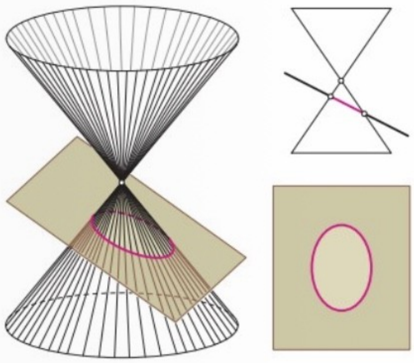
Recordemos que las curvas cónicas son aquellas que se obtienen de la intersección de una superficie cónica por un plano.

En el curso pasado estudiamos la construcción de la elipse, la parábola y la hipérbola. En este tema estudiaremos el trazado de rectas tangentes a estas curvas.

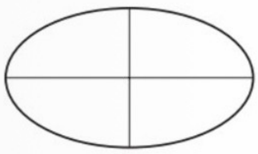
ELIPSE

Recordemos que la elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a otros dos fijos, llamados focos, es constante. El valor de dicha suma es igual a la longitud del eje mayor de la elipse. Es una curva cerrada con dos ejes de simetría.

Coliseo de Roma. Vista de satélite (Google Earth). Su planta es una elipse.



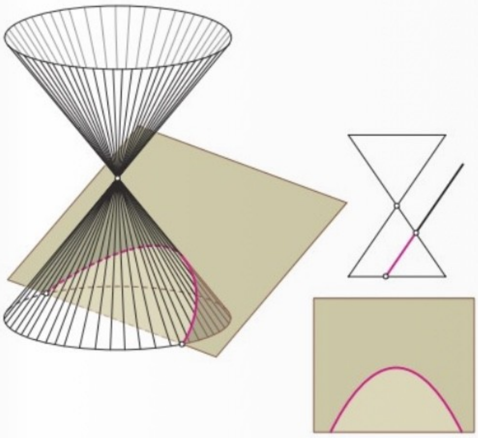
Elipse

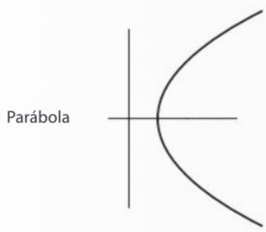


Puente de Luis I en Oporto (Portugal). Es una parábola.

PARÁBOLA

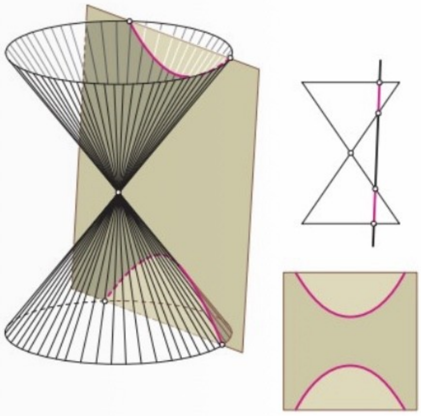
La **parábola** es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de uno fijo llamado foco, y de una recta fija denominada directriz. Es una curva abierta con una sola rama y un único eje de simetría.

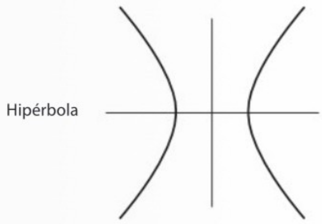




HIPÉRBOLA

La **hipérbola** es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a otros dos fijos, denominados focos, es constante. Dicha diferencia es siempre igual a la longitud del eje real. Es una curva abierta con dos ramas y dos ejes de simetría.





Guido Castelnuovo

(Venecia, 1865 - Roma, 1952). Matemático italiano. Profesor en las universidades de Pavía y Roma, se dedicó al estudio de la geometría proyectiva. Escribió *Lecciones de geometría analítica y proyectiva y cálculo de probabilidades.*

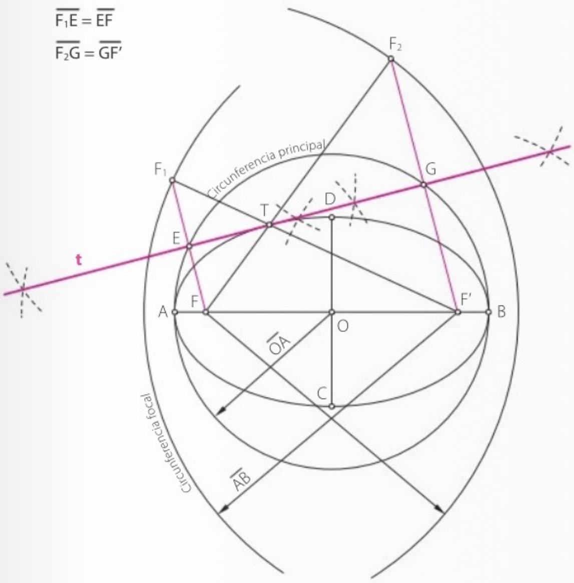
6.1. PROPIEDADES DE LAS RECTAS TANGENTES

• EN LA ELIPSE:

Las proyecciones de los focos sobre cualquier recta tangente a la elipse pertenecen a la circunferencia principal.

El punto simétrico de un foco respecto de cualquier recta tangente a la elipse pertenece a la circunferencia focal cuyo centro es el otro foco.

La recta t tangente a una cónica en un punto T de la misma es bisectriz del ángulo FTFβ, siendo F y F' los focos de la curva.



El *Arco parabólico* (1959), monumento de 18 m de altura ubicado en la ciudad peruana de Tacna.

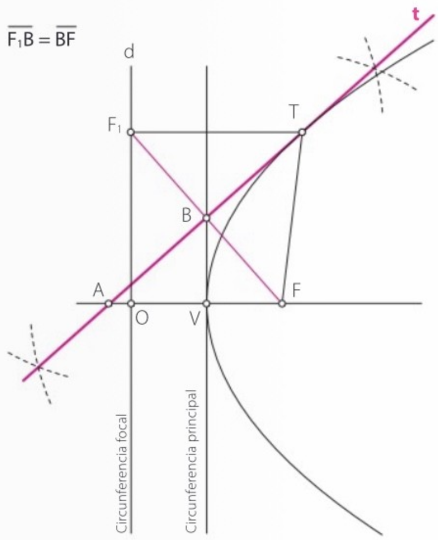
Catedral de Brasilia (1970). Oscar Niemeyer. Estructura arquitectónica de perfil hiperbólico.

• EN LA PARÁBOLA:

La proyección del foco sobre una tangente pertenece a la circunferencia principal.

La directriz es el lugar geométrico de los puntos simétricos del foco F respecto de cada tangente.

El foco F equidista del punto de tangencia de una tangente y del punto donde ésta corta al eje de la parábola, es decir, $\overline{FT}=\overline{FA}$.

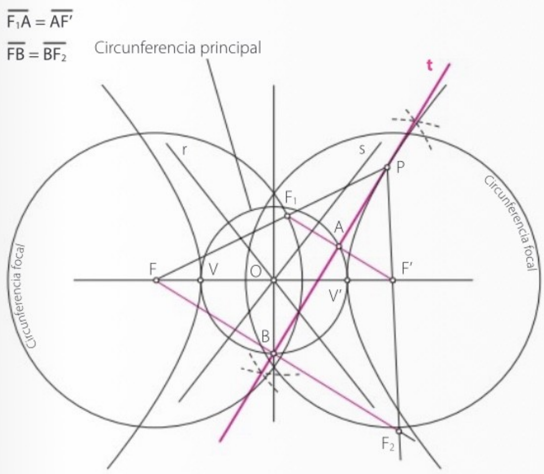


- **EN LA HIPÉRBOLA:**

Las proyecciones de los focos sobre cualquier recta tangente a la hipérbola pertenecen a la circunferencia principal.

El punto simétrico de un foco respecto de cualquier tangente a la hipérbola pertenece a la circunferencia focal cuyo centro es el otro foco.

Las asíntotas r y s son las rectas tangentes a la hipérbola en los puntos del infinito.



John Wallis

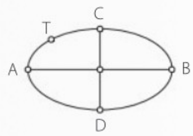
(Ashford, 23 de noviembre de 1616 - Oxford, 28 de octubre de 1703) fue un matemático inglés a quien se atribuye en parte el desarrollo del cálculo moderno. Fue un precursor del cálculo infinitesimal (introdujo la utilización del símbolo ∞ para representar la noción de infinito). Entre 1643 y 1689 fue criptógrafo del Parlamento y posteriormente de la Corte real. Fue también uno de los fundadores de la Royal Society y profesor en la Universidad de Oxford.
En 1655, Wallis publicó un tratado sobre secciones cónicas en el que las define analíticamente.

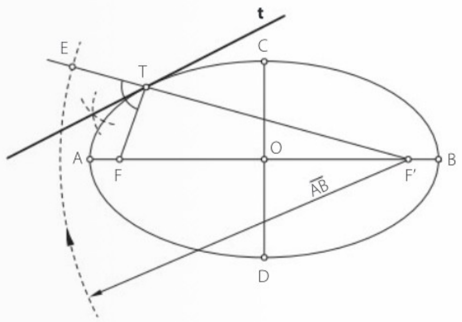
6.2. RECTAS TANGENTES A LA ELIPSE

- **RECTA TANGENTE A UNA ELIPSE EN UN PUNTO DE LA MISMA:**

Dada la elipse de ejes $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ y un punto T de la misma:

- Hallamos los focos F y F'.
- Trazamos la circunferencia focal correspondiente al foco F'.
- Unimos el punto F' con el punto T hasta cortar a la circunferencia focal en E, que es simétrico del otro foco respecto de la recta tangente.
- Trazamos la bisectriz t del ángulo FTE, que será la tangente buscada.

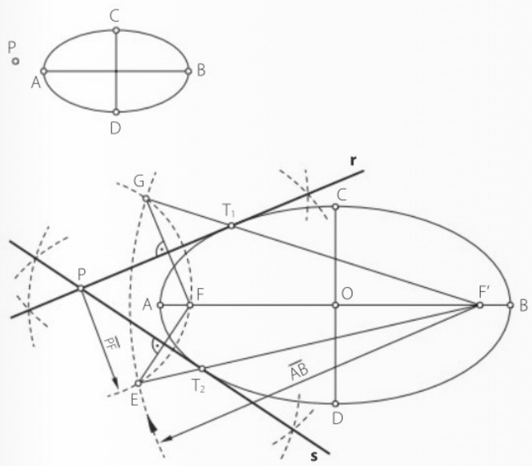




- **RECTAS TANGENTES A UNA ELIPSE DESDE UN PUNTO EXTERIOR:**

Dada la elipse de ejes $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ y un exterior P.

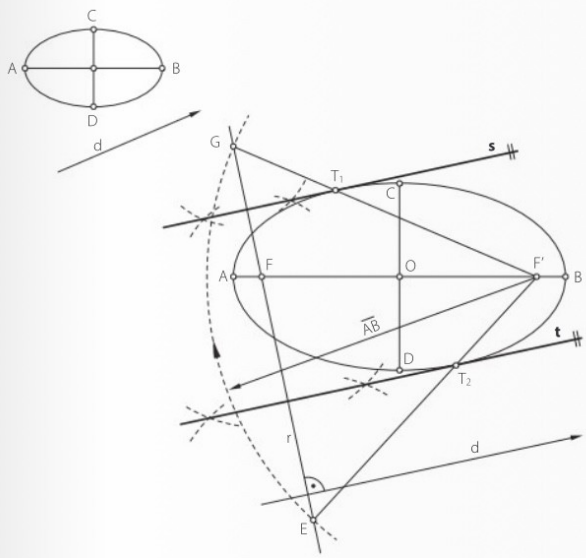
- Hallamos los focos F y F'.
- Trazamos la circunferencia focal correspondiente al foco F'.
- Con centro en P y radio $\overline{PF}$ se traza un arco que corta a la circunferencia focal en los puntos G y E.
- Se trazan las mediatrices de los segmentos $\overline{GF}$ y $\overline{EF}$. Éstas serán las tangentes r y s que buscamos.
- Para hallar los puntos de tangencia de las soluciones con la elipse, unimos G y E con el foco F' y donde estas rectas cortan a las tangentes r y s encontramos los puntos que buscamos T_1 y T_2.



- **RECTAS TANGENTES A UNA ELIPSE PARALELAS A UNA DIRECCIÓN DADA:**

Dada la elipse de ejes $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ y la dirección d:

- Hallamos los focos F y F'.
- Trazamos la circunferencia focal correspondiente al foco F'.
- Desde el foco F trazamos la recta r perpendicular a la dirección d; esta recta r corta a la circunferencia focal en los puntos G y E.
- Las mediatrices de los segmentos $\overline{GF}$ y $\overline{FE}$, son las tangentes buscadas s y t.
- Para hallar los puntos de tangencia se unen los puntos G y E con el foco F' y donde se corta a las rectas s y t encontramos T_1 y T_2.

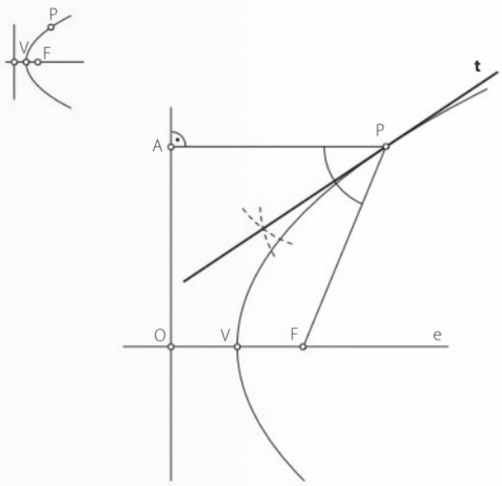


6.3. RECTAS TANGENTES A LA PARÁBOLA

- **RECTA TANGENTE A UNA PARÁBOLA EN UN PUNTO DE LA MISMA:**

Dada la parábola de vértice V, foco F y un punto P de la misma.

- Por P se traza una paralela al eje, hasta cortar a la circunferencia focal en el punto A. Recordemos que en una parábola la directriz hace las veces de circunferencia focal. El punto A es simétrico de F respecto de la tangente.
- La bisectriz del ángulo FPA es la tangente buscada t.



Johann Heinrich Lambert

(Mulhouse, 26 de agosto de 1728 - Berlín, 25 de septiembre de 1777). Fue un matemático, físico, astrónomo y filósofo alemán de origen francés. Demostró que el número π era irracional, con lo que cerró la posibilidad de poder determinar una cifra "exacta" e hizo aportes al desarrollo de la geometría hiperbólica.

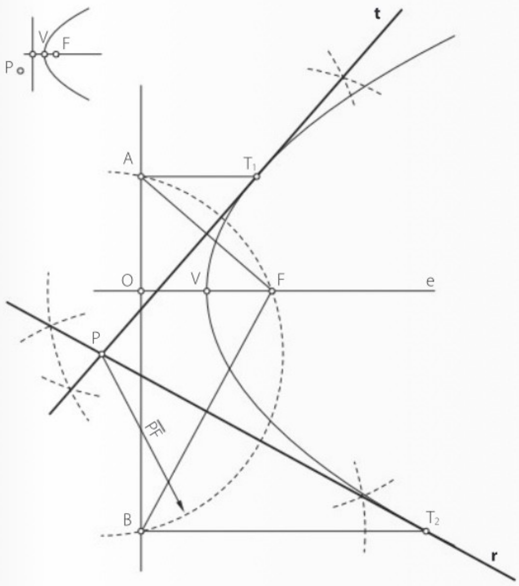
Michel Floréal Chasles

(15 nov. 1793 - 18 dic. 1880). Matemático francés. Considerado como padre de la Geometría proyectiva moderna. Sus trabajos versaron sobre temas de geometría proyectiva y descriptiva, en especial sobre las secciones y curvas cónicas.

• RECTAS TANGENTES A UNA PARÁBOLA DESDE UN PUNTO EXTERIOR:

Dada la parábola de vértice V, foco F y un punto exterior P.

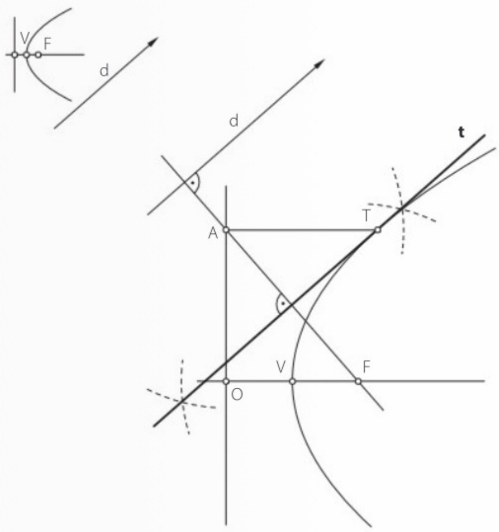
- Haciendo centro en P se traza un arco que pase por el foco F, éste corta a la circunferencia focal (directriz) en los puntos A y B.
- Las mediatrices de los segmentos $\overline{AF}$ y $\overline{FB}$ son las tangentes buscadas t y r.
- Para hallar los puntos de tangencia se traza por A y por B rectas paralelas al eje y donde éstas cortan a las tangentes t y r obtenemos los puntos de tangencia T_1 y T_2.

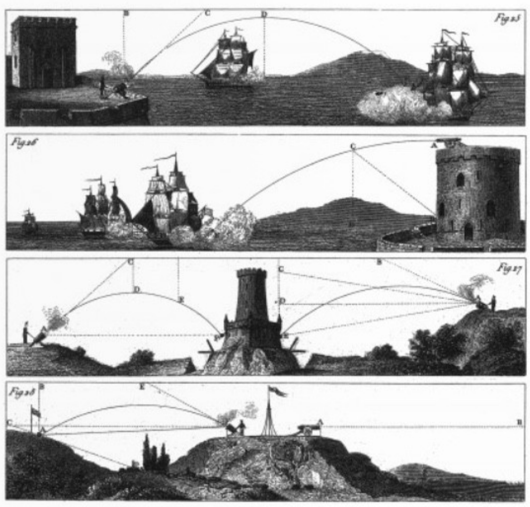


• RECTA TANGENTE A UNA PARÁBOLA PARALELA A UNA DIRECCIÓN DADA:

Dada la parábola de vértice V, foco F y la dirección d.

- Desde el foco F se traza la perpendicular a la dirección d que corta a la circunferencia focal (directriz) en el punto A.
- La mediatriz del segmento $\overline{AF}$ es la recta tangente buscada t.
- Para hallar el punto de tangencia se traza por A la paralela al eje hasta cortar a la recta tangente t en el punto T.





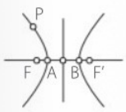
Estudios de trayectorias de proyectiles de cañón que describen parábolas.

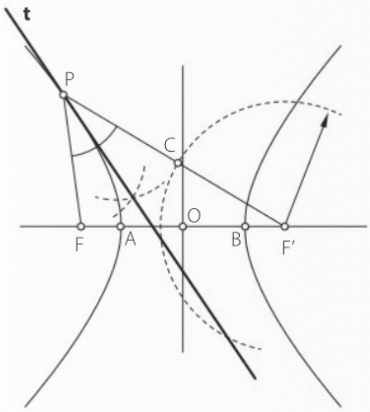
6.4. RECTAS TANGENTES A LA HIPÉRBOLA

• RECTA TANGENTE A UNA HIPÉRBOLA EN UN PUNTO DE LA MISMA:

Dada la hipérbola de eje $\overline{AB}$, focos F y F', y un punto P de la misma.

- Trazamos la circunferencia focal correspondiente al foco F'.
- Unimos el foco F' con el punto P, cortando a la circunferencia focal en el punto C, simétrico del foco F, respecto de la recta tangente.
- La bisectriz del ángulo FPC es la recta tangente que buscamos t.
- Si repetimos el proceso desde el foco F hallaremos la otra recta tangente a la hipérbola.

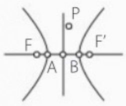


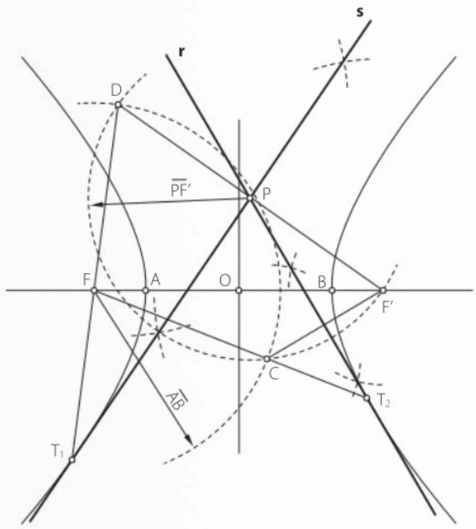


• RECTAS TANGENTES A UNA HIPÉRBOLA DESDE UN PUNTO EXTERIOR:

Dada la hipérbola de eje $\overline{AB}$, focos F y F', y el punto exterior P.

- Trazamos la circunferencia focal correspondiente al foco F.
- Con centro en el punto P se traza un arco de circunferencia que pase por el foco F', éste corta a la circunferencia focal en los puntos C y D.
- Las mediatrices de los segmentos $\overline{CF'}$ y $\overline{DF'}$ son las tangentes buscadas r y s.
- Para hallar los puntos de tangencia debemos unir los puntos C y D con el foco F hasta cortar a las rectas tangentes en los puntos T_1 y T_2.





Apolonio de Perga o de Pérgamo

(262-190 a. C.) Griego conocido como El Gran Geómetra. Dedicó su trabajo a la geometría, y en especial a las secciones planas y a las curvas planas. Fue él quien puso nombre a la elipse, la parábola y la hipérbola.

Se le atribuye también la teoría de los epiciclos, con la cual intentaba explicar el movimiento aparente de los planetas y de la velocidad de la Luna.

- **RECTAS TANGENTES A UNA HIPÉRBOLA TANGENTES A UNA DIRECCIÓN DADA:**

Dada la hipérbola de eje $\overline{AB}$, focos F y F', y la dirección d.

- Trazamos la circunferencia focal correspondiente al foco F'.
- Desde el foco F se traza la perpendicular a la dirección d que corta a la circunferencia focal en los puntos C y D.
- Las mediatrices de los segmentos $\overline{CF}$ y $\overline{DF}$ son las tangentes buscadas t y r.
- Para hallar los puntos de tangencia debemos unir los puntos C y D con el foco F' hasta cortar a las rectas tangentes en los puntos T_1 y T_2.