MÉTODO DE GAUSS II – SISTEMAS COMPATIBLES INDETERMINADOS

<u>Sistema Compatible Indeterminado (S.C.I)</u>: es un sistema con infinitas soluciones. Un sistema escalonado será un S.C.I si:

- Tiene por lo menos una incógnita <u>sin pivote.</u>
- No tiene ecuaciones imposibles (como por ejemplo $0z = 5$)

Las incógnitas sin pivote se llaman incógnitas <u>libres</u> y pueden tomar cualquier valor real.

EJEMPLO 1: *Observémnos el siguiente sistema:*

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 2 \\ & & y & + & z & = & 3 \\ & & & & 0z & = & 0 \end{array}\right.$$

La última ecuación no aporta información. Tenemos 3 incógnitas, pero solo la x y la y tiene pivote Por tanto, la incógnita z queda libre (sin pivote) y hay infinitas soluciones (S.C.I).

<u>SOLUCIÓN GENERAL DE UN S.C.I</u>: en un S.C.I se pueden expresar las distintas soluciones en función de uno o varios parámetros. Es lo que se conoce como solución general.

La idea clave es que <u>cada incógnita libre origina un parámetro</u>, como veremos en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2: *Observemos el siguiente S.C.I :*

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 2 \\ & & y & + & z & = & 3 \\ & & & & 0z & = & 0 \end{array}\right.$$

Como la última ecuación no aporta información podemos eliminarla:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 2 \\ & & y & + & z & = & 3 \end{array}\right.$$

Observamos como el sistema tiene pivotes para las incógnitas x e y, pero no para la z, que queda libre, pudiendo alcanzar cualquier valor .

Si sustituimos la z por un número real cualquiera:

$$\boxed{z = \lambda \in R}$$

entonces el sistema resultante será un sistema con dos incógnitas:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & \lambda & = & 2 \\ & & y & + & \lambda & = & 3 \end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 2+\lambda \\ & & y & = & 3-\lambda \end{array}\right.$$

Este sistema será un Compatible Determinado (S.C.D), pues estás escalonado y cada incógnita tiene su pivote.

Despejando las incógnitas x e y de abajo hacia arriba obtendremos la solución general del sistema, que dependerá del valor del parámetro λ:

$E_2: \; y = 3 - \lambda$

$E_1: \; x + (3 - \lambda) = 2 + \lambda \rightarrow x = -3 + \lambda + 2 + \lambda \rightarrow x = -1 + 2\lambda$

La solución general del sistema será:

$$\boxed{\begin{cases} x = -1+2\lambda \\ y = 3-\lambda & \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}}$$

Dando valores a λ obtenemos las distintas soluciones del sistema. Por ejemplo, para el valor $\lambda = 1$ obtenemos la solución:

$$\begin{cases} x = -1+2\cdot 1 = 1 \\ y = 3-1 = 2 \\ z = 1 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{(x,y,z) = (1,2,1)}$$

En general para encontrar la solución general de un S.C.I escalonado debemos:

1. Eliminar las ecuaciones sin pivote
2. Sustituir todas las incógnitas sin pivote por parámetros
3. Mover los parámetros al lado derecho de la ecuación.
4. Despejar las incógnitas con pivote desde abajo hacia arriba

EJEMPLO 3: *El siguiente sistema*

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

es un S.C.I pues no tiene ecuaciones imposibles y tiene un pivote para la x.

Podemos eliminas las dos últimas ecuaciones ya que no aportan información:

$$x+y+z=2$$

quedando reducido el sistema a una sola ecuación. Introducimos parámetros para las incógnitas sin pivote:

$$\boxed{y = \lambda \in R} \qquad \boxed{z = \gamma \in R}$$

Despejamos ahora la incógnita x:

$$x+y+z=2 \rightarrow x+\lambda+\gamma = 2 \rightarrow x = 2-\lambda-\gamma$$

Por tanto, la solución general del sistema es:

$$\boxed{\begin{cases} x = 2-\lambda-\gamma \\ y = \lambda & \lambda, \gamma \in \mathbb{R} \\ z = \gamma \end{cases}}$$

En general, en un S.C.I el número de parámetros de la solución general vendrá dado por la fórmula:

$$\boxed{\text{Número de parámetros} = \text{Número de incógnitas} - \text{Número de pivotes}}$$

Por ejemplo, en el ejemplo 2 hay un parámetro pues: $3 \text{ incógnitas} - 2 \text{ pivotes} = 1 \text{ parámetro.}$

Y en el ejemplo 3 hay: $3 \text{ incógnitas} - 1 \text{ pivote} = 2 \text{ parámetros.}$

Conviene aclarar que el orden de las incógnitas no es fijo, y que a será necesario variar el orden para resolver el sistema. La clave estará en colocar primero las incógnitas con pivote y luego las incógnitas sin pivote:

EJEMPLO 4: *Si intercabiamos la columna de la y con la de la z el siguiente sistema queda escalonado:*

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 2 \\ & & 0y & + & z & = & 1 \end{array}\right. \xrightarrow{C_y \leftrightarrow C_z} \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & z & + & y & = & 2 \\ & & z & + & 0y & = & 1 \end{array}\right.$$

En este caso tendríamos pivotes en la x y en la z, siendo y la variable libre. Por lo tanto el parámetro estará en la y:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & z & + & y & = & 2 \\ & & z & + & & = & 1 \end{array}\right. \xrightarrow{y=\lambda} \left\{\begin{array}{ccccc} x & + & z & = & 2-\lambda \\ & & z & = & 1 \end{array}\right.$$

Para obtener la solución general despejamos la x y la z :

$$\begin{array}{l} E_2: \; z = 1 \\ E_1: \; x + 1 = 2 - \lambda \rightarrow x = 3 - \lambda \end{array}$$

Por tanto, la solución general del sistema es: $\boxed{\left\{\begin{array}{l} x = 3 - \lambda \\ y = \lambda \qquad\qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{array}\right.}$

Por último vamos a poner un ejemplo de S.C.I sin escalonar, para ver el procedimiento entero:

EJEMPLO 5: *Resolver el siguiente sistema mediante el método de Gauss:*

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 4 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 8 \\ 3x & + & 2y & + & 4z & = & 12 \end{array}\right.$$

Eliminamos los términos situados debajo del primer pivote

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 4 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 8 \\ 3x & + & 2y & + & 4z & = & 12 \end{array}\right. \xrightarrow[E_3-3E_1]{E_2-2E_1} \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 4 \\ & & -y & + & z & = & 0 \\ & & -y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$

Ahora eliminamos el término situado debajo del segundo pivote:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 4 \\ & & -y & + & z & = & 0 \\ & & -y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \xrightarrow{E_3+E_2} \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 4 \\ & & -y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

Como la última ecuación no aporta información se puede eliminar.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 4 \\ & & -y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$

Observamos además que hay pivotes en x e y, pero no en z. Por tanto:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 4 \\ & & -y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \xrightarrow{z=\lambda} \left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 4-\lambda \\ & & -y & = & -\lambda \end{array}\right.$$

Despejamos ahora las incógnitas con pivote, es decir, la x y la y :

$$\begin{array}{l} E_2: \; -y = -\lambda \rightarrow y = \lambda \\ E_1: \; x + \lambda = 4 - \lambda \rightarrow x = 4 - 2\lambda \end{array}$$

Por tanto la solución general será:

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x = 4 - 2\lambda \\ y = \lambda \qquad\qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}\right.}$$

En forma resumida: $\boxed{(x, y, z) = (4 - 2\lambda, \lambda, \lambda) \qquad \lambda \in \mathbb{R}}$

EJERCICIOS

1. Resuelve los siguientes sistemas compatibles indeterminados escalonados

a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 4 \\ & & y & & & = & 2 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$ S.C.I. $(2-\lambda,\, 2,\, \lambda)$

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 6 \\ & & 0 & & z & = & 2 \\ & & 0 & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$ S.C.I. $(4-\lambda,\, \lambda,\, 2)$

c) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & z & = & 4 \\ & & 3y & + & z & = & 6 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$ S.C.I. $\left(1+\frac{2\lambda}{3},\, 2-\frac{\lambda}{3},\, \lambda\right)$

d) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & + & z & = & 12 \\ & & 2y & - & z & = & 2 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$ S.C.I. $\left(\frac{26-\lambda}{6},\, 1+\frac{\lambda}{2},\, \lambda\right)$

e) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & z & = & 7 \\ & & 0 & & 2z & = & 4 \\ & & 0 & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$ S.C.I. $\left(\frac{5-\lambda}{2},\, \lambda,\, 2\right)$

f) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & y & - & z & = & 3 \\ & & 0 & & 2z & = & 6 \\ & & 0 & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$ S.C.I. $\left(\frac{6-\lambda}{3},\, \lambda,\, 3\right)$

g) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & z & = & 4 \\ & & 0 & & 0 & = & 0 \\ & & 0 & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$ S.C.I. $\left(2-\frac{\lambda+\mu}{2},\, \lambda,\, \mu\right)$

h) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & + & z & = & 6 \\ & & 0 & & 0 & = & 0 \\ & & 0 & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$ S.C.I. $\left(2+\frac{\lambda-\mu}{3},\, \lambda,\, \mu\right)$

i) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 5 \\ & & 0 & & 0 & = & 0 \\ & & 0 & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$ S.C.I. $(5-\lambda-\mu,\, \lambda,\, \mu)$

2. Resuelve los siguientes sistemas compatibles indeterminados mediante el método de Gauss:

a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 4 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 8 \\ 3x & + & 2y & + & 4z & = & 12 \end{array}\right.$ S.C.I. $(4-2\lambda,\, \lambda,\, \lambda)$

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 2 \\ 2x & - & 2y & + & 2z & = & 4 \\ 3x & - & y & + & 5z & = & 6 \end{array}\right.$ S.C.I. $\left(\frac{4}{3}-\lambda,\, -\frac{2}{3}+\lambda,\, \frac{2}{3}\right)$

c) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & z & = & 3 \\ x & + & 2y & + & z & = & 4 \\ 3x & + & 3y & & & = & 7 \end{array}\right.$ S.C.I. $(1-\lambda,\, 2,\, \lambda)$

d) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 2 \\ 2x & + & 2y & + & 2z & = & 4 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 5 \end{array}\right.$ S.C.I. $(-1+\lambda,\, 3-2\lambda,\, \lambda)$

e) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & z & = & 5 \\ 4x & + & 3y & - & z & = & 12 \\ 2x & + & 2y & & & = & 7 \end{array}\right.$ S.C.I. $\left(\frac{3}{2}-\frac{\lambda}{2},\, 2-\lambda,\, \lambda\right)$

f) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & y & + & z & = & 1 \\ 6x & - & 2y & + & 2z & = & 2 \\ 3x & + & y & + & 3z & = & 5 \end{array}\right.$ S.C.I. $\left(\frac{1}{3}-\frac{\lambda}{3},\, 2+\lambda,\, \lambda\right)$

3. Clasifica los siguientes sistemas como S.C.D, S.C.I o S.I. Resuelve aquellos que sean compatibles.

a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & 2y & + & 2z & = & 6 \\ 3x & + & 3y & + & 3z & = & 9 \end{array}\right.$ S.C.I. $(3-\lambda-\mu, \lambda, \mu)$

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & 2y & + & 2z & = & 6 \\ 3x & + & 3y & + & 3z & = & 10 \end{array}\right.$ S.I.

c) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ 2x & - & y & + & z & = & 4 \\ x & + & 2y & - & z & = & 1 \end{array}\right.$ S.C.D. $\left(\frac{11}{7}, \frac{2}{7}, \frac{8}{7}\right)$

d) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 4 \\ 2x & + & 2y & + & 2z & = & 8 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$ S.C.I. $(2-\lambda, 2, \lambda)$

e) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & z & = & 5 \\ 4x & + & 2y & - & 2z & = & 10 \\ x & + & y & & & = & 3 \end{array}\right.$ S.C.I. $(2+\lambda, 1-\lambda, \lambda)$

f) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & z & = & 4 \\ x & + & 3y & & & = & 5 \end{array}\right.$ S.C.D. $\left(\frac{5}{3}, \frac{10}{9}, \frac{16}{9}\right)$

g) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 2 \\ 2x & + & 2y & + & 2z & = & 4 \\ 3x & + & 3y & + & 3z & = & 7 \end{array}\right.$ S.I.

h) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 5 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 9 \\ 3x & + & 2y & + & 4z & = & 14 \end{array}\right.$ S.C.I. $(4-2\lambda, 1+\lambda, \lambda)$

i) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 4 \\ 2x & - & y & + & z & = & 7 \\ x & + & 3y & - & z & = & 5 \end{array}\right.$ S.C.D. $\left(\frac{15}{4}, \frac{3}{8}, -\frac{1}{8}\right)$

4. Un rectángulo tiene perímetro 40 cm. Llamando x e y a la longitud de sus lados, determina todos los rectángulos posibles.

5. En una hucha hay monedas de 1 €, 2 € y 5 €. Entre todas suman 30 €. Llamando x, y y z al número de monedas de cada tipo, expresa todas las posibilidades.

6. En un examen se han obtenido únicamente notas de 6, 8 y 10 puntos. La suma total de las puntuaciones obtenidas por todos los alumnos es 180. Expresa todas las distribuciones posibles.

7. Tres números tienen suma 20 y la diferencia entre el primero y el segundo es 4. Determina todas las ternas posibles.

8. Tres amigos reúnen 120 €. El primero aporta 10 € más que el segundo. Expresa todas las formas posibles de repartir las aportaciones.

9. Tres números tienen suma 18 y el doble del primero coincide con la suma de los otros dos. Determina todas las ternas posibles.