETO.** Si $y = \dfrac{x}{x + \dfrac{x}{x+y}}$, ¿para qué valores de x resulta que y no es un número real?

$$y = \frac{x+y}{x+y+1} \rightarrow$$
$$\rightarrow y(x+y+1) = x+y \rightarrow$$
$$\rightarrow yx + y^2 + y - x - y = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow y^2 + xy - x = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow y = \frac{-x \pm \sqrt{x^2+4x}}{2} \rightarrow$$
$$\rightarrow x^2 + 4x < 0$$

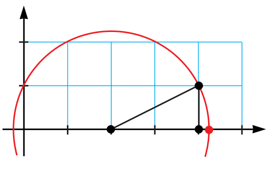
Si $x \in (-4, 0)$, $y \notin \mathbb{R}$

82 ¿Qué números están representados en cada construcción?

a)



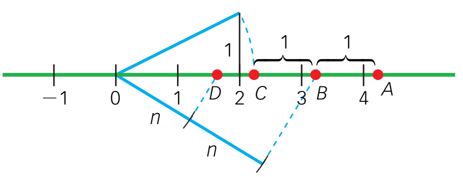
b)



a) $\sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20}$

b) $2 + \sqrt{2^2+1^2} = 2 + \sqrt{5}$

83 ¿Qué números representan sobre esta recta numérica los puntos A, B, C y D, donde n es un segmento cualquiera?



$A = 2 + \sqrt{5}$

$B = 1 + \sqrt{5}$

$C = \sqrt{5}$

$D = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

84 Representa los siguientes números en la recta real.

a) $\sqrt{10}$

b) $-\sqrt{6}$

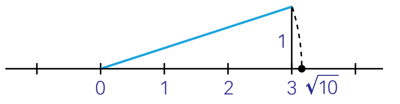
c) $1 - \sqrt{2}$

d) $\sqrt{3} - 1$

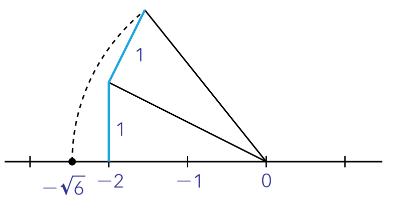
e) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

f) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$

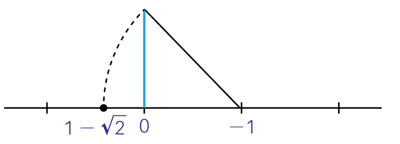
a) $\sqrt{10} = \sqrt{3^2 + 1^2}$



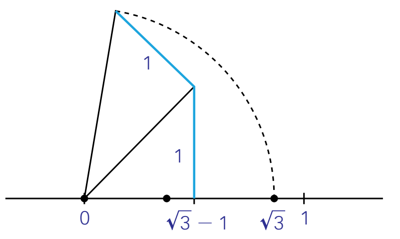
b) $-\sqrt{6} = -\sqrt{2^2+1^2+1^2}$



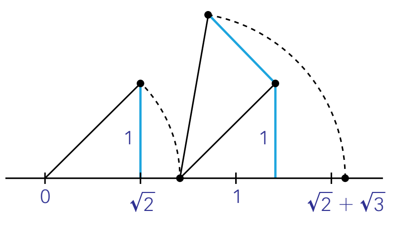
c) $1 - \sqrt{2} = 1 - \sqrt{1^2+1^2}$



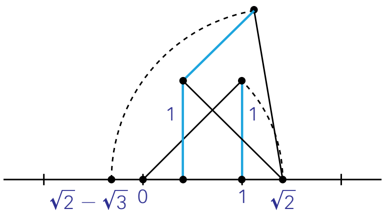
d) $\sqrt{3} - 1 = \sqrt{2^2+1^2} - 1$



e) $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{1^2+1^2} + \sqrt{2^2+1^2}$



f) $\sqrt{2} - \sqrt{3} = \sqrt{1^2 + 1^2} - \sqrt{2^2 + 1^2}$



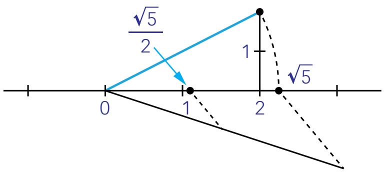
85 Representa los siguientes números en la recta real.

a) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

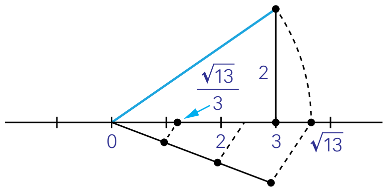
b) $\dfrac{\sqrt{13}}{3}$

c) $\dfrac{\sqrt{18}}{5}$

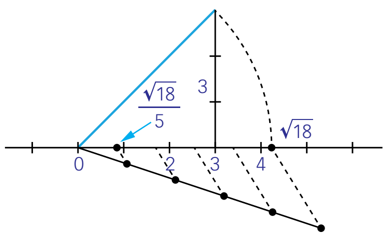
a) $\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1^2}$



b) $\sqrt{13} = \sqrt{3^2 + 2^2}$



c) $\sqrt{18} = \sqrt{3^2 + 3^2}$



86 Ordena y representa los siguientes números en la recta real.

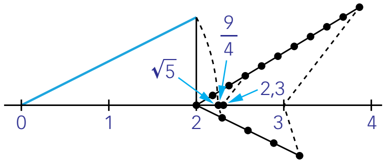
a) 2,3 b) $\sqrt{5}$ c) $\dfrac{9}{4}$

Escribimos a) y c) como suma de su parte entera y su parte decimal. Para representar b) utilizamos el teorema de Pitágoras.

a) $2,3 = 2 + 0,3$

b) $\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1^2}$

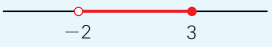
c) $\dfrac{9}{4} = 2 + \dfrac{1}{4}$

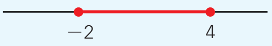


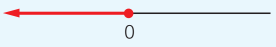
2. Representa intervalos de números reales y realiza operaciones con ellos

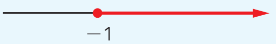
ACTIVIDADES FLASH

87 Determina los intervalos representados.

a) 

b) 

c) 

d) 

a) $(-2, 3] = \{x: -2 < x \leq 3\}$

b) $[-2, 4] = \{x: -2 \leq x \leq 4\}$

c) $(-\infty, 0] = \{x: x \leq 0\}$

d) $[-1, +\infty) = \{x: x \geq -1\}$

88 Describe estos intervalos.

a) $(0, 10)$

b) $(3, 7]$

c) $(-\infty, -2)$

d) $[2, 5]$

e) $[5, 10)$

f) $[-4, +\infty)$

g) $(-\infty, 6]$

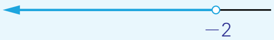
h) $(100, +\infty)$

i) $\left(-7, \sqrt{2}\right)$

a) $\{x: 0 < x < 10\}$

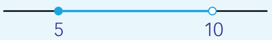
b) $\{x: 3 < x \leq 7\}$

c) $\{x: x < -2\}$

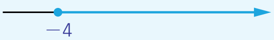


d) $\{x: 2 \leq x \leq 5\}$

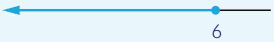
e) $\{x: 5 \leq x < 10\}$



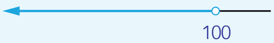
f) $\{x: -4 \leq x\}$



g) $\{x: x \leq 6\}$



h) $\{x: 100 < x\}$



i) $\{x: -7 < x < \sqrt{2}\}$

89 Determina el intervalo que corresponde a estas desigualdades.

a) $1 < x < 3$
b) $6 < x \leq 7$
c) $10 \leq x \leq 12$
d) $x \leq -2$
e) $x < 5$
f) $x > -3$
g) $x \geq 7$
h) $x < -9$
i) $x \geq -6$

a) $(1, 3)$
b) $(6, 7]$
c) $[10, 12]$
d) $(-\infty, -2]$
e) $(-\infty, 5)$
f) $(-3, +\infty)$
g) $[7, +\infty)$
h) $(-\infty, -9)$
i) $[-6, +\infty)$

90 Calcula las siguientes uniones de intervalos.

a) $(3, 16) \cup (-2, 5)$
b) $[-2, 2) \cup [-11, 0]$
c) $\left(\frac{5}{4}, \frac{7}{3}\right] \cup \left[-\frac{15}{2}, \frac{9}{5}\right]$
d) $\left[-\sqrt{7}, \sqrt{5}\right] \cup \left[-\sqrt{5}, \sqrt{7}\right]$

a) $(-2, 16)$
b) $[-11, 2)$
c) $\left[-\frac{15}{2}, \frac{7}{3}\right]$
d) $\left[-\sqrt{7}, \sqrt{7}\right]$

91 Halla las intersecciones de estos intervalos.

a) $(-1, 10) \cap (-3, 8)$
b) $\left[-\frac{4}{7}, 5\right) \cap \left[-\frac{5}{8}, 0\right]$
c) $\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{7}{3}\right] \cap \left[-\frac{15}{4}, \frac{9}{5}\right]$
d) $\left[-\sqrt{7}, \sqrt{5}\right] \cap \left[-\sqrt{5}, \sqrt{7}\right]$

a) $(-1, 8)$
b) $\left[-\frac{4}{7}, 0\right]$
c) $\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{9}{5}\right]$
d) $\left[-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right]$

92 Dados los intervalos siguientes, calcula.

$A = (-\infty, 1]$
$B = [0, 5)$
$C = [-1, 3]$

a) $A \cup B$
b) $A \cup C$
c) $B \cap C$
d) $A \cap B \cap C$

a) $(-\infty, 5)$
b) $(-\infty, 3]$
c) $[0, 3]$
d) $[0, 1]$

93 Expresa los siguientes intervalos como intersección de dos semirrectas.

a) $\left(-1, \dfrac{13}{2}\right]$

b) $\left[5, 5\sqrt{3}\right]$

c) $\left\{x: 6 < x \le \sqrt{40}\right\}$

d) $\left\{x: -\dfrac{51}{4} \le x \le 3\right\}$

e) $\left[-3, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$

f) $\left(\dfrac{\sqrt{30}}{2}, \sqrt{90}\right)$

g) $\left\{x: -\dfrac{7}{2} \le x < -\sqrt{3}\right\}$

h) $\left\{x: -\sqrt[3]{5} < x < \sqrt[3]{5}\right\}$

a) $\left(-1, \dfrac{13}{2}\right] = (-1, +\infty) \cap \left(-\infty, \dfrac{13}{2}\right]$

b) $\left[5, 5\sqrt{3}\right] = \left[-\infty, 5\sqrt{3}\right] \cap [5, +\infty)$

c) $\left\{x: 6 < x \le \sqrt{40}\right\}$

$\left(6, \sqrt{40}\right) = \left(-\infty, \sqrt{40}\right] \cap (6, +\infty)$

d) $\left\{x: -\dfrac{51}{4} \le x \le 3\right\}$

$\left[-\dfrac{51}{4}, 3\right] = \left[-\dfrac{51}{4}, +\infty\right) \cap (-\infty, 3]$

e) $\left[-3, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right] = [-3, +\infty) \cap \left(-\infty, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$

f) $\left(\dfrac{\sqrt{30}}{2}, \sqrt{90}\right) =$

$= \left(\dfrac{\sqrt{30}}{2}, +\infty\right) \cap \left(-\infty, \sqrt{90}\right)$

g) $\left\{x: -\dfrac{7}{2} \le x < -\sqrt{3}\right\}$

$\left[-\dfrac{7}{2}, -\sqrt{3}\right) =$

$= \left[-\dfrac{7}{2}, +\infty\right) \cap \left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$

h) $\left\{x: -\sqrt[3]{5} < x < \sqrt[3]{5}\right\}$

$\left(-\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5}\right) = \left(-\infty, \sqrt[3]{5}\right) \cap \left(-\sqrt[3]{5}, +\infty\right)$

94 **INVENTA.** Define tres intervalos A, B y C y comprueba si se cumple:

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Sean $A = (-2, 5]$, $B = [0, 6)$ y $C = (4, 10]$.

De forma que:

$A \cup (B \cap C) = (-2, 5] \cup (4, 6) = (-2, 6)$

$(A \cup B) \cap (A \cup C) = (-2, 6) \cap (-2, 10] =$
$= (-2, 6)$

95 Determina el conjunto de números reales que cumplen $|x| > 3$.

-3 $+3$

$(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

96 **INVESTIGA.** Si $|x - 2| < 7$, ¿a qué intervalo de números reales pertenece x?

$x \in (-5, 9)$

97 Escribe en forma de intervalo y exprésalo después como intersección de dos semirrectas.

a) La temperatura prevista para mañana variará entre -1 °C de mínima y 13 °C de máxima.

b) Este jugador de fútbol tiene menos de 27 años.

c) El agua se mantiene en estado líquido entre 0 °C y 100 °C.

d) A partir de los 18 años ya se puede votar.

e) Mi presupuesto máximo para comprar un coche es de 11 000 €.

a) $[-1, 13] = (-\infty, 13] \cap [-1, +\infty)$

b) $[0, 27) = [0, +\infty) \cap (-\infty, 27)$

c) $(0, 100) = (0, +\infty) \cap (-\infty, 100)$

d) $[18, +\infty) \rightarrow$ Ya está escrito en forma de semirrecta.

e) $(0, 11\,000] = (0, +\infty) \cap (-\infty, 11\,000]$

3. Utiliza la notación numérica más adecuada a cada contexto

ACTIVIDADES FLASH

98 Indica cuáles de estos números están escritos en notación científica.

a) $4{,}678$
b) $0{,}45 \cdot 10^{5}$
c) $3{,}001 \cdot 10^{17}$
d) $9{,}34 \cdot 2^{10}$
e) $4{,}62 \cdot 10^{-6}$
f) $34{,}709 \cdot 10^{5}$

Están escritos en notación científica a), c) y e).

99 Escribe en notación científica los siguientes números, e indica su mantisa y su orden de magnitud.

a) 15 000 000 000
b) 0,00000051
c) 31 940 000
d) 0,0000000009
e) 4 598 000 000
f) 0,0967254
g) 329 000 000
h) 111 000

a) $1{,}5 \cdot 10^{10}$
Mantisa: 1,5
Orden de magnitud: 10

b) $5{,}1 \cdot 10^{-7}$
Mantisa: 5,1
Orden de magnitud: −7

c) $3{,}194 \cdot 10^{7}$
Mantisa: 3,194
Orden de magnitud: 7

d) $9 \cdot 10^{-10}$
Mantisa: 9
Orden de magnitud: −10

e) $4{,}598 \cdot 10^{9}$
Mantisa: 4,598
Orden de magnitud: 9

f) $9{,}67254 \cdot 10^{-2}$
Mantisa: 9,67254
Orden de magnitud: −2

g) $3{,}29 \cdot 10^{8}$
Mantisa: 3,29
Orden de magnitud: 8

h) $1{,}11 \cdot 10^{5}$
Mantisa: 1,11
Orden de magnitud: 5

100 **MATEMÁTICAS Y… PRENSA.** Escribe las cantidades en notación científica.

Estados Unidos tiene la computadora más poderosa del mundo. Su nombre es Summit, puede hacer 200 cuatrillones de cálculos por segundo y es 100 millones de veces más rápida que un ordenador normal. Una persona necesitaría alrededor de 6 billones de años para hacer los cálculos que esta máquina realiza en un instante.

Estados Unidos tiene la computadora más poderosa del mundo. Su nombre es Summit, puede hacer $2 \cdot 10^{26}$ de cálculos por segundo y es 10^{8} veces más rápida que un ordenador normal. Una persona necesitaría alrededor de $6 \cdot 10^{12}$ años para hacer los cálculos que esta máquina realiza en un instante.

101 Escribe en notación científica las siguientes cantidades.

a) Un año luz: 9 460 000 000 km
b) Velocidad de la luz: 300 000 km/s
c) Diámetro del Sol: 1 400 000 km
d) Carga eléctrica del electrón: 0,0000000000000000001602 C
e) Masa del protón: 0,0000000000000000000001673 kg
f) Distancia de Mercurio al Sol: 58 000 000 km
g) Masa del electrón: 0,00000000000000000000000000009109 kg
h) Distancia entre la Tierra y la Luna: 384 000 000 m

a) $9{,}46 \cdot 10^{9}$ km
b) $3 \cdot 10^{5}$ km/s
c) $1{,}4 \cdot 10^{6}$ km
d) $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C
e) $1{,}673 \cdot 10^{-22}$ kg
f) $5{,}8 \cdot 10^{7}$ km
g) $9{,}109 \cdot 10^{-29}$ kg
h) $3{,}84 \cdot 10^{8}$ m

102 ●○○ Realiza estas operaciones con números en notación científica.

a) $1{,}32 \cdot 10^4 + 2{,}57 \cdot 10^4$

b) $8{,}75 \cdot 10^2 + 9{,}46 \cdot 10^3$

c) $7{,}9 \cdot 10^{-4} - 1{,}3 \cdot 10^{-6}$

d) $5 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2}$

a) $3{,}89 \cdot 10^4$ c) $7{,}887 \cdot 10^{-4}$

b) $1{,}0335 \cdot 10^4$ d) $4{,}997 \cdot 10^2$

INTERNET

103 ●○○ **MATEMÁTICAS Y... QUÍMICA.** Esta tabla muestra los radios atómicos, medidos en angstroms, de algunos elementos químicos.

Helio	Argón	Azufre	Cromo	Titanio	Sodio	Cesio
0,49	0,88	1,09	1,85	2	2,23	3,34

a) ¿Cuál es el radio atómico de estos elementos medido en centímetros?

b) ¿Cuál es la diferencia en centímetros del radio de un átomo de cesio y de uno de argón? ¿Y entre un átomo de titanio y uno de azufre?

a)

	Helio	Argón	Azufre
	$4{,}9 \cdot 10^{-9}$	$8{,}8 \cdot 10^{-9}$	$1{,}09 \cdot 10^{-8}$
Cromo	**Titanio**	**Sodio**	**Cesio**
$1{,}85 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-8}$	$2{,}23 \cdot 10^{-8}$	$3{,}34 \cdot 10^{-8}$

b) Cesio − argón: $(3{,}34 - 0{,}88) \cdot 10^{-8} =$
$= 2{,}46 \cdot 10^{-8}$ cm

Titanio − azufre: $(2 - 1{,}09) \cdot 10^{-8} =$
$= 0{,}91 \cdot 10^{-8} = 9{,}1 \cdot 1^{-9}$ cm

104 ●○○ Efectúa las siguientes operaciones.

a) $7{,}3 \cdot 10^4 \cdot 5{,}25 \cdot 10^{-3}$

b) $8{,}91 \cdot 10^{-5} \cdot 5{,}7 \cdot 10^{14}$

c) $(8{,}3 \cdot 10^6) : (5{,}37 \cdot 10^2)$

d) $(9{,}5 \cdot 10^{-6}) : (3{,}2 \cdot 10^3)$

a) $3{,}8325 \cdot 10^2$

b) $5{,}0787 \cdot 10^{10}$

c) $1{,}545623836 \cdot 10^4$

d) $2{,}96875 \cdot 10^{-9}$

105 ●●○ **MATEMÁTICAS Y... BIOLOGÍA.** La frecuencia media cardiaca de una persona es de 72 latidos por minuto. Calcula y escribe el resultado en notación científica.

a) Si la esperanza de vida en España es de 82,83 años, ¿cuántas veces latirá el corazón en ese tiempo?

b) Si la esperanza de vida en el mundo es de 72,1 años, y se estima que hay 7,5 miles de millones de personas, ¿cuántos latidos en total tendrán todas las personas del mundo durante su vida?

a) $72 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 \cdot 82{,}83 =$
$= 3\,134\,552\,256 = 3{,}13 \cdot 10^9$ latidos

b) $72 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 \cdot 72{,}1 \cdot 7{,}5 \cdot 10^9 =$
$= 2{,}04637104 \cdot 10^{19}$ latidos

Esta actividad puede utilizarse para trabajar el ODS 3, salud y bienestar.

106 ●●○ **INVENTA.** ¿Cuántos números puedes decir en un segundo? ¿Cuántos segundos tardarías en decir un número muy grande? Haz una estimación de los números que podrías decir en toda tu vida si no paras ni para dormir. Escríbelo en notación científica.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Diciendo 4 números en un segundo:

$82{,}83 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 4 = 1{,}045 \cdot 10^{10}$

INTERNET

107 ●●○ **MATEMÁTICAS Y... ASTRONOMÍA.** El sistema estelar más cercano a nuestro planeta es Alfa Centauri, que está a 4,367 años luz. Está compuesto por tres estrellas: Alfa Centauri A, Alfa Centauri B y Próxima Centauri.
La separación media entre Próxima Centauri y Alfa Centauri A y B es aproximadamente de 0,06 parsecs, 0,2 años luz o 13 000 unidades astronómicas (UA), equivalente a 400 veces el tamaño de la órbita de Neptuno.

a) ¿A cuántos kilómetros está Alfa Centauri de la Tierra?

b) ¿A cuántos años luz equivale un parsec?

c) ¿A cuántas unidades astronómicas equivale un año luz? ¿Y un parsec?

d) ¿Cuántos kilómetros mide la órbita de Neptuno?

Como 1 año luz son $9{,}46 \cdot 10^{12}$ km:

a) $\dfrac{4{,}367 \cdot 9{,}46 \cdot 10^{12}}{1} = 4{,}13 \cdot 10^{13}$ km

Alfa Centauri está a $4{,}13 \cdot 10^{13}$ km de la Tierra.

b) $\dfrac{1 \cdot 0{,}2}{0{,}06} = 3{,}\widehat{3}$

Un parsec equivale a años luz. 3,3.

c) $\dfrac{1 \cdot 13\,000}{0{,}2} = 6{,}5 \cdot 10^4$

1 año luz son $6{,}5 \cdot 10^4$ UA.

$\dfrac{1 \cdot 13\,000}{0{,}06} = 2{,}1\widehat{6} \cdot 10^5$

1 parsec son $2{,}1\widehat{6} \cdot 10^5$ UA.

d) $9{,}46 \cdot 10^{12} \cdot 0{,}2 : 400 = 4{,}73 \cdot 10^9$ km mide la órbita de Neptuno.

108 ●●○ **MATEMÁTICAS Y... QUÍMICA.** Distintos experimentos han permitido medir el tamaño de los átomos. Considerado como una esfera, el átomo tiene un radio de unos 10^{-10} m y el radio del núcleo es de unos 10^{-14} m. ¿Cuántas veces es mayor el átomo que el núcleo?

$10^{-10} : 10^{-14} = 10^4$ veces mayor el radio del átomo que el de su núcleo.

109 ●●○ **MATEMÁTICAS Y... ASTRONOMÍA.** La distancia entre la Tierra y Júpiter es de $6{,}32 \cdot 10^6$ km. Una nave que hiciera el viaje entre los dos planetas en un año, ¿qué velocidad debería llevar?

$$v = \frac{s}{t} = \frac{6{,}32 \cdot 10^6}{365 \cdot 24} = 7{,}21 \cdot 10^2 \text{ km/h}$$

110 ●●● **RETO.** Encuentra un número tal que su raíz cuadrada sea $a \cdot 10^{2020}$.

$(a \cdot 10^{2\,020})^2 = a^2 \cdot 10^{4\,040}$ es el número que buscamos.

4. Obtiene cotas de error y estimaciones en cálculos aproximados

111 ●●○ Redondea el resultado a las diezmilésimas.

a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

b) $\dfrac{6}{7} + \sqrt{7}$

c) $\sqrt{5} - \sqrt{3}$

d) $\dfrac{4}{15} + \sqrt{8}$

a) 3,1463

b) 3,5029

c) 0,5040

d) 3,0951

112 ●○○ **MATEMÁTICAS E... HISTORIA.** A lo largo de la historia se han utilizado diferentes aproximaciones del número π (cuyo valor es 3,14159265...):

- En la Biblia, el valor de π es 3.
- En el antiguo Egipto se estimaba dicho valor en $\dfrac{256}{81}$, fracción que resulta de suponer que el área de un círculo coincide con la de un cuadrado que tenga como lado $\dfrac{8}{9}$ de la medida de su diámetro.
- En Mesopotamia, el valor de π era $3 \cdot \dfrac{1}{8} = 3{,}125$.
- En la antigua China, $\dfrac{355}{113}$.
- Y, finalmente, en los cálculos prácticos se usa 3,14.

Halla los errores absoluto y relativo de cada aproximación, tomando como valor exacto de $\pi = 3{,}14159265$.

- En la Biblia: $E_a = 0{,}14159265$
  $E_r = 0{,}0450703$
- En el antiguo Egipto: $E_a = 0{,}01890$
  $E_r = 0{,}006016$
- En Mesopotamia: $E_a = 0{,}01659265$
  $E_r = 0{,}0052816$
- En la antigua China: $E_a = 2{,}70 \cdot 10^{-7}$
  $E_r = 8{,}60 \cdot 10^{-8}$
- En cálculos prácticos: $E_a = 0{,}00159265$
  $E_r = 0{,}00050696$

113 Opera y redondea el resultado a las décimas.

a) $43{,}295 + 4{,}57 - 7{,}367$
b) $5{,}32 + 4{,}05 \cdot 7{,}361$
c) $3{,}56 \cdot (7{,}4009 - 3{,}48)$
d) $7{,}37 - 5{,}3519 : 2{,}1$

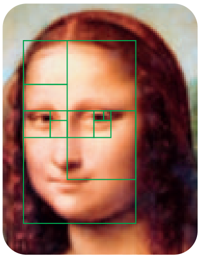
a) $40{,}498 \rightarrow 40{,}5$
b) $35{,}31205 \rightarrow 35{,}3$
c) $13{,}958404 \rightarrow 14{,}0$
d) $4{,}8214\overparen{761904} \rightarrow 4{,}8$

114 **INVESTIGA.** ¿Para qué número sería 5 432,723 una aproximación a las milésimas por defecto? ¿Es la respuesta única? ¿Cuántas respuestas hay?

Un número posible es 5 432,7231. La respuesta no es única, ya que hay infinitos números.

INTERNET

115 **MATEMÁTICAS E… HISTORIA.** Desde la Antigüedad aparece con frecuencia el número de oro, Φ, en proporciones de la naturaleza, así como en las medidas de construcciones, o en obras de arte como la *Gioconda*.



$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803\ldots$$

a) Escribe la aproximación por redondeo hasta las centésimas del número de oro.

b) Halla los errores absoluto y relativo.

a) $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803$

$\xrightarrow{\text{aproximación}} \Phi = 1{,}62$

b) $E_a = |V_{\text{real}} - V_{\text{aproximado}}| = |-1{,}62| =$
$= 0{,}001966 \approx 0{,}002$

$E_r = \left|\dfrac{E_a}{V_{\text{real}}}\right| = \left|\dfrac{0{,}002}{\Phi}\right| = 0{,}0012361$

116 **INVESTIGA.** ¿Existe algún caso en que la aproximación por exceso y por defecto coincidan? Y si se considera el redondeo, ¿puede coincidir esta aproximación con la aproximación por exceso o por defecto?

Las aproximaciones por exceso y por defecto solo coinciden cuando no hay más cifras que el orden al que se aproxima. Por ejemplo, si se aproxima a las centésimas y no hay milésimas.

Las aproximaciones a las milésimas del número 4,23 por exceso y por defecto coinciden y son 4,230.

La aproximación por redondeo coincide con la aproximación por defecto si la cifra anterior al orden considerado es menor que 5, y coincide con la aproximación por exceso en el resto de casos.

117 **MATEMÁTICAS Y… FÍSICA.** Cuando se dice que la masa de la Tierra es $5{,}972 \cdot 10^{24}$ kg se está dando una medida redondeada. ¿Entre qué valores está comprendida?

La masa de la Tierra estaría comprendida entre $5{,}9715 \cdot 10^{24}$ y $5{,}7925 \cdot 10^{24}$ kg.

118 ¿Se puede escribir $\pi = \dfrac{355}{113}$? Justifica la respuesta y di cuál es el orden del error cometido.

Sí, es una aproximación de π, pues $\dfrac{355}{113} = 3{,}1415929204$, que es una aproximación por exceso, siendo el orden de error cometido 7, pues $E_a = 2{,}67 \cdot 10^{-7}$.

119 **RETO.** Obtén una aproximación de π con 4 cifras decimales mediante un número racional cuyo denominador sea 784.

Obtenemos el numerador: $\pi = \dfrac{x}{784}$; $x = 2\,463{,}0086\ldots$

Puesto que queremos que tenga solo 4 cifras decimales, el número racional es $\dfrac{2\,463}{784}$.

120 ●●○ Obtén el error absoluto y el error relativo al redondear los siguientes números.

a) 4,3964 a las centésimas.

b) $\frac{3}{11}$ a las diezmilésimas.

a) 4,3964 a las centésimas → 4,40

$E_a = |4{,}3965 - 4{,}4| = 0{,}0035$

$E_r = \frac{0{,}0035}{4{,}3965} = 0{,}000796$

b) $\frac{3}{11}$ a las diezmilésimas → 0,2727

$E_a = |0{,}272727 - 0{,}2727| = 0{,}000027$

$E_r = \frac{E_a}{0{,}272727} = 0{,}000099$

121 ●○○ **MATEMÁTICAS Y... FÍSICA.** Existen dos tipos de balanzas de cocina: las analógicas que marcan los pesos de 10 g en 10 g, y las digitales que los marcan de gramo en gramo. Si al pesar harina marca 250 g, ¿entre qué valores estará comprendido el peso exacto en cada balanza? ¿Cuáles son los errores relativos?

Al usar la balanza analógica se sabe que el peso exacto está entre 240 y 260 g.

Al usar la balanza digital se sabe que el peso exacto está entre 249 y 251 g.

$E_r = \left|\frac{10}{250}\right| = 0{,}04 = 4\,\%$ en la analógica.

$E_r = \left|\frac{1}{250}\right| = 0{,}004 = 0{,}4\,\%$ en la digital.

122 ●○○ En la medida de 2 m se comete un error de 2 mm y en la de 400 km un error de 400 m. ¿Qué error relativo es mayor?

Medida de 2 m →

$\rightarrow E_r = \left|\frac{2}{2\,000}\right| = 0{,}001 = 0{,}1\,\%$

Medida de 400 km →

$\rightarrow E_r = \left|\frac{400}{400\,000}\right| = 0{,}001 = 0{,}1\,\%$

El error relativo cometido es el mismo en los dos casos.

123 ●●○ Aproxima el número $\frac{1}{7}$ para que el error sea menor que una centésima.

Para que el error absoluto cometido sea menor que una centésima, hay que calcular el cociente con dos cifras decimales.
La aproximación pedida es 0,14.

124 ●●○ Aproxima el número 12,3456 de forma que el error absoluto sea menor que 0,001.

Para que el error absoluto sea menor que una milésima, se escribe el número con tres cifras decimales. Por tanto, la aproximación pedida es 12,345.

125 ●●○ Una aproximación por exceso de un número es 43,32. Si se cometió un error del 1 %, determina el número exacto con dos decimales.

$\left|\frac{x - 43{,}32}{x}\right| = 0{,}01 \rightarrow$

$\rightarrow |x - 43{,}32| = 0{,}01x \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} x - 43{,}32 = 0{,}01x \rightarrow x = 43{,}\widehat{75} \\ x - 43{,}32 = -0{,}01x \rightarrow x = 42{,}\widehat{8910} \end{cases}$

En este caso, puesto que es una aproximación por exceso, el valor real ha de ser menor que el aproximado, por tanto, la respuesta es 42,89.

5. Realiza operaciones con raíces

Radicales

ACTIVIDADES FLASH

126 ●○○ Halla el valor numérico de estos radicales.

a) $\sqrt{81}$

b) $\sqrt[3]{-27}$

c) $\sqrt[4]{625}$

d) $\sqrt[3]{125}$

e) $-\sqrt[3]{-8}$

f) $-\sqrt{64}$

a) ± 9

b) -3

c) ± 5

d) 5

e) 2

f) -8

ACTIVIDADES FLASH

127 Resuelve las ecuaciones.

a) $x^2 = 16$
b) $x^3 + 8 = 0$
c) $x^2 + 9 = 0$
d) $x^4 - 32 = 0$
e) $x^3 - 8 = 0$
f) $x^5 = 32$
g) $x^5 = -32$
h) $x^2 + 1 = 0$

a) $x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$
b) $x = \sqrt[3]{-8} = -2$
c) $x = \sqrt{-9} \notin \mathbb{R}$
d) $x = \sqrt[4]{32} = \pm 2\sqrt[4]{2}$
e) $x = \sqrt[3]{8} = 2$
f) $x = \sqrt[5]{32} = 2$
g) $x = \sqrt[5]{-32} = -2$
h) $x = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$

128 Transforma en radicales las siguientes potencias de exponente fraccionario.

a) $2^{\frac{1}{2}}$
b) $7^{\frac{3}{5}}$
c) $9^{-\frac{1}{4}}$
d) $-8^{-\frac{2}{3}}$

a) $\sqrt{2}$
b) $\sqrt[5]{7^3}$
c) $\pm\dfrac{1}{\sqrt[4]{9}} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
d) $-\dfrac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = -\dfrac{1}{4}$

129 Expresa como potencias de exponente fraccionario estos radicales.

a) $\sqrt[5]{9^4}$
b) $\sqrt[4]{7^3}$
c) $\sqrt{7^{-3}}$
d) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{3^2}}$
e) $\sqrt[3]{-9^{-2}}$
f) $\dfrac{1}{\sqrt{8^{-5}}}$

a) $\sqrt[5]{9^4} = 9^{\frac{4}{5}}$
b) $\sqrt[4]{7^3} = 7^{\frac{3}{4}}$
c) $\sqrt{7^{-3}} = 7^{-\frac{3}{2}}$
d) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{3^2}} = 3^{-\frac{2}{5}}$
e) $\sqrt[3]{-9^{-2}} = -9^{-\frac{2}{3}}$
f) $\dfrac{1}{\sqrt{8^{-5}}} = 8^{\frac{5}{2}}$

ACTIVIDADES FLASH

130 Escribe dos radicales equivalentes a cada uno de los siguientes.

a) $\sqrt[3]{2^5}$
b) $\sqrt[12]{7^4}$
c) $\sqrt[6]{5^3}$
d) $\sqrt{2^3}$
e) $\sqrt[8]{2^6}$
f) $\sqrt[20]{3^{15}}$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $\sqrt[6]{2^{10}} = \sqrt[9]{2^{15}}$
b) $\sqrt[6]{7^2} = \sqrt[120]{7^{40}}$
c) $\sqrt{5} = \sqrt[4]{5^2}$
d) $\sqrt[4]{2^6} = \sqrt[6]{2^9}$
e) $\sqrt[4]{2^3} = \sqrt[12]{2^9}$
f) $\sqrt[4]{3^3} = \sqrt[8]{3^6}$

131 Simplifica los radicales que aparecen a continuación.

a) $\sqrt[3]{16}$
b) $\sqrt[3]{54}$
c) $\sqrt[4]{32}$
d) $\sqrt{27}$
e) $\sqrt{75}$
f) $\sqrt[5]{128}$
g) $\sqrt[6]{27}$
h) $\sqrt[8]{625}$
i) $\sqrt[3]{343}$

a) $\sqrt[3]{2^4} = 2^{\frac{4}{3}} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2\sqrt[3]{2}$
b) $\sqrt[3]{3^3 \cdot 2} = 3^{\frac{3}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 3 \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 3\sqrt[3]{2}$
c) $\sqrt[4]{2^5} = 2^{\frac{5}{4}} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{4}} = 2\sqrt[4]{2}$
d) $\sqrt{3^3} = 3^{\frac{3}{2}} = 3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{3}$
e) $\sqrt{3 \cdot 5^2} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 5 = 5\sqrt{3}$
f) $\sqrt[5]{2^7} = 2^{\frac{7}{5}} = 2 \cdot 2^{\frac{2}{5}} = 2\sqrt[5]{2^2}$
g) $\sqrt[6]{3^3} = 3^{\frac{3}{6}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$
h) $\sqrt[8]{5^4} = 5^{\frac{4}{8}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$
i) $\sqrt[3]{7^3} = 7$

132 Escribe en cada caso si el desarrollo de la igualdad es verdadero o falso. Si es falso, corrígelo.

a) $\sqrt{8} = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt[3]{8^3}$
b) $\sqrt[3]{3^4} = \sqrt[6]{9^4} = \sqrt{3^8}$
c) $\sqrt[5]{25^{10}} = \sqrt{5^{10}} = \sqrt[3]{5^{12}}$
d) $\sqrt[8]{3^6} = \sqrt[4]{27} = \sqrt[12]{3^9}$

a) Falso, porque $\sqrt{8} = \sqrt[4]{2^6} = 2\sqrt{2}$

b) Falso, porque $\sqrt[3]{3^4} = \sqrt[6]{9^4} = 3\sqrt[3]{3}$

c) Falso, porque $\sqrt[5]{25^{10}} = 5^4 = \sqrt{5^8}$

d) Verdadero

133 Calcula.

a) $\dfrac{5^{-3}\cdot 5^{-1}\cdot 5^{2}}{5^{0}+5^{6}}$ c) $\dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}\right)^{3}\left(\sqrt{5}\right)^{3}}{\left(5\sqrt{2}\right)^{2}}$

b) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{4}$ d) $\dfrac{9^{1/2}\cdot 3^{-1}\cdot 2^{3/2}}{\sqrt{2}}$

a) $\dfrac{5^{-2}}{1+5^{6}} = \dfrac{1}{5^{2}+5^{8}} = \dfrac{1}{390\,650}$

b) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{6}$

c) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

d) $\sqrt[6]{2}$

134 Expresa como potencias de base 3.

a) $9^{-\frac{5}{2}}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{27}}$

b) $81^{-\frac{3}{4}}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{243}}$

a) 3^{-5} c) $3^{-\frac{3}{5}}$

b) 3^{-3} d) $3^{-\frac{3}{5}}$

135 **RETO.** Demuestra, sin resolver las raíces, que $\sqrt[6]{6} < \sqrt[3]{3}$.

$\sqrt[6]{6} < \sqrt[6]{9} = \sqrt[3]{3}$

Puesto que $6 < 9$, sus raíces sextas también cumplen la desigualdad.

136 Escribe como potencias de exponente fraccionario estos radicales.

a) $\sqrt{a\sqrt{a}}$ d) $\sqrt[4]{a^{-5}}$ g) $\left(\sqrt{a}\right)^{3}$

b) $\sqrt[3]{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$ e) $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ h) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{a}}$

c) $\sqrt{\dfrac{a}{\sqrt{a}}}$ f) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}}$ i) $\sqrt[4]{\sqrt{\dfrac{1}{a}}}$

a) $\left(a\cdot a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{4}}$

b) $\left(a\left(a\cdot a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(a\cdot a^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{7}{12}}$

c) $\left(\dfrac{a}{a^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{4}}$

d) $a^{-\frac{5}{4}}$

e) $\dfrac{1}{a^{\frac{1}{2}}} = a^{-\frac{1}{2}}$

f) $\dfrac{1}{a^{\frac{1}{4}}} = a^{-\frac{1}{4}}$

g) $a^{\frac{3}{2}}$

h) $a^{-\frac{1}{3}}$

i) $\sqrt[8]{\dfrac{1}{a}} = a^{-\frac{1}{8}}$

137 Expresa mediante un solo radical.

a) $\sqrt[5]{3\sqrt{5}}$ d) $\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

b) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}}$ e) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}$

c) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}$ f) $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{5}}}$

a) $\left(3\cdot 5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}} = 3^{\frac{1}{5}}\cdot 5^{\frac{1}{10}} = 3^{\frac{2}{10}}\cdot 5^{\frac{1}{10}} =$
$= \sqrt[10]{3^{2}\cdot 5}$

b) $\left(\dfrac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(2^{\frac{1}{6}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{2}$

c) $\left(\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{3}$

d) $\left(\dfrac{1}{2^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(2^{\frac{-1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{-1}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$

e) $\left(2^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{2}$

f) $\dfrac{1}{\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{5^{\frac{1}{4}}} = 5^{\frac{-1}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{5}}$

138 **RETO.** Simplifica los siguientes radicales.

a) $\sqrt{a^2+4-4a}$

b) $\sqrt{\dfrac{1}{2}+2a^2+2a}$

a) $\sqrt{(a-2)^2}=a-2$

b) $\sqrt{\left(\sqrt{2}\,a+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{2}\,a+\dfrac{1}{\sqrt{2}}=$

$=\sqrt{2}\,a+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\cdot\left(a+\dfrac{1}{2}\right)$

139 Extrae los factores que puedas de cada radical.

a) $\sqrt{125}$ d) $\sqrt[3]{250}$ g) $\sqrt[4]{224}$

b) $\sqrt{80}$ e) $\sqrt[3]{1\,080}$ h) $\sqrt[5]{-486}$

c) $\sqrt[3]{189}$ f) $\sqrt[4]{720}$ i) $\sqrt{3\,528}$

a) $5\sqrt{5}$ f) $2\sqrt[4]{45}$

b) $4\sqrt{5}$ g) $2\sqrt[4]{14}$

c) $3\sqrt[3]{7}$ h) $-3\sqrt[5]{2}$

d) $5\sqrt[3]{2}$ i) $42\sqrt{2}$

e) $6\sqrt[3]{5}$

140 Calcula descomponiendo el radicando en factores primos.

a) $\sqrt{729}$ c) $\sqrt[4]{50\,625}$

b) $\sqrt[3]{64\,000}$ d) $\sqrt[5]{59\,049}$

a) $\sqrt{3^6}=\pm 3^3=\pm 27$

b) $\sqrt[3]{2^9\cdot 5^3}=2^3\cdot 5=40$

c) $\sqrt[4]{3^4\cdot 5^4}=\pm 3\cdot 5=\pm 15$

d) $\sqrt[5]{3^{10}}=3^2=9$

141 Extrae factores de los radicales.

a) $\sqrt{32x^3y^2}$

b) $\sqrt[3]{5^5x^6}$

c) $\sqrt[3]{125x^7y^2}$

d) $\sqrt[4]{256x^3y^{15}}$

e) $\sqrt[4]{x^{12}y^9z^{19}}$

f) $\sqrt[5]{729x^4y^{22}z^{15}}$

a) $4xy\sqrt{2x}$

b) $5x^2\sqrt[3]{5^2}$

c) $5x^2\sqrt[3]{xy^2}$

d) $4y^3\sqrt[4]{x^3y^3}$

e) $x^3y^2z^4\sqrt[4]{yz^3}$

f) $3y^4z^3\sqrt[5]{3x^4y^2}$

142 Introduce los factores dentro del radical y simplifica la expresión todo lo que puedas.

a) $3\sqrt{6}$ c) $3\sqrt[3]{-9^2}$

b) $2\sqrt[5]{3}$ d) $2^3\sqrt[4]{8}$

a) $\sqrt{3^2\cdot 6}=\sqrt{3^3\cdot 2}=\sqrt{54}$

b) $\sqrt[5]{2^5\cdot 3}=\sqrt[5]{96}$

c) $\sqrt[3]{-3^3\cdot 3^4}=\sqrt[3]{-3^7}$

d) $\sqrt[4]{2^{12}\cdot 2^3}=\sqrt[4]{2^{15}}$

143 Introduce los factores dentro del radical.

a) $2\sqrt[3]{5}$ d) $\dfrac{3}{5}\sqrt{2}$

b) $4\sqrt[4]{20}$ e) $\dfrac{1}{2}\sqrt[4]{6}$

c) $3\sqrt[5]{15}$ f) $2\sqrt[3]{7}$

a) $\sqrt[3]{2^3\cdot 5}=\sqrt[3]{40}$

b) $\sqrt[4]{4^4\cdot 20}=\sqrt[4]{5\,120}$

c) $\sqrt[5]{3^5\cdot 15}=\sqrt[5]{3\,645}$

d) $\sqrt{\dfrac{3^2\cdot 2}{5^2}}=\sqrt{\dfrac{18}{25}}$

e) $\sqrt[4]{\dfrac{1\cdot 6}{2^4}}=\sqrt[4]{\dfrac{6}{16}}=\sqrt[4]{\dfrac{3}{8}}$

f) $\sqrt[3]{2^3\cdot 7}=\sqrt[3]{56}$

144 Introduce los factores dentro del radical.

a) $5\sqrt[3]{\dfrac{1}{5}}$ b) $\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}$ c) $\dfrac{1}{7}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{3}}{4}$

a) $5\sqrt[3]{\dfrac{1}{5}}=\sqrt[3]{25}$

b) $\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}=\sqrt[3]{\dfrac{18}{125}}$

c) $\dfrac{1}{7}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{3}}{4}=\sqrt[3]{\dfrac{3}{21\,952}}$

145 Copia y completa las potencias que faltan.

a) $2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^{\square} \cdot 5}$

b) $3^{\square}\sqrt{2} = \sqrt{3^6 \cdot 2}$

c) $\dfrac{1}{2}\sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{\dfrac{5}{2^{\square}}}$

d) $\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{\dfrac{2^{\square} \cdot 7}{3^{\square}}}$

e) $3^{\square}\sqrt{\dfrac{2}{5}} = \sqrt{\dfrac{3^6 \cdot 2}{5}}$

f) $\dfrac{\sqrt[3]{5}}{3^2} = \sqrt[3]{\dfrac{5}{3^{\square}}}$

a) 3 c) 4 e) 3

b) 3 d) 3 f) 6

146 Introduce los factores dentro del radical si es posible.

a) $a\sqrt{\dfrac{4a-1}{2a}}$

b) $\dfrac{4ab}{c}\sqrt[4]{\dfrac{c^2b}{8a}}$

c) $-2ab^2\sqrt[3]{ab}$

d) $\dfrac{2}{a}\sqrt{\dfrac{3a}{8}}$

e) $5+\sqrt{2}$

f) $-a^2\sqrt[3]{a}$

a) $a \cdot \sqrt{\dfrac{4a-1}{2a}} = \sqrt{\dfrac{a^2(4a-1)}{2a}} = \sqrt{\dfrac{4a^2-a}{2}}$

b) $\dfrac{4ab}{c} \cdot \sqrt[4]{\dfrac{c^2b}{8a}} = \sqrt[4]{\dfrac{4^4a^4b^4c^2b}{c^4 8a}} = \sqrt[4]{\dfrac{2^8a^4b^5c^2}{2^3ac^4}} = \sqrt[4]{\dfrac{2^5a^3b^5}{c^2}}$

c) $-2ab^2\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{-2^3a^3b^6ab} = \sqrt[3]{-2^3a^4b^7}$

d) $\dfrac{2}{a} \cdot \sqrt{\dfrac{3a}{8}} = \sqrt{\dfrac{2^2 3a}{2^3a^2}} = \sqrt{\dfrac{3}{2a}}$

e) No es posible introducir factores, puesto que 5 no es factor.

f) $-a^2\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{-a^6a} = \sqrt[3]{-a^7}$

147 Realiza las siguientes sumas y restas de radicales.

a) $\sqrt{32} - \sqrt{8} + \sqrt{98}$

b) $5\sqrt[3]{81} + 4\sqrt[3]{108}$

c) $\sqrt{6} + 7\sqrt{24} - \dfrac{2}{3}\sqrt{54} - \sqrt{18}$

d) $\sqrt{75} - 2\sqrt{12} - \sqrt{363} + 4\sqrt{3}$

a) $\sqrt{32} - \sqrt{8} + \sqrt{98} =$
$= 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$

b) $5\sqrt[3]{81} + 4\sqrt[3]{108} = 15\sqrt[3]{3} + 12\sqrt[3]{4}$

c) $\sqrt{6} + 7\sqrt{24} - \dfrac{2}{3}\sqrt{54} - \sqrt{18} =$
$= \sqrt{6} + 7 \cdot 2\sqrt{6} - 2\sqrt{6} - 3\sqrt{2} =$
$= 13\sqrt{6} - 3\sqrt{2}$

d) $\sqrt{75} - 2\sqrt{12} - \sqrt{363} + 4\sqrt{3} =$
$= 5\sqrt{3} - 4\sqrt{3} - 11\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = -6\sqrt{3}$

148 **RETO.** Demuestra la siguiente igualdad.

$$\sqrt{11 + 3\sqrt{8}} = 3 + \sqrt{2}$$

$\sqrt{11 + 3\sqrt{8}} = \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} =$
$= \sqrt{\left(3 + \sqrt{2}\right)^2} = 3 + \sqrt{2}$

149 **INVESTIGA.** La expresión $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ es un número entero. Averigua cuál es.

Al elevar al cuadrado la expresión se obtiene un cuadrado perfecto.

$\left(\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}\right)^2 = 3 + 2\sqrt{2} +$
$+ 3 - 2\sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} =$
$= 6 - 2 \cdot 1 = 4$

$\sqrt{\left(\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{4} \rightarrow$
$\rightarrow \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = 2$

150 Halla el número entero que es igual al valor de la siguiente expresión con radicales.

$$2\sqrt{10} \cdot \sqrt[4]{25} \cdot \sqrt[6]{8}$$

$2\sqrt{10} \cdot \sqrt[4]{25} \cdot \sqrt[6]{8} = 2(2 \cdot 5)^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{2}{4}} \cdot 2^{\frac{3}{6}} =$
$= 2 \cdot 2 \cdot 5 = 20 \in \mathbb{Z}$

151 Realiza las siguientes operaciones y simplifica.

a) $\left(5\sqrt{2}+3\right)\cdot\left(2+\sqrt{2}\right)$

b) $\left(1-2\sqrt{5}\right)\cdot\left(3+\sqrt{5}\right)$

c) $\left(-\sqrt{3}+5\right)\cdot\left(5-2\sqrt{3}\right)$

d) $\left(\sqrt{2}+2\sqrt{2}\right)\cdot\left(3-\sqrt{2}\right)$

e) $\left(\sqrt{2}-5\right)\cdot\left(4\sqrt{2}-3\right)$

f) $\left(-2\sqrt{7}-5\right)\cdot\left(\sqrt{7}-3\sqrt{7}\right)$

a) $\left(5\sqrt{2}+3\right)\cdot\left(2+\sqrt{2}\right)=16+13\sqrt{2}$

b) $(1-2\sqrt{5})\cdot(3+\sqrt{5})=$
$=3+\sqrt{5}-6\sqrt{5}-10=-7-5\sqrt{5}$

c) $\left(-\sqrt{3}+5\right)\cdot\left(5-2\sqrt{3}\right)=31-15\sqrt{3}$

d) $\left(\sqrt{2}+2\sqrt{2}\right)\cdot\left(3-\sqrt{2}\right)=$
$=3\sqrt{2}\cdot\left(3-\sqrt{2}\right)=-6+9\sqrt{2}$

e) $\left(\sqrt{2}-5\right)\cdot\left(4\sqrt{2}-3\right)=23\left(1-\sqrt{2}\right)$

f) $\left(-2\sqrt{7}-5\right)\cdot\left(\sqrt{7}-3\sqrt{7}\right)=$
$=\left(-2\sqrt{7}-5\right)\cdot\left(-2\sqrt{7}\right)=28+10\sqrt{7}$

152 Realiza las siguientes operaciones con radicales.

a) $\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[3]{a^5}\cdot\sqrt[6]{a^4}$

b) $\sqrt[3]{3a^2b}\cdot\sqrt{2ab^3}$

c) $\sqrt[5]{2a^3b^4}:\sqrt[3]{4ab^2}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{ab}}\cdot\sqrt{a\sqrt[3]{b}}$

a) $a^{\frac{3}{4}}\cdot a^{\frac{5}{3}}\cdot a^{\frac{4}{6}}=a^{\frac{9}{12}}\cdot a^{\frac{20}{12}}\cdot a^{\frac{8}{12}}=\sqrt[12]{a^{37}}=$
$=a^3\sqrt[12]{a}$

b) $(3a^2b)^{\frac{1}{3}}\cdot(2ab^3)^{\frac{1}{2}}=(3a^2b)^{\frac{2}{6}}\cdot(2ab^3)^{\frac{3}{6}}=$
$=\sqrt[6]{3^2a^4b^2 2^3a^3b^9}=\sqrt[6]{2^3 3^2a^7b^{11}}=$
$=ab\sqrt[6]{2^3 3^2ab^5}$

c) $(2a^3b^4)^{\frac{1}{5}}:(4ab^2)^{\frac{1}{3}}=(2a^3b^4)^{\frac{3}{15}}:(4ab^2)^{\frac{5}{15}}=$
$=\sqrt[15]{\frac{2^3a^9b^{12}}{4^5a^5b^{10}}}=\sqrt[15]{\frac{a^4b^2}{2^7}}$

d) $\left((ab)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(ab^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{6}}=$
$=a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a^2b}$

153 Halla el resultado de estos productos.

a) $\sqrt{7-2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{7+2\sqrt{6}}$

b) $\sqrt[3]{5\sqrt{3}-1}\cdot\sqrt[3]{5\sqrt{3}+1}$

c) $\sqrt[4]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

d) $\sqrt[3]{4\sqrt{2}+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{4\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

a) $\sqrt{7-2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{7+2\sqrt{6}}=$
$=\sqrt{\left(7-2\sqrt{6}\right)\left(7+2\sqrt{6}\right)}=$
$=\sqrt{49-24}=\sqrt{25}=5$

b) $\sqrt[3]{5\sqrt{3}-1}\cdot\sqrt[3]{5\sqrt{3}+1}=$
$=\sqrt[3]{\left(5\sqrt{3}-1\right)\left(5\sqrt{3}+1\right)}=$
$=\sqrt[3]{75-1}=\sqrt[3]{74}$

c) $\sqrt[4]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=$
$=\sqrt[4]{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}=$
$=\sqrt[4]{3-2}=1$

d) $\sqrt[3]{4\sqrt{2}+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{4\sqrt{2}-2\sqrt{3}}=$
$=\sqrt[3]{\left(4\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)\cdot\left(4\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)}=$
$=\sqrt[3]{32-12}=\sqrt[3]{20}$

154 Demuestra que los números $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ y $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ son inversos.

Si son inversos su producto ha de ser 1, como demostramos a continuación:

$\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)}{2\cdot 2}=$
$=\frac{5-1}{4}=1$

155 **RETO.** ¿Cuánto tiene que valer a para que se cumpla que $\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[5]{a^4}=1$? ¿Y para que $\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[5]{a^4}=a$?

$\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[5]{a^4}=\sqrt[60]{a^{40}\cdot a^{45}\cdot a^{48}}=\sqrt[60]{a^{133}}$

Igualamos a 1 para despejar:
$\sqrt[60]{a^{133}}=1\rightarrow a=1$

$\sqrt[60]{a^{133}}=a\rightarrow a^{60}\cdot(a^{73}-1)=0$, por tanto, $a=0$ o bien $a=1$

156 Realiza las operaciones con radicales que aparecen a continuación.

a) $\left(\sqrt{\frac{a}{9}+\frac{a}{16}}\right)^{-2}$ c) $\left(\sqrt{\frac{a}{2}}-\sqrt{2a}\right)^{2}$

b) $\left(\sqrt{\frac{a}{2}+\frac{2a}{5}}\right)^{-4}$ d) $\left(\sqrt{6a}+\sqrt{\frac{2a}{3}}\right)^{2}$

a) $\left(\sqrt{\frac{16a+9a}{144}}\right)^{-2}=\left(\sqrt{\frac{25a}{144}}\right)^{-2}=$

$=\left(\frac{5}{12}\sqrt{a}\right)^{-2}=\frac{144}{25a}$

b) $\left(\sqrt{\frac{9a}{10}}\right)^{-4}=\left(\frac{9a}{10}\right)^{\frac{-4}{2}}=\left(\frac{10}{9a}\right)^{2}=\frac{100}{81a^2}$

c) $\frac{a}{2}+2a-2a=\frac{a}{2}$

d) $6a+\frac{2a}{3}+4a=10a+\frac{2a}{3}=\frac{32a}{3}$

157 Realiza las operaciones que aparecen a continuación y simplifica.

a) $\frac{\sqrt[4]{2^3}\cdot 2^{-4}\cdot \sqrt[3]{2}}{2^2\cdot\sqrt{2}\cdot 2^{-\frac{5}{2}}}$

b) $\left(81^{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt[8]{3}}\right):\sqrt{3}$

c) $\left(\sqrt{14+\sqrt{7-\sqrt[4]{81}}}\right)^{-\frac{1}{2}}$

d) $\sqrt{6+\sqrt[3]{20+\sqrt{47+\sqrt[4]{16}}}}$

a) $\frac{2^{\frac{3}{4}}\cdot 2^{-4}\cdot 2^{\frac{1}{3}}}{2^2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{-\frac{5}{2}}}=\frac{2^{\frac{13}{12}}}{2^4}=$

$=\frac{2^{\frac{13}{12}}}{2^{\frac{48}{12}}}=\frac{1}{\sqrt[12]{2^{35}}}=\frac{\sqrt[12]{2}}{2^3}$

b) $\left(3\cdot 3^{-\frac{1}{4}}\cdot 3^{-\frac{1}{8}}\right):3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{5}{8}}:3^{\frac{1}{2}}=$

$=3^{\frac{1}{8}}=\sqrt[8]{3}$

c) $\left(\sqrt{14+\sqrt{7-3}}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\sqrt{14+2}\right)^{-\frac{1}{2}}=$

$=4^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$

d) $\sqrt{6+\sqrt[3]{20+7}}=\sqrt{6+3}=\sqrt{9}=3$

158 Expresa solo con raíces cuadradas.

a) $\sqrt[4]{15}$ b) $\sqrt[8]{15}$ c) $10^{\frac{1}{8}}$ d) $10^{\frac{1}{16}}$

a) $\sqrt{\sqrt{15}}$ c) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}$

b) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{15}}}$ d) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}}$

159 **RETO.** Averigua el valor de la siguiente expresión.

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}$$

$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}=a\rightarrow$

$\rightarrow\sqrt{2+a}=a\rightarrow\begin{cases}a=-1\rightarrow \text{No válida}\\ a=2\end{cases}$

Por tanto, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}=2$

160 **INVESTIGA.** Comprueba si son verdaderas o falsas estas igualdades y pon un ejemplo para comprobarlo.

a) $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[nm]{ab}$

b) $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[n+m]{ab}$

c) $\sqrt[n]{a+b}=\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$

d) $a\sqrt[n]{b^m}=\sqrt[n]{(ab)^m}$

e) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=a\sqrt{ab}$

f) $a\sqrt{b+c}=\sqrt{ab+ac}$

g) $\sqrt[4]{a^8b^2}=a^2\sqrt{b}$

h) $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$

a) Falso. $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{b}=\sqrt[12]{a^4\cdot b^3}$

b) Falso. $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{b}=\sqrt[12]{a^4\cdot b^3}$

c) Falso. $\sqrt[3]{3+5}=\sqrt[3]{8}=2$. Mientras que: $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{5}\neq 2$

d) Falso. $5\sqrt[3]{3^2}=\sqrt[3]{5^3\cdot 3^2}=\sqrt[3]{1\,125}\neq$ $\neq\sqrt[3]{(5\cdot 3)^2}=\sqrt[3]{225}$

e) Verdadero.

f) Falso. $2\sqrt{1+3}=4$, en cambio: $\sqrt{2(1+3)}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

g) Verdadero.

h) Falso. $\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}\neq 2+3=5$

Racionalización

161 Racionaliza las siguientes expresiones y simplifica el resultado.

a) $\dfrac{3}{4\sqrt{3}}$ d) $\dfrac{\sqrt{3}}{3\sqrt[4]{3^3}}$

b) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$ e) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{4}}$

c) $\dfrac{12}{\sqrt[3]{9}}$ f) $\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt[6]{3}}$

a) $\dfrac{3}{4\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

b) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{\sqrt[6]{2^7}}{2} = \sqrt[6]{2}$

c) $\dfrac{12}{\sqrt[3]{9}} = 4\sqrt[3]{3}$

d) $\dfrac{\sqrt{3}}{3\sqrt[4]{3^3}} = \dfrac{\sqrt[4]{3^3}}{9}$

e) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{4}} = 1$

f) $\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt[6]{3}} = 3\sqrt[3]{3}$

162 Racionaliza las siguientes expresiones y simplifica el resultado.

a) $\dfrac{2+\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$

b) $\dfrac{7\sqrt{7}-7}{\sqrt[3]{7}}$

c) $\dfrac{5\sqrt{3}-10}{\sqrt[4]{5^3}}$

d) $\dfrac{15\sqrt{5}+5}{\sqrt[3]{-5}}$

a) $\dfrac{(2+\sqrt{2})\cdot\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}} = \dfrac{2\sqrt[3]{4}+2\sqrt[6]{2}}{2} = \sqrt[3]{4}+\sqrt[6]{2}$

b) $\dfrac{(7\sqrt{7}-7)\cdot\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{7^2}} = \dfrac{49\sqrt[6]{7}-7\sqrt[3]{49}}{7} = 7\sqrt[6]{7}-\sqrt[3]{49}$

c) $\dfrac{(5\sqrt{3}-10)\cdot\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{5^3}\cdot\sqrt[4]{5}} = \dfrac{5\sqrt[4]{45}-10\sqrt[4]{5}}{5} = \sqrt[4]{45}-2\sqrt[4]{5}$

d) $\dfrac{(15\sqrt{5}+5)\cdot\sqrt[3]{(-5)^2}}{\sqrt[3]{-5}\cdot\sqrt[3]{(-5)^2}} = \dfrac{75\sqrt[6]{5}+5\sqrt[3]{25}}{-5} = -15\sqrt[6]{5}-\sqrt[3]{25}$

163 Elimina las raíces del denominador.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ d) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}$

b) $\dfrac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ e) $\dfrac{7}{\sqrt{11}-3}$

c) $\dfrac{-5}{\sqrt{3}-2}$ f) $\dfrac{-5}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}$

a) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2}-1$

b) $\dfrac{3(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})} = \dfrac{3(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2-3} = -3(\sqrt{2}-\sqrt{3})$

c) $\dfrac{-5(\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)} = \dfrac{-5\sqrt{3}-10}{3-4} = 5\sqrt{3}+10$

d) $\dfrac{4\sqrt{2}(3\sqrt{2}+\sqrt{5})}{(3\sqrt{2}-\sqrt{5})(3\sqrt{2}+\sqrt{5})} = \dfrac{24+4\sqrt{10}}{18-5} = \dfrac{24+4\sqrt{10}}{13}$

e) $\dfrac{7(\sqrt{11}+3)}{(\sqrt{11}-3)(\sqrt{11}+3)} = \dfrac{7\sqrt{11}+21}{11-9} = \dfrac{7\sqrt{11}+21}{2}$

f) $\dfrac{-5(\sqrt{6}-\sqrt{7})}{(\sqrt{6}+\sqrt{7})(\sqrt{6}-\sqrt{7})} = \dfrac{-5\sqrt{6}+5\sqrt{7}}{6-7} = 5\sqrt{6}-5\sqrt{7}$

164 Racionaliza las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-2}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$

c) $\dfrac{-3}{\sqrt{2}-2}$

d) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-\sqrt{6}}$

e) $\dfrac{2\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+1}$

f) $\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}$

g) $\dfrac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}$

h) $\dfrac{3\sqrt{5}}{-2\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

a) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-2}=-2\left(\sqrt{3}+2\right)$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}$

c) $\dfrac{-3}{\sqrt{2}-2}=3+\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$

d) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-\sqrt{6}}=\dfrac{6+2\sqrt{2}}{7}$

e) $\dfrac{2\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+1}=-\sqrt{3}\left(1+\sqrt{3}\right)$

f) $\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}=-2-\sqrt{6}$

g) $\dfrac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}-2\sqrt{6}}{3}$

h) $\dfrac{3\sqrt{5}}{-2\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\dfrac{-30+3\sqrt{15}}{17}$

165 Elimina raíces del denominador de las expresiones que aparecen a continuación.

a) $\dfrac{\sqrt{5}}{2+2\sqrt{5}}$

b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

c) $\dfrac{\sqrt{8}\left(5-\sqrt{18}\right)}{\sqrt{2}\left(\sqrt{8}-2\right)}$

d) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{27}\left(\sqrt{5}+2\right)}$

a) $\dfrac{\sqrt{5}\cdot\left(2-2\sqrt{5}\right)}{\left(2+2\sqrt{5}\right)\cdot\left(2-2\sqrt{5}\right)}=$

$=\dfrac{2\sqrt{5}-10}{4-20}=\dfrac{2\sqrt{5}-10}{-16}=\dfrac{\sqrt{5}-5}{-8}$

b) $\dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}-\sqrt{2}}=$

$=\dfrac{\sqrt{2}\cdot\left(3\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(3\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(3\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}=$

$=\dfrac{3\sqrt{6}+2}{27-2}=\dfrac{3\sqrt{6}+2}{25}$

c) $\dfrac{10\sqrt{2}-12}{4-2\sqrt{2}}=\dfrac{5\sqrt{2}-6}{2-\sqrt{2}}=$

$=\dfrac{\left(5\sqrt{2}-6\right)\cdot\left(2+\sqrt{2}\right)}{\left(2-\sqrt{2}\right)\cdot\left(2+\sqrt{2}\right)}=2\sqrt{2}-1$

d) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+2\right)}=$

$=\dfrac{2\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{5}-2\right)}{3\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+2\right)\cdot\left(\sqrt{5}-2\right)}=$

$=\dfrac{2\sqrt{5}-4}{3}$

166 Racionaliza estas expresiones.

a) $\dfrac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}+\dfrac{5\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{6}}$

b) $\dfrac{12\sqrt{6}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}$

a) $\dfrac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}+\dfrac{5\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{6}}=$

$=\dfrac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}-3\sqrt{6}-\sqrt{30}}{-3}+$

$+\dfrac{5\sqrt{15}+5\sqrt{30}}{-3}=$

$=\dfrac{3\sqrt{3}+6\sqrt{15}-3\sqrt{6}+4\sqrt{30}}{-3}$

b) $\dfrac{12\sqrt{6}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}=$

$=\dfrac{12\sqrt{6}\cdot\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)}{\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)\cdot\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)}=$

$=\dfrac{12\sqrt{6}\cdot\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)}{-6}=$

$=-2\sqrt{6}\cdot\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)=$

$=-12\sqrt{3}-12\sqrt{2}$

167 Halla $\frac{2}{2+\sqrt{2}} - \frac{3}{3+\sqrt{3}} - \frac{6}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

$$\frac{2}{2+\sqrt{2}} - \frac{3}{3+\sqrt{3}} - \frac{6}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} =$$
$$= \frac{4-2\sqrt{2}}{2} - \frac{9-3\sqrt{3}}{6} - \frac{6\sqrt{2}-6\sqrt{3}}{-1} =$$
$$= 2-\sqrt{2} - \frac{3-\sqrt{3}}{2} + 6\sqrt{2} - 6\sqrt{3} =$$
$$= \frac{1}{2} + 5\sqrt{2} - \frac{11}{2}\sqrt{3}$$

168 Realiza estas operaciones.

a) $\frac{2}{3-2\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}$

b) $\frac{2}{1+\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{3}-7}$

c) $\frac{\sqrt[6]{5}}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$

d) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{10}} + \frac{4}{\sqrt{2}-5} - \frac{1}{\sqrt{2}}$

a) $\frac{2}{3-2\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{30+9\sqrt{5}}{55}$

b) $\frac{2}{1+\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{3}-7} =$

$= \frac{3}{37}\left(13\sqrt{3}-10\right)$

c) $\frac{\sqrt[6]{5}}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{5^2}}{5} - \frac{\sqrt[3]{5^2}}{5} = 0$

d) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{10}} + \frac{4}{\sqrt{2}-5} - \frac{1}{\sqrt{2}} =$

$= \frac{15\sqrt{2}}{46} - \frac{43}{23}$

169 Realiza estas operaciones.

a) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ b) $\frac{1}{\sqrt[9]{6}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{2}}$

a) $\frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}}{\sqrt[6]{2^5}}$

b) $\frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[18]{6^{11}}}{\sqrt[9]{6\cdot 2^3}}$

170 Calcula la siguiente expresión.

$$\frac{\sqrt{128}+2\sqrt{8}+3\sqrt{2}}{2\sqrt{32}} - 4\sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{128}+2\sqrt{8}+3\sqrt{2}}{2\sqrt{32}} - 4\sqrt{2} =$$
$$= \frac{8\sqrt{2}+4\sqrt{2}+3\sqrt{2}}{8\sqrt{2}} - 4\sqrt{2} =$$
$$= \frac{15}{8} - 4\sqrt{2}$$

171 **RETO.** Simplifica la siguiente expresión.

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} =$$
$$= \frac{a+b-2\sqrt{ab}+a+b+2\sqrt{ab}}{a-b} =$$
$$= \frac{2(a+b)}{a-b}$$

172 Calcula el valor de x en estas ecuaciones.

a) $\frac{\sqrt{8}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = x\left(\sqrt{6}+2\right)$

b) $\frac{x}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$

Despejamos x en cada caso.

a) $x = \frac{\sqrt{8}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{6}+2\right)} =$

$$= \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+2\sqrt{2}+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{3}+5\sqrt{2}} =$$
$$= \frac{\sqrt{2}\cdot\left(4\sqrt{3}-5\sqrt{2}\right)}{\left(4\sqrt{3}+5\sqrt{2}\right)\cdot\left(4\sqrt{3}-5\sqrt{2}\right)} =$$
$$= \frac{4\sqrt{6}-10}{48-50} = 5-2\sqrt{6}$$

b) $\frac{x}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow$

$\rightarrow \frac{x}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$

$$x = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{6})\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2\sqrt{3}} =$$
$$= \frac{2\sqrt{3}-2+6-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{4}{2\sqrt{3}} =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

173 **RETO.** ¿Cuánto vale x en la ecuación?

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2+x}}$$

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{5+2x}{2+x}} \rightarrow$$
$$\rightarrow \sqrt{2} = 1 + \frac{2+x}{5+2x} \rightarrow$$
$$\rightarrow \sqrt{2} = \frac{7+3x}{5+2x} \rightarrow$$
$$\rightarrow 5\sqrt{2} + 2x\sqrt{2} = 7 + 3x$$
$$x = \frac{7-5\sqrt{2}}{-3+2\sqrt{2}} =$$
$$= \frac{(7-5\sqrt{2})\cdot(-3-2\sqrt{2})}{(-3+2\sqrt{2})\cdot(-3-2\sqrt{2})} = \sqrt{2}-1$$

174 **INVESTIGA.** Razona cómo se racionalizan las fracciones del tipo:

$$\frac{1}{\sqrt[2^n]{a} - \sqrt[2^n]{b}}$$

Multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador.

$$\frac{\sqrt[2^n]{a} + \sqrt[2^n]{b}}{(\sqrt[2^n]{a} - \sqrt[2^n]{b})(\sqrt[2^n]{a} + \sqrt[2^n]{b})} = \frac{\sqrt[2^n]{a} + \sqrt[2^n]{b}}{\sqrt[2^{n-1}]{a} - \sqrt[2^{n-1}]{b}}$$
$$\frac{(\sqrt[2^n]{a} + \sqrt[2^n]{b})(\sqrt[2^{n-1}]{a} + \sqrt[2^{n-1}]{b})}{(\sqrt[2^{n-1}]{a} - \sqrt[2^{n-1}]{b})(\sqrt[2^{n-1}]{a} + \sqrt[2^{n-1}]{b})} =$$
$$= \frac{(\sqrt[2^n]{a} + \sqrt[2^n]{b})(\sqrt[2^{n-1}]{a} + \sqrt[2^{n-1}]{b})}{\sqrt[2^{n-2}]{a} - \sqrt[2^{n-2}]{b}}$$

Por tanto, multiplicando por el conjugado n veces:

$$\frac{(\sqrt[2^n]{a} + \sqrt[2^n]{b})(\sqrt[2^{n-1}]{a} + \sqrt[2^{n-1}]{b})\ldots(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a-b}$$

6. Opera con logaritmos y resuelve problemas

ACTIVIDADES FLASH

175 Recuerda las propiedades de los logaritmos y calcula.

a) $\log_9 81$
b) $\log_4 64$
c) $\ln e^2$
d) $\ln e^{-14}$
e) $\log 100\,000$
f) $\log \frac{1}{100}$
g) $\log_5 \sqrt{125}$
h) $\log \sqrt[3]{0,1}$
i) $\log_3 \frac{1}{27}$
j) $\log 0,00001$
k) $\log_{\frac{1}{2}} 2$
l) $\log_{\frac{1}{3}} 9$

a) $\log_9 81 = 2$
b) $\log_4 64 = 3$
c) $\ln e^2 = 2$
d) $\ln e^{-14} = -14$
e) $\log 100\,000 = 5$
f) $\log \frac{1}{100} = -2$
g) $\log_5 \sqrt{125} = 3/2$
h) $\log \sqrt[3]{0,1} = -1/3$
i) $\log_3 \frac{1}{27} = -3$
j) $\log 0,00001 = -5$
k) $\log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$
l) $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$

176 Determina cuáles de las siguientes igualdades son ciertas y corrige las que no lo sean.

a) $\log (a+b) = \log a + \log b$
b) $\log 0 = 1$
c) $\log (a : b) = \log a - \log b$
d) $\log (a^b) = \log b \cdot \log a$

a) Falsa: $\log (a \cdot b) = \log a + \log b$
b) Falsa: $\log 0 \neq 1 \rightarrow \log 1 = 0$
c) Cierta: $\log (a : b) = \log a - \log b$
d) Falsa: $\log (a^b) = b \cdot \log a$

177 Halla el resultado de las expresiones mediante las propiedades de los logaritmos.

a) $2\log_4 16 + \log_2 32 - 3\log_7 49$

b) $\log_2 8 + \log_3 27 + \log_5 125$

c) $\log_5 625 - \log_9 81 + \log_8 64$

a) $2\log_4 16 + \log_2 32 - 3\log_7 49 =$
$= 2 \cdot 2 + 5 - 3 \cdot 2 = 3$

b) $\log_2 8 + \log_3 27 + \log_5 125 =$
$= 3 + 3 + 3 = 9$

c) $\log_5 625 - \log_9 81 + \log_8 64 =$
$= 4 - 2 + 2 = 4$

178 **RETO.** Calcula estos logaritmos.

a) $\log_9 243$

b) $\log_{25} 125$

c) $\log_{32} 4$

d) $\log_4 512$

a) $\dfrac{5}{2}$

c) $\dfrac{2}{5}$

b) $\dfrac{3}{2}$

d) $\dfrac{9}{2}$

179 **INVESTIGA.** ¿Existe algún valor de x que cumpla que $\log_5 x = \log_{25} x$?

$\log_5 x = \log_{25} x \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{\log x}{\log 5} = \dfrac{\log x}{\log 25} \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{\log x}{\log 5} = \dfrac{\log x}{2 \cdot \log 5} \rightarrow$

$\rightarrow 2 \cdot \log 5 \cdot \log x = \log 5 \cdot \log x \rightarrow$

$\rightarrow 2 \cdot \log 5 \cdot \log x - \log 5 \cdot \log x = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \log 5 \cdot \log x = 0 \rightarrow \log x = 0 \rightarrow x = 1$

La igualdad solo se da para $x = 1$.

180 **INVESTIGA.** Si $\log e = 0{,}4343$; ¿cuánto vale $\ln 10$? ¿Y $\ln 0{,}1$?

$$\ln 10 = \frac{\log 10}{\log e} = \frac{1}{0{,}4343} = 2{,}3025$$

$$\ln 0{,}1 = \frac{\log 0{,}1}{\log e} = \frac{-1}{0{,}4343} = -2{,}3025$$

181 Si $\log_4 N = 3$, halla el valor de esta expresión.

$$\log_4 \frac{\sqrt{N}}{N^2}$$

$$\log_4 \frac{\sqrt{N}}{N^2} = \frac{1}{2}\log_4 N - 2\log_4 N =$$
$$= -\frac{3}{2}\log_4 N = -\frac{3}{2} \cdot 3 = -\frac{9}{2}$$

182 Sabiendo que $\log 4 = 0{,}6021$; calcula los siguientes logaritmos.

a) $\log 2$

b) $\log \dfrac{1}{4}$

c) $\log 0{,}2$

d) $\log 4\,000$

a) $\log 2 = \dfrac{\log 4}{2} = 0{,}30105$

b) $\log \dfrac{1}{4} = -\log 4 = -0{,}6021$

c) $\log 0{,}2 = \dfrac{\log 4}{2} - \log 10 =$
$= 0{,}30105 - 1 = -0{,}69895$

d) $\log 4\,000 = \log 4 + \log 1\,000 =$
$= 0{,}6021 + 3 = 3{,}6021$

183 Halla el valor de estos logaritmos decimales, teniendo en cuenta que $\log 2 = 0{,}3010$.

a) $\log 1\,250$

b) $\log 0{,}125$

c) $\log 5$

d) $\log 0{,}04$

e) $\log 1{,}6$

f) $\log 0{,}2$

a) $\log\left(\dfrac{10\,000}{8}\right) = \log 10\,000 - \log 8 =$
$= 4 - 3\log 2 = 4 - 3 \cdot 0{,}3010 =$
$= 3{,}097$

b) $\log\left(\dfrac{125}{1\,000}\right) = \log\left(\dfrac{5^3}{2^3 \cdot 5^3}\right) =$
$= \log \dfrac{1}{2^3} = \log 2^{-3} = -3\log 2 =$
$= -3 \cdot 0{,}301 = -0{,}903$

c) $\log\left(\frac{10}{2}\right) = \log 10 - \log 2 =$
$= 1 - 0{,}3010 = 0{,}699$

d) $\log\left(\frac{4}{100}\right) = 2\log 2 - 2\log 10 =$
$= 2 \cdot 0{,}301 - 2 = -1{,}398$

e) $\log\left(\frac{16}{10}\right) = 4\log 2 - \log 10 =$
$= 4 \cdot 0{,}301 - 1 = 0{,}204$

f) $\log\left(\frac{2}{10}\right) = \log 2 - \log 10 =$
$= 0{,}301 - 1 = -0{,}699$

184 Sabiendo que $\log 7 = 0{,}8451$ calcula aplicando las propiedades de los logaritmos.

$$\log 28 + \log 15 - \log 6$$

$\log 28 + \log 15 - \log 6 = \log\left(\frac{28 \cdot 15}{6}\right) =$
$= \log 70 = \log 7 + \log 10 =$
$= \log 7 + 1 = 1{,}8451$

185 Sabiendo que $\log 3 = 0{,}4771$, calcula estos logaritmos aplicando las propiedades.

a) $\log \frac{27\sqrt[3]{10}}{3^4\sqrt{30}}$

b) $\log \sqrt{\frac{27\sqrt{3}}{\frac{1}{3}}}$

Simplificamos y aplicamos las propiedades.

a) $\log \frac{27\sqrt[3]{10}}{3^4\sqrt{30}} = \log \frac{\sqrt[3]{10}}{3\sqrt{30}} =$
$= \log \frac{\sqrt[6]{3^3 \cdot 10^5}}{90} = \log \frac{3^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{\frac{5}{6}}}{3^2 \cdot 10} =$
$= \frac{1}{2}\log 3 + \frac{5}{6}\log 10 - 2\log 3 - \log 10 =$
$= -\frac{3}{2} \cdot 0{,}4771 - \frac{1}{6} = -0{,}8823$

b) $\log \sqrt{\frac{27\sqrt{3}}{\frac{1}{3}}} = \log \sqrt{81\sqrt{3}} = \log \sqrt[4]{3^9} =$
$= \frac{9}{4}\log 3 = \frac{9}{4} \cdot 0{,}4771 = 1{,}0735$

186 Sabiendo que $\ln a = 0{,}6$ y que $\ln b = 2{,}2$ calcula los siguientes logaritmos.

a) $\ln\sqrt{a}$

b) $\ln\sqrt[3]{b}$

c) $\ln\sqrt[4]{\frac{ab}{e^2}}$

d) $\ln\frac{\sqrt{a^{-5}}}{\sqrt[3]{b}}$

a) $\frac{1}{2}\ln a = 0{,}3$

b) $\frac{1}{3}\ln b = 0{,}7333$

c) $\frac{1}{4}(\ln a + \ln b - 2\ln e) = 0{,}2$

d) $-\frac{5}{2}\ln a - \frac{1}{3}\ln b = -2{,}23333$

187 **INVESTIGA.** El valor del logaritmo de 0,5 en una cierta base es $\frac{1}{5}$.

a) Halla dicha base.
b) Calcula el logaritmo de 0,25 en esa base.

a) $\log_x 0{,}5 = \frac{1}{5}; \frac{\log\frac{1}{2}}{\log x} = \frac{1}{5};$

$\log x = 5\log\frac{1}{2}; \log x = \log\left(\frac{1}{2}\right)^5;$

$x = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$

b) $\log_{2^{-5}} 0{,}25 = \log_{2^{-5}} 2^{-2} =$
$= \frac{\log_2 2^{-2}}{\log_2 2^{-5}} = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}$

188 **RETO.** Si $\log_{10}\left(\sqrt{2020} + \sqrt{2010}\right) = n$, ¿cuánto vale $\log_{10}\left(\sqrt{2020} - \sqrt{2010}\right)$?

$\log_{10}\left(\sqrt{2020} - \sqrt{2010}\right) =$
$= \log_{10}\frac{\left(\sqrt{2020} - \sqrt{2010}\right) \cdot \left(\sqrt{2020} + \sqrt{2010}\right)}{\left(\sqrt{2020} + \sqrt{2010}\right)} =$
$= \log_{10}\frac{2020 - 2010}{\left(\sqrt{2020} + \sqrt{2010}\right)} =$
$= \log_{10}\frac{10}{\left(\sqrt{2020} + \sqrt{2010}\right)} =$
$= \log_{10} 10 - \log_{10}\left(\sqrt{2020} + \sqrt{2010}\right) =$
$= 1 - n$

189 **INVENTA.** Para escribir cualquier número natural con 3 doses se puede utilizar la siguiente fórmula:

$$n = -\log_2 \log_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}}_{n \text{ veces}}$$

a) Elige tres números naturales y verifica la fórmula.

b) Comprueba que la fórmula es correcta para cualquier n.

a) Respuesta abierta. Por ejemplo: Elegimos los números 1, 2 y 3:

- Para $n = 1$:

$$-\log_2 \log_2 \sqrt{2} = -\log_2\left(\frac{1}{2}\log_2 2\right) =$$
$$= -\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = 0 + 1 = 1$$

- Para $n = 2$:

$$-\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{2}} = -\log_2\left(\frac{1}{4}\log_2 2\right) =$$
$$= -\log_2\left(\frac{1}{4}\right) = 0 + 2 = 2$$

- Para $n = 3$:

$$-\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = -\log_2\left(\frac{1}{8}\log_2 2\right) =$$
$$= -\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = 0 + 3 = 3$$

b) Queremos demostrar la igualdad:

$k = -\log_2 \log_2 \sqrt[2^k]{2}$

$$-\log_2 \log_2 \sqrt[2^k]{2} = -\log_2\left(\frac{1}{2^k}\log_2 2\right) =$$
$$= -\log_2\left(\frac{1}{2^k}\right) = 0 + \log_2 2^k = k$$

190 **MATEMÁTICAS Y… SISMOGRAFÍA.** La escala de Richter es una escala logarítmica con valores entre 1 y 9:

$$M = \log P$$

Donde M es la magnitud del terremoto y P indica cuántas veces es mayor la amplitud de la onda sísmica. Así, un temblor de magnitud 7 es 10 veces más fuerte que uno de magnitud 6, 100 veces más que uno de magnitud 5, 1 000 veces más que uno de magnitud 4, etc.

El terremoto más fuerte que ha habido en España fue el de Granada de 1884 con una magnitud de 6,7. El terremoto de San Francisco de 1906 tuvo una magnitud de 8,25. ¿Cuántas veces fue más fuerte el terremoto de San Francisco que el de Granada?

El terremoto de Granada fue de:
$6{,}7 = \log P \rightarrow P = 10^{6{,}7}$

El terremoto de San Francisco fue de:
$8{,}25 = \log P \rightarrow P = 10^{8{,}25}$

Luego el terremoto de San Francisco fue $10^{8{,}25} = 10^{6{,}7} \cdot x$; $x = 10^{1{,}55} = 35{,}48$ veces mayor que el de Granada.

191 **MATEMÁTICAS Y… ACÚSTICA.** El decibelio mide la intensidad sonora. La fórmula para medir los decibelios es:

$$D = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

Donde D es el número de decibelios, I_0 los vatios por metro cuadrado del sonido umbral e I los vatios por metro cuadrado del sonido que se está tratando.
Por ejemplo, si un obrero utiliza un martillo mecánico.

	Intensidad aproximada (W/m²)
Umbral de audición	10^{-12}
Martillo mecánico	$3 \cdot 10^{-3}$

¿Cuántos decibelios soportará el obrero?

$$D = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0} = 10 \cdot \log \frac{3 \cdot 10^{-3}}{10^{-12}} =$$
$$= 10 \cdot \log(3 \cdot 10^9) = 90 + 10 \log 3 =$$
$$= 94{,}77 \text{ dB}$$

Esta actividad puede utilizarse para trabajar el ODS 8, trabajo decente y crecimiento económico.

FAKE NEWS

Los números no mienten

Aunque las declaraciones de las autoridades invitan al optimismo: «la mortalidad se reduce a la mitad, estamos ganando la batalla al virus», los fríos números indican lo contrario; del 10 de marzo, con 35 fallecidos, al 1 de abril, con 950, el número de muertes se ha multiplicado por 27.

10 de marzo de 2020
Infectados 1590
Fallecidos 35

1 de abril de 2020
Infectados 73 490
Fallecidos 950

Y tú, ¿qué opinas?

Respuesta abierta. Por ejemplo:

La proporción del número de fallecidos entre el de los infectados el 10 de marzo es:

$$\frac{35}{1\,590} = 2{,}2\,\%$$

La proporción del número de fallecidos entre el de los infectados el 1 de abril es:

$$\frac{950}{73\,490} = 1{,}3\,\%$$

Aunque las muertes se han multiplicado por algo más de 27, la proporción del número de fallecidos con respecto al número de infectados es menor, poco más de la mitad, luego no es cierto que la mortalidad se haya reducido a la mitad.

PROBLEMAS APARENTEMENTE DISTINTOS

192 Realiza estas operaciones con números en notación científica.

a) $5{,}75 \cdot 10^4 \cdot 24$

b) $\dfrac{1{,}85 \cdot 10^{10}}{5{,}75 \cdot 10^4 \cdot 24 \cdot 365}$

a) $1{,}38 \cdot 10^6$

b) $\dfrac{1{,}85 \cdot 10^{10}}{5{,}037 \cdot 10^8} = 3{,}673 \cdot 10$

193 En 1977 se lanzó la sonda Voyager. Llevaba un disco de oro con saludos y música de todo el mundo. La sonda continúa viajando a $5{,}75 \cdot 10^4$ km/h por el espacio.

a) ¿Cuántos kilómetros recorre al día?

b) ¿Cuándo alcanzó el límite del sistema solar, que se encuentra a $1{,}85 \cdot 10^{10}$ km?

a) $5{,}75 \cdot 10^4 \cdot 24 = 1{,}38 \cdot 10^6$

La sonda Voyager recorre $1{,}38 \cdot 10^6$ km al día.

b) $\dfrac{1{,}85 \cdot 10^{10}}{1{,}38 \cdot 10^6} = 1{,}3406 \cdot 10^4$ días.

Alcanzó el límite del sistema solar a los 13 406 días de su lanzamiento, es decir, a los 36 años, 8 meses y 22,8 días.

194 Toma el valor de $\sqrt{2} = 1{,}414213562$ y calcula los errores relativo y absoluto de las siguientes aproximaciones.

a) $\sqrt{2} \approx 1 + \dfrac{24}{60} + \dfrac{51}{60^2} + \dfrac{10}{60^3}$

b) $\sqrt{2} \approx \dfrac{577}{408}$

a) Sea $x = \sqrt{2}$ y

$$a = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}.$$

Sus errores son:

$$E_a = \left|\sqrt{2} - 1 - \frac{24}{60} - \frac{51}{60^2} - \frac{10}{60^3}\right| = $$
$$= 5{,}9903 \cdot 10^{-7}$$

$$E_r = \frac{E_a}{x}$$

$$E_r = \frac{5{,}9903 \cdot 10^{-7}}{\sqrt{2}} = 4{,}24 \cdot 10^{-7}$$

b) Sea $x = \sqrt{2}$ y $a = \dfrac{507}{408}$.

Sus errores son:

$$E_a = \left|\sqrt{2} - \frac{507}{408}\right| = 0{,}171567$$

$$E_r = \frac{E_a}{x}$$

$$E_r = \frac{0{,}171567}{\sqrt{2}} = 0{,}121316$$

195 Diferentes culturas tenían aproximaciones para $\sqrt{2}$.

En unas tablas babilónicas se puede encontrar lo siguiente:

$$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}.$$

Por otro lado, en ciertos libros indios aparece: $\sqrt{2} \approx \frac{577}{408}$.

¿Cuál de los dos pueblos tenía una mejor aproximación?

Atendiendo a los cálculos de la actividad anterior, las tablas babilónicas tenían una mejor aproximación.

196 Indica el valor de x que cumple:

$$12 \cdot 4^x = 98\,304$$

$$4^x = \frac{98\,304}{12}$$

$$4^x = 8\,192$$

$$x = \frac{\log 8\,192}{\log 4} = \frac{13}{2} = 6{,}5$$

197 La población de un cultivo de 12 bacterias se cuadriplica cada hora. ¿Tras cuánto tiempo habrá 98 304 bacterias?

$$12 \cdot 4^x = 98\,304$$

$$4^x = \frac{98\,304}{12}$$

$$4^x = 8\,192$$

$$x = \frac{\log 8\,192}{\log 4} = \frac{13}{2} = 6{,}5 \text{ horas}$$

¿PARA QUÉ SIRVE…?

1 Responde.

a) ¿Por qué se hacen marcas en la carretera al frenar bruscamente un automóvil?

b) ¿Cuál es el valor de la gravedad g?

a) Porque dos o cuatro de las ruedas se bloquean y se produce una transferencia del peso del coche sobre ellas.

b) $g = 9{,}8$ m/s^2.

2 Consulta qué es el coeficiente de rozamiento de una superficie.

El coeficiente de rozamiento es una constante adimensional que expresa la oposición al deslizamiento que ofrecen las superficies de dos cuerpos en contacto. Es una característica de cada par de materiales en contacto.

3 ¿Qué magnitudes representan las variables μ, g y x en la expresión de la velocidad inicial con respecto a la distancia de frenado?

μ representa el coeficiente de rozamiento. Es una magnitud sin unidades.

g representa la aceleración de la gravedad. Es una constante fija, que vale 9,8 m/s^2.

x representa la longitud de las marcas de frenado expresadas en metros.

4 ¿Es correcta esta igualdad?

$$v = \sqrt{2\mu g x} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\mu} \cdot \sqrt{g} \cdot \sqrt{x}$$

Sí, la igualdad es correcta, pues se ha aplicado una propiedad elemental de las raíces.

5 ¿Cuál es el índice de la expresión radical?

El índice de la expresión radical es 2 (raíz cuadrada).

6 Calcula la velocidad de un automóvil si se sabe que frenó bruscamente y dejó una marca de frenado de 30 m en una carretera de asfalto.

Se toma $\mu = 0{,}75$, por ser la carretera de asfalto. Entonces:

$$v = \sqrt{2 \cdot 0{,}75 \cdot 9{,}8 \cdot 30} = \sqrt{441} =$$
$$= 21 \text{ m/s} = 75{,}6 \text{ km/h}$$

7 Investiga sobre las campañas de tráfico de tu ciudad o comunidad para evitar accidentes.

Algunas campañas para evitar accidentes son:

- Campaña del uso del cinturón de seguridad y sistemas de retención infantil adecuados a la estatura y peso de los niños.
- Campaña contra las drogas y el alcohol.
- Campaña contra las distracciones al volante, como el uso del teléfono móvil.