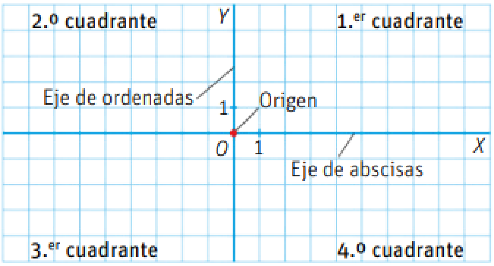
TEMA 4- FUNCIÓNS E REPRESENTACIÓN GRÁFICA. ESTATÍSTICA

PARTE 1_FUNCIÓNS E REPRESENTACIÓN GRÁFICA

EL PLANO CARTESIANO. COORDENADAS



Coordenadas cartesianas de un punto: (x, y)

- x, representa la posición sobre el eje horizontal y se denomina **abscisa** del punto.
- y, representa la posición sobre el eje vertical y se denomina **ordenada** del punto.

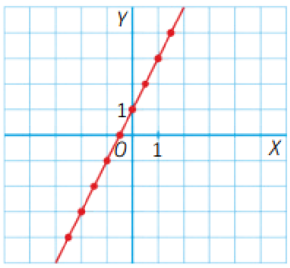
RELACIONES DADAS POR TABLAS, GRÁFICAS Y FÓRMULAS

La relación entre dos magnitudes se puede expresar de varias formas distintas.

Tabla

x	y
–3	–5
–2	–3
–1	–1
0	1
1	3
2	5

Gráfica



Fórmula

$y = 2x + 1$

1•• Concepto de función

Act.A •

Una **función, *f*,** es una relación entre dos variables, x e y, tal que a cada valor de x (variable independiente) le corresponde, como mucho, **un único** valor de y (variable dependiente), de manera que $y = f(x)$. (Ejemplo 1)

Ejemplo

1

- La relación entre el área de un jardín cuadrado y su lado es una relación funcional, que viene dada por la función $f(x) = x^2$, donde x es el lado del jardín y el área que ocupa es x^2. Si el lado mide $x = 5$ m, la superficie del jardín es $y = f(5) = 5^2 = 25$ m^2.
- La relación entre la altura de una persona y su edad no es una relación funcional, porque una persona mide lo mismo durante muchos años. A la altura $x = 1,65$ m le corresponde más de un valor de edad, por ejemplo, $y = 14$, $y = 15$ e $y = 16$.

Las **relaciones funcionales** pueden ser **expresadas** de alguna de estas formas:

- **Algebraicamente:** mediante una **fórmula o ecuación** que permite obtener el valor de y cuando se conoce el valor de x.
- **Numéricamente:** mediante una **tabla** de valores que se obtiene a partir de una fórmula, dando valores a x y calculando los valores de y correspondientes.
- **Gráficamente:** la **gráfica** de una función, f, es la curva que se obtiene al unir, en el plano cartesiano, todos los puntos de la forma (x,y), donde $y=f(x)$.

A partir de cualquiera de ellas, se pueden obtener las otras dos. (Ejemplo 2)

A partir de cualquiera de ellas, se pueden obtener las otras dos. (Ejemplo 2)

Ejemplo 2

Una función relaciona los kilogramos vendidos de Naranjas de Valencia en una frutería, con el precio pagado por distintas cantidades de naranjas. Si el precio de las naranjas es 1,20 €/kg, x="N.º kilogramos vendidos" e y="precio de la venta".

Esta función se puede expresar de estas tres formas:

- Algebráicamente. Mediante la ecuación de la función: $f(x)=1{,}20x$.

  Dando valores a la variable x en la fórmula, se calculan los valores correspondiente de y:

  Si $x=1 \Rightarrow y=f(1)=1{,}20\cdot 1=1{,}20$

  Si $x=2 \Rightarrow y=f(2)=1{,}20\cdot 2=2{,}40$

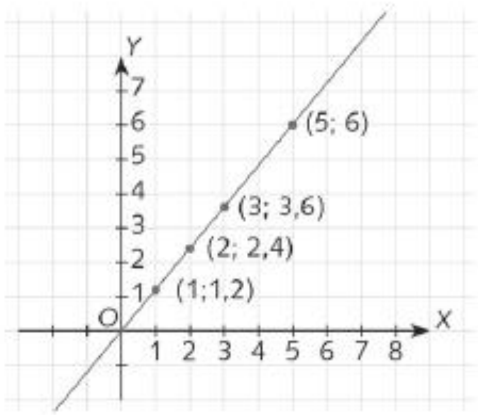
  Si $x=3 \Rightarrow y=f(3)=1{,}20\cdot 3=3{,}60$

  Si $x=5 \Rightarrow y=f(5)=1{,}20\cdot 5=6$

- Numéricamente. Mediante una tabla se puede describir la función, con los valores hallados anteriormente:

X	1	2	3	5
Y	1,20	2,40	3,60	6

- Gráficamente. Conociendo la ecuación se pueden dibujar los puntos para poder representar la gráfica de la función.
  Conociendo la tabla, de la misma forma, se puede representar la gráfica de la función.
  Conociendo la gráfica, se puede construir la tabla de valores.



2•• Características de las funciones

SD4

Act.P •

Act.R •

Act.A •

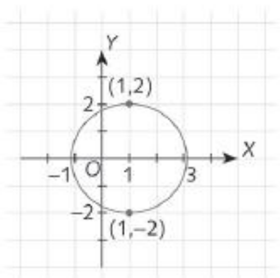
Dada una representación gráfica de una curva se puede comprobar si corresponde o no a una función si para cada valor de la variable x le corresponde un único valor de y. (Ejemplo 3)

Ejemplo

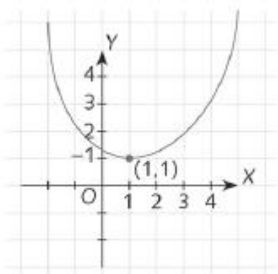
3

Esta gráfica no representa una función, porque hay valores de x, a los que le corresponden más de un valor de y.

Por ejemplo:
$x=1$, $f(1)=2$ y $f(1)=-2$.



Esta gráfica sí corresponde a una función, porque se puede observar que a cada valor de la variable independiente x le corresponde un único valor y.



2.1• Dominio, recorrido y continuidad de una función

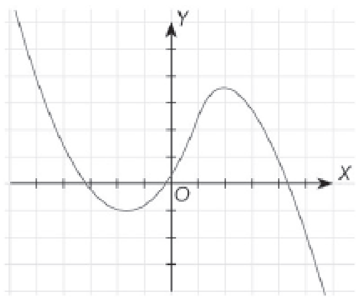
El **dominio** de una función es el conjunto de valores de x para los cuales se puede calcular su imagen, y. Se representa por $D(f)$ o Dom (f). El **recorrido o imagen** es el conjunto de valores de y que son la imagen de algún valor del dominio.

Una **función** es **continua** si su gráfica no tiene ningún salto. En ese caso la gráfica se puede trazar sin necesidad de levantar el lápiz del papel. (Ejemplo 4)

Si la gráfica de una función da un salto en vertical en algún punto de su dominio, $x=a$, la función no es continua en ese punto. Los puntos donde la gráfica da un salto se denominan **discontinuidades** de la función. (Ejemplo 5)

Ejemplo

Esta función es continua para todos los números reales:



SD5

SD6

Ejemplo

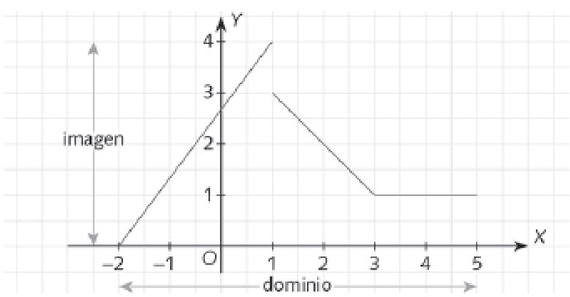
5

En la gráfica de la derecha, el **dominio** de la función son todos los valores de x comprendidos entre -2 y 5.

El **recorrido** o **imagen** de esta función son todos los valores de y comprendidos entre 0 y 4.

La función correspondiente a esta gráfica es continua para todos los valores de x desde $x=-2$ hasta $x=5$, excepto en $x=1$, donde la función da un salto.

Es decir, $f(x)$ es discontinua en $x=1$.



Act.R • SD 7

2.2• Puntos de corte con los ejes cartesianos

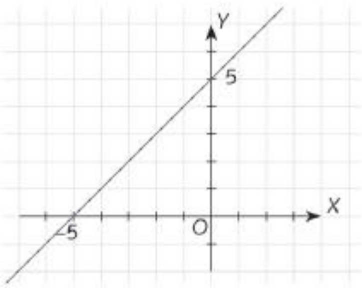
Los puntos de la función que pertenecen a los ejes de coordenadas se denominan **puntos de corte** y para calcularlos se procede así: (Ejemplo 6)

- **Puntos** de **corte** con el **eje Y, de ordenadas:** son aquellos puntos en los que $x=0$, por lo que son de la forma $(0, f(0))$.
- **Puntos** de **corte** con el **eje X, de abscisas:** son los puntos en los que $y=0$, son de la forma $(x, 0)$. Se calculan igualando la función a 0 y resolviendo la ecuación.

Ejemplo 6

Para la función $f(x)=x+5$, los puntos de corte con los ejes coordenados son:

- Corte con el eje Y:
  $x=0 \Rightarrow f(0)=0+5=5$
  El punto de corte es: (0, 5).
- Corte con el eje X:
  $y=0 \Rightarrow 0=x+5 \Rightarrow x=-5$
  El punte de corte es: (−5, 0).



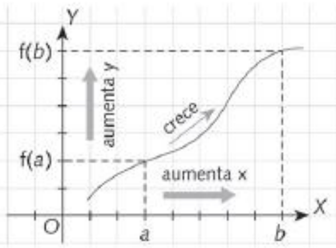
2.3• Crecimiento y decrecimiento SD8

Una función *f* es **creciente** en un intervalo, (a, b), cuando al aumentar el valor de la variable *x*, aumenta el valor de la variable *y*. Entonces, la gráfica de la función, vista de izquierda a derecha, asciende. (Ejemplo 7)

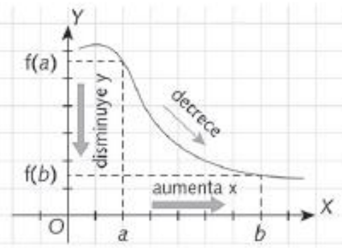
Una función es **decreciente** en un intervalo, (a, b), cuando al aumentar el valor de la variable *x*, disminuye el valor de la variable *y*. Entonces, la gráfica de la función, vista de izquierda a derecha, desciende. (Ejemplo 8)

Una función es **constante** en un intervalo, (a, b), cuando al aumentar el valor de la variable *x*, la variable *y* toma el mismo valor. (Ejemplo 9) (Ejemplo 10)

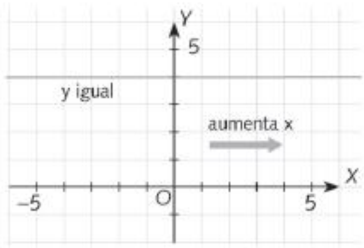
Ejemplo 7



Ejemplo 8



Ejemplo 9



Ejemplo 10

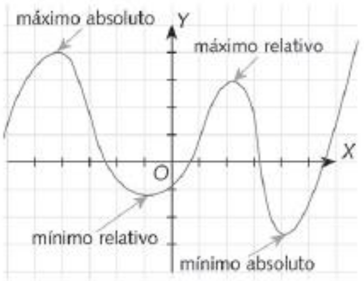
En la gráfica del Ejemplo 5, la función es creciente desde $x=-2$ hasta $x=1$, decrece desde $x=1$ a $x=3$, y es constante desde $x=3$ hasta $x=5$.

2.4• Máximos y mínimos de una función SD9

Una función presenta un **máximo relativo** en $x=a$, cuando $f(a)$ es mayor que cualquiera de los valores de $f(x)$ que están a su alrededor. En este punto, la función pasa de ser creciente a decreciente. Si $f(a)$ es mayor que cualquier otro punto, la función alcanza el **máximo absoluto** en $x=a$.

Una función presenta un **mínimo relativo** en $x=a$, cuando $f(a)$ es menor que cualquiera de los valores de $f(x)$ que están a su alrededor. En este punto, la función pasa de ser decreciente a creciente. Si $f(a)$ es menor que cualquier otro punto, la función alcanza el **mínimo absoluto** en $x=a$. (Ejemplo 11)

Ejemplo 11

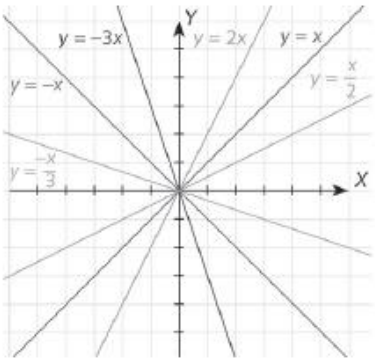


3•• Funciones lineales y afines

SD12

Ejemplo 15

Estas rectas son funciones de proporcionalidad directa:



Las funciones de **proporcionalidad directa** o **lineales** relacionan dos magnitudes directamente proporcionales.

Su ecuación es de la forma $y=mx$, siendo m la constante de proporcionalidad.

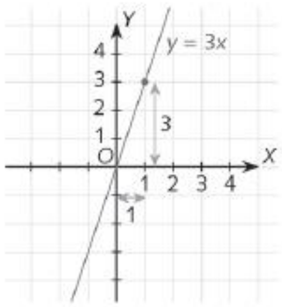
La gráfica de una función lineal es una recta que pasa por el punto (0, 0), y cuya pendiente es m. (Ejemplo 15)

La pendiente de una ecuación $y=mx$ mide la inclinación de la recta:

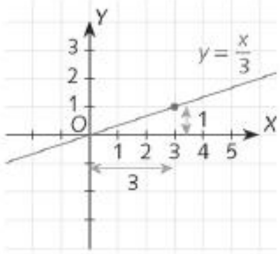
- Si $m>0$, la inclinación de la recta es positiva y la función es creciente. Cuanto mayor es el valor de m, la función crece con mayor rapidez, es decir, más inclinada es la recta. (Ejemplo 16)
- Si $m<0$, la inclinación de la recta es negativa y la función es decreciente. Cuanto menor es el valor de m, la función decrece con menos rapidez, es decir, menos inclinada es la recta. (Ejemplo 17)

Ejemplo 16

En la recta $y=3x$, la pendiente es 3. Cuando x aumenta 1 unidad, y lo hace 3 unidades.



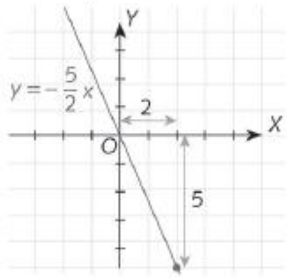
En la recta $y=\frac{x}{3}$, la pendiente es $\frac{1}{3}$. Cuando x aumenta 3 unidades, y lo hace 1 unidad.



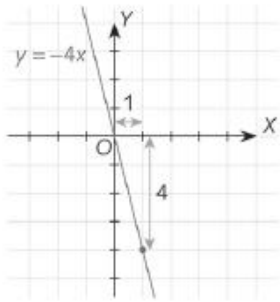
SD13

Ejemplo 17

En la recta $y=-\frac{5}{2}x$, la pendiente es $-\frac{5}{2}$. Cuando x aumenta 2 unidades, y disminuye 5 unidades.



En la recta $y=-4x$, la pendiente es -4. Cuando x aumenta 1 unidad, y disminuye 4 unidades.



Problema resuelto 2

En una pizzería venden pizzas a 7 €. Determina la ecuación de la función que relaciona el número de pizzas encargadas con el precio final del pedido. Dibuja la gráfica.

Primero se construye una tabla de valores:

Si se pide 1 pizza ⇒ el precio es $7\cdot 1=7$ €

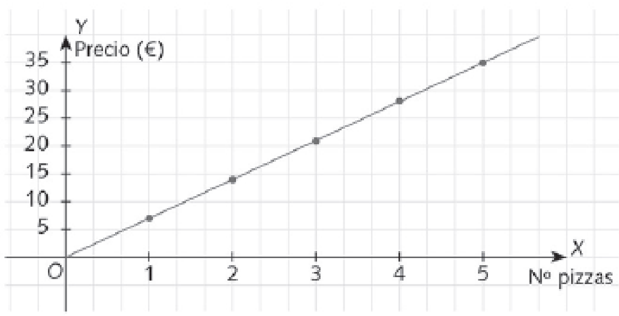
Si se piden 2 pizzas ⇒ el precio es $7\cdot 2=14$ €

Si se piden 3 pizzas ⇒ el precio es $7\cdot 3=21$ €

Si se piden 4 pizzas ⇒ el precio es $7\cdot 4=28$ €

N.º de pizzas	0	1	2	3	4	x
Precio pedido (€)	0	7	14	21	28	$7x$

El precio final del pedido se calcula multiplicando el número de pizzas por el precio de una pizza, que es el coste total.



El precio final depende del número de pizzas pedidas y viene dado por la ecuación $y=7x$.

Las **funciones afines** son aquellas cuya ecuación es de la forma $y=mx+n$, siendo m la pendiente y n la ordenada en el origen. Su gráfica es una **línea recta** que corta al eje Y en el punto $(0, n)$. (Ejemplo 18)

Problema resuelto 3

Un servicio de mensajería cobra 5 € por contratar su servicio y 0,20 € por kilómetro recorrido. Si entre dos pueblos hay una distancia de 20 km, ¿cuánto cuesta enviar un paquete de un pueblo a otro?

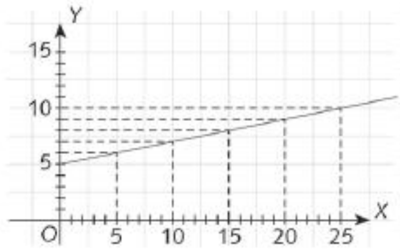
Primero se construye una tabla de valores que relacione la distancia recorrida por un mensajero, en kilómetros, con el coste de un envío, en euros:

Distancia (km)	1	5	10	15	20	x
Precio (€)	5,20	6	7	8	9	$y=5+0{,}20x$

La función afín será: $f(x)=5+0{,}20x$

La variable independiente, los kilómetros, puede tomar cualquier valor positivo, por ejemplo 1, 5, 10, 15, 20, etc.

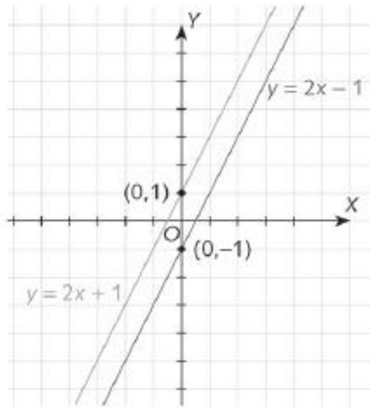
Como la pendiente es $m=0{,}20$, la función es creciente. Además, por ser $n=5$ la función pasa por (0, 5).



Para **construir** la **ecuación de una recta,** se puede proceder de dos formas:

- Conociendo un punto de la recta, $\boldsymbol{P=(x_1, y_1)}$ y el valor de la pendiente, $\boldsymbol{m}$, se sustituyen estos valores en la ecuación $y=mx+n$, y así se obtiene el valor de n. (Ejemplo 19)
- Conociendo dos puntos $\boldsymbol{P=(x_1, y_1)}$ y $\boldsymbol{Q=(x_2, y_2)}$, se calcula el valor de la pendiente: $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. El valor de n se calcula sustituyendo el valor de m y uno de los puntos, P o Q, en la ecuación $y=mx+n$. (Ejemplo 20)

Ejemplo 18



Ejemplo 19

Para determinar la recta que pasa por $P=(1, 2)$ con pendiente $m=-3$, se sustituyen estos valores en la ecuación $y=mx+n$:

$2=(-3)\cdot 1+n \Leftrightarrow n=2+3=5$

La recta es $y=-3x+5$.

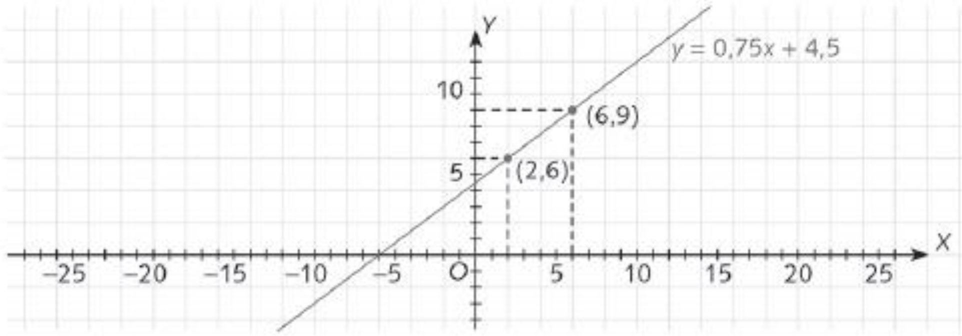
Ejemplo 20

Para determinar la recta que pasa por los puntos $P=(2, 6)$ y $Q=(6, 9)$, primero se calcula la pendiente $m=\frac{9-6}{6-2}=\frac{3}{4}=0{,}75$.

Luego, para calcular n, se sustituye $m=0{,}75$ y el punto P en la ecuación $y=mx+n$:

$6=0{,}75\cdot 2+n \Leftrightarrow n=6-1{,}5=4{,}5$

La recta que pasa por P y Q es $y=0{,}75x+4{,}5$.



SD15

4•• Funciones cuadráticas

Act.A •

La expresión algebraica de una **función cuadrática** es $y=ax^2+bx+c$. Su representación gráfica es una curva denominada **parábola.**

Sus elementos más significativos, que ayudan a representarla, son:

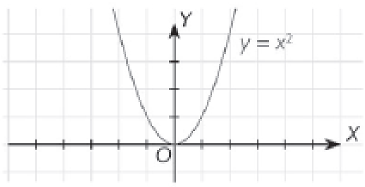
- **Coeficiente, a**: Si $a>0$, la parábola está abierta hacia arriba, es convexa, y si $a<0$, la parábola está abierta hacia abajo, es cóncava. (Ejemplo 21)
- **Vértice, $V=(V_x, V_y)$.** Es el mayor o menor valor que toma la función:

$$V_x=\frac{-b}{2a} \text{ y } V_y=f\left(\frac{-b}{2a}\right)$$

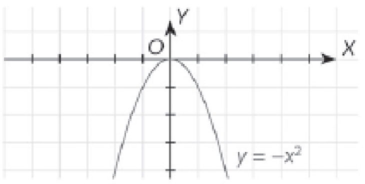
- **Punto de corte con el eje de ordenadas, Y.** Es el punto de intersección de la parábola con la recta $x=0$. Es un punto de la forma $(0, c)$.
- **Puntos de corte con el eje de abscisas, X.** Son los puntos de intersección de la parábola con la recta $y=0$. Se determinan resolviendo la ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$. Son puntos con la segunda coordenada igual a 0.

Ejemplo 21

Parábola convexa:



Parabola cóncava:



Para representar gráficamente una función cuadrática, debemos calcular su vértice y a partir de él construir una tabla de valores. La coordenada x del vértice viene dada por la siguiente expresión:

$$\boxed{V_x = \frac{-b}{2a}}$$

OBSERVA

✔ **Representa gráficamente la función:**

$y = x^2 - 6x + 5$ con $a = 1, b = -6$ y $c = 5$

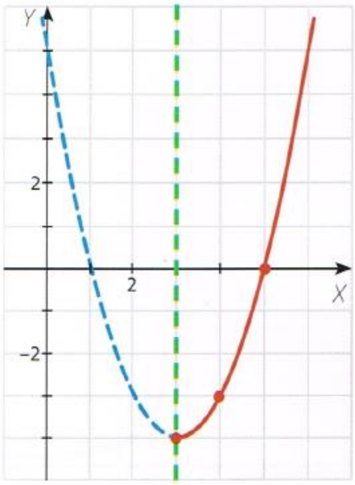
$$V_x = \frac{-(-6)}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$$

Luego $x = 3$ será la coordenada x del vértice de la parábola y su eje de simetría. Lo sustituimos en la función para obtener su coordenada en el eje Y:

$$y = 3^2 - 6 \cdot 3 + 5 = -4$$

El vértice está en el punto (3, –4).

Vamos a calcular las coordenadas de algunos puntos. Se elige valores para la x a la derecha del vértice para obtener algunos puntos de la gráfica, en nuestro caso, mayores que 3:



		Coordenadas (x, y)
Si $x = 4$	$y = 4^2 - 6 \cdot 4 + 5 = -3$	$(4, -3)$
Si $x = 5$	$y = 5^2 - 6 \cdot 5 + 5 = 0$	$(5, 0)$

Vamos a representar los puntos obtenidos en el plano y a unirlos con el vértice formando una parábola (línea roja). Como la parábola es simétrica, lo que ocurre a la derecha del vértice se refleja a la izquierda (línea azul).

SD18

6•• Función de proporcionalidad inversa

Dominio, recorrido y continuidad de la hipérbola

El **dominio** y el **recorrido** de una hipérbola son todos los números reales a excepción del 0.

Es una función **continua** en todo su dominio.

Las **funciones** de **proporcionalidad inversa** relacionan dos magnitudes inversamente proporcionales. Su expresión algebraica es $\boldsymbol{y = \frac{k}{x}}$ siendo $k \neq 0$, donde k es la constante de proporcionalidad. (Ejemplo 27)

Ejemplo

27

La velocidad de un vehículo y el tiempo que tarda en recorrer 600 km, se relacionan mediante la función: $v = \frac{600}{t}$.

Esta función solo toma valores para t positivo, ya que el tiempo nunca es negativo. Para representar gráficamente esta función, se construye una tabla de valores.

t	5	10	15	20
v	120	60	40	30

Al representar los puntos de la tabla de valores, se obtiene una curva en la que a medida que aumenta el tiempo, t, disminuye la velocidad, v, y se va aproximando al eje X.

Al contrario, si disminuye el tiempo, aumenta la velocidad y la gráfica se va aproximando al eje Y.