MÉTODO DE GAUSS

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} ax & + & by & + & cz & = & d \\ a'x & + & b'y & + & c'z & = & d' \\ a''x & + & b''y & + & c''z & = & d'' \end{array}\right. \qquad \text{EJEMPLO:} \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 2y & + & z & = & -1 \\ -2x & & & + & z & = & 10 \\ x & - & 3y & + & 4z & = & 0 \end{array}\right.$$

Para resolver sistemas de ecuaciones con 3 incógnitas o más vamos a usar el método de Gauss, que puede entenderse como una generalización ordenada del método de reducción.

DIAGONAL PRINCIPAL DEL SISTEMA:
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} \color{red}{ax} & + & by & + & cz & = & d \\ a'x & + & \color{red}{b'y} & + & c'z & = & d' \\ a''x & + & b''y & + & \color{red}{c''z} & = & d'' \end{array}\right.$$

A los elementos de la diagonal distintos de cero se les llama **pivotes**.

SISTEMA ESCALONADO: un sistema de ecuaciones lineales se dice escalonado si tiene todos los términos situados por debajo de la diagonal principal iguales a cero.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} ax & + & by & + & cz & = & d \\ 0x & + & b'y & + & c'z & = & d' \\ 0x & + & 0y & + & c''z & = & d'' \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} ax & + & by & + & cz & = & d \\ & & b'y & + & c'z & = & d' \\ & & & & c''z & = & d'' \end{array}\right.$$

En un sistema escalonado, cada ecuación empieza más a la derecha que la anterior.
Los sistemas escalonados son importantes porque son fáciles de resolver:

EJEMPLO 1 : *Resolver el sistema:*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 5y & - & 10z & = & -15 \\ & & 2y & + & 5z & = & 4 \\ & & & & 3z & = & -6 \end{array}\right.$$

$$E_3 : 3z = -6 \Rightarrow z = -2$$
$$E_2 : 2y + 5(-2) = 4 \Rightarrow 2y = 14 \Rightarrow y = 7$$
$$E_1 : 3x - 5(7) - 10(-2) = -15 \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Solución: $\boxed{(x, y, z) = (0, 7, -2)}$

MÉTODO DE GAUSS: el método de Gauss es un método que permite transformar un sistema cualquiera en un sistema escalonado, y por lo tanto fácil de resolver.

Las **operaciones permitidas en el método de Gauss** son las siguientes:

1) Intercambiar de lugar dos ecuaciones, por ejemplo:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & -3 \\ 2x & - & y & + & z & = & 3 \\ -3x & + & y & - & 2z & = & -6 \end{array}\right. \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & 3 \\ x & + & 2y & - & 3z & = & -3 \\ -3x & + & y & - & 2z & = & -6 \end{array}\right.$$

Evidentemente también podemos intercambiar dos columnas de incógnitas, por ejemplo:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & 3 \\ x & + & 2y & - & 3z & = & -3 \\ -3x & + & y & - & 2z & = & -6 \end{array}\right. \xrightarrow{C_x \leftrightarrow C_y} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} -y & + & 2x & + & z & = & 3 \\ 2y & + & x & - & 3z & = & -3 \\ y & - & 3x & - & 2z & = & -6 \end{array}\right.$$

2) Multiplicar una ecuación por un número distinto de cero. Por ejemplo:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & -3 \\ 2x & - & y & + & z & = & 3 \\ -3x & + & y & - & 2z & = & -6 \end{array}\right. \xrightarrow{-2E_1} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & 4y & - & 2z & = & 6 \\ 2x & - & y & + & z & = & 3 \\ -3x & + & y & - & 2z & = & -6 \end{array}\right.$$

3) <u>Sumar o restar ecuaciones</u>. Por ejemplo:

<u>Sumar o restar ecuaciones</u>

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & 2y & - & 3z & = & -3 \\ -3x & + & y & - & 2z & = & -6 \end{array}\right. \xrightarrow{E_2-E_1} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & 3 \\ & & 3y & - & 4z & = & -6 \\ -3x & + & y & - & 2z & = & -6 \end{array}\right.$$

Al aplicar cada una de estas 3 operaciones a un sistema se obtiene como resultado un **sistema equivalente al inicial**, es decir un sistema **con las mismas soluciones**.

Veamos como podemos aplicar el método de Gauss para resolver un sistema:

EJEMPLO 2: *Resolver el siguiente sistema de ecuaciones usando el método de Gauss.*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & 4z & = & 21 \\ 3x & + & y & - & z & = & -18 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 12 \end{array}\right.$$

Como queremos obtener un <u>sistema escalonado</u> *necesitamos eliminar todos los elementos que queden por debajo de la diagonal del sistema :*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & 4z & = & 21 \\ 3x & + & y & - & z & = & -18 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 12 \end{array}\right.$$

En un primer paso vamos a <u>eliminar los términos que están debajo del primer pivote de la diagonal.</u> es decir debajo de la x. *Para ello* <u>*vamos a usar siempre la primera ecuación.*</u>

Para eliminar el término $3x$ *hacemos la siguiente operación:*

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} E_2 : & & 3x & + & y & - & z & = & -18 \\ -3E_1 : & & -3x & + & 9y & - & 12z & = & -63 \\ \hline & & & & 10y & - & 13z & = & -81 \end{array}$$

Obtenemos así una nueva segunda ecuación en la que ha desaparecido el término en x*, es decir, hemos anulado el elemento situado debajo del primer elemento de la diagonal.*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & 4z & = & 21 \\ 3x & + & y & - & z & = & -18 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 12 \end{array}\right. \xrightarrow{E_2-3E_1} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & 4z & = & 21 \\ & & 10y & - & 13z & = & -81 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 12 \end{array}\right.$$

Repetimos el proceso con la tercera ecuación:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} E_3 : & & 2x & - & y & + & 3z & = & 12 \\ -2E_1 : & & -2x & + & 6y & - & 8z & = & -42 \\ \hline & & & & 5y & - & 5z & = & -30 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & 4z & = & 21 \\ & & 10y & - & 13z & = & -81 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 12 \end{array}\right. \xrightarrow{E_3-2E_1} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & 4z & = & 21 \\ & & 10y & - & 13z & = & -81 \\ & & 5y & - & 5z & = & -30 \end{array}\right.$$

Ahora que hemos conseguido eliminar todos los términos situados debajo del primer pivote de la diagonal, vamos a <u>*eliminar el término situado debajo del segundo pivote*</u>*, es decir, debajo de* $10y$
Tenemos entonces que eliminar el término $5y$*:*

$$\begin{array}{rrcrcr} 2E_3: & 10y & - & 10z & = & -60 \\ -E_2: & -10y & + & 13z & = & 81 \\ \hline & & & 3z & = & 21 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & 4z & = & 21 \\ & & 10y & - & 13z & = & -81 \\ & & 5y & - & 5z & = & -30 \end{array}\right. \xrightarrow{2E_3-E_2} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & 4z & = & 21 \\ & & 10y & - & 13z & = & -81 \\ & & & & 3z & = & 21 \end{array}\right.$$

De esta manera el sistema ya queda escalonado y listo para resolver.

$$\begin{aligned} &E_3:\ 3z = 21 \Rightarrow z = 7 \\ &E_2:\ 10y - 13(7) = -81 \Rightarrow 10y - 91 = -81 \Rightarrow 10y = 10 \Rightarrow y = 1 \\ &E_1:\ x - 3(1) + 4(7) = 21 \Rightarrow x - 3 + 28 = 21 \Rightarrow x = -4 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN : $\boxed{(x, y, z) = (-4, 1, 7)}$

De manera resumida, para aplicar el método de Gauss tenemos que seguir los siguientes pasos:

<u>PASOS DEL MÉTODO DE GAUSS</u>

1. Elegimos un pivote.
2. Anulamos los términos que están debajo del pivote
3. Repetimos el proceso con los siguientes pivotes hasta escalonar el sistema
4. Resolvemos de abajo hacia arriba

EJEMPLO 3: *Resolver el siguiente sistema de ecuaciones usando el método de Gauss.*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & z & = & 4 \\ 3x & + & 4y & - & z & = & 12 \\ -5x & + & y & + & z & = & -6 \end{array}\right.$$

Eliminamos los términos debajo del <u>primer pivote</u> $2x$*:*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & z & = & 4 \\ 3x & + & 4y & - & z & = & 12 \\ -5x & + & y & + & z & = & -6 \end{array}\right. \xrightarrow[2E_3+5E_1]{2E_2-3E_1} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & z & = & 4 \\ & & 5y & + & z & = & 12 \\ & & 7y & - & 3z & = & 8 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rrcrcrcr} 2E_2: & 6x & + & 8y & - & 2z & = & 24 \\ -3E_1: & -6x & - & 3y & + & 3z & = & -12 \\ \hline & & & 5y & + & z & = & 12 \end{array} \qquad \begin{array}{rrcrcrcr} 2E_3: & -10x & + & 2y & + & 2z & = & -12 \\ 5E_1: & 10x & + & 5y & - & 5z & = & 20 \\ \hline & & & 7y & - & 3z & = & 8 \end{array}$$

Hacemos lo mismo con los términos debajo del <u>segundo</u> pivote $5y$ *:*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & z & = & 4 \\ & & 5y & + & z & = & 12 \\ & & 7y & - & 3z & = & 8 \end{array}\right. \xrightarrow{5E_3-7E_2} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & z & = & 4 \\ & & 5y & + & z & = & 12 \\ & & & & -22z & = & -44 \end{array}\right.$$

Con el sistema ya escalonado resolvemos:

$$\begin{aligned} &E_3:\ -22z = -44 \Rightarrow z = 2 \\ &E_2:\ 5y + 2 = 12 \Rightarrow 5y = 10 \Rightarrow y = 2 \\ &E_1:\ 2x + 2 - 2 = 4 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN: $\boxed{(x, y, z) = (2, 2, 2)}$

<u>TIPOS DE SISTEMAS LINEALES</u>: Cuando el **sistema está escalonado** pueden ocurrir tres cosas distintas:

SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (S.C.D) : al escalonar obtenemos un sistema con <u>un pivote para cada incógnita</u>, por lo que podemos despejar el valor de cada incógnita. En este caso tendremos un sistema con una <u>única solución.</u>

EJEMPLO 4:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ \quad\quad 5y + z = 12 \\ \quad\quad\quad -22z = -44 \end{cases}$$

En este caso tenemos pivotes en x, en y y en z., marcados en rojo.
Por tanto, se puede resolver hacia atrás y se obtiene una única solución (S.C.D)

$E_3: \ -22z = -44 \Rightarrow z = 2$

$E_2: \ 5y + 2 = 12 \Rightarrow 5y = 10 \Rightarrow y = 2$

$E_1: \ 2x + 2 - 2 = 4 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$

SOLUCIÓN : $\boxed{(x, y, z) = (2, 2, 2)}$

SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (S.C,I) : al escalonar obtenemos un sistema con <u>alguna incógnita sin pivote</u>**,** es decir una <u>incógnita libre</u> y que por lo tanto puede alcanzar cualquier valor. En ese caso tenemos un sistema con <u>infinitas soluciones</u>.

EJEMPLO 5:

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ \quad\quad y + z = 3 \\ \quad\quad\quad 0z = 0 \end{cases}$$

La última ecuación no aporta información. Tenemos 3 incógnitas, pero solo 2 ecuaciones útiles. Por tanto, la incógnita z queda libre (sin pivote) y hay infinitas soluciones (S.C.I).

SISTEMA INCOMPATIBLE (S.I): aparece cuando, al escalonar, aparece una <u>ecuación imposible</u>:

$$0 = k \quad \text{con } k \neq 0$$

Como está ecuación no se puede verificar nunca, el sistema <u>no tiene solución.</u>

EJEMPLO 6:

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ \quad\quad y + z = 3 \\ \quad\quad\quad 0 = 5 \end{cases}$$

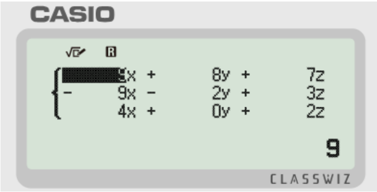
La última ecuación no se verifica para ningún valor de las incógnitas x,y,z . Por lo tanto el sistema no tiene solución (S.I).

<u>RESUMEN:</u> al aplicar Gauss, si llegamos a una contradicción, el sistema es incompatible. Si no hay contradicción y tenemos un pivote asociado a cada una de las incógnitas, es compatible determinado. Si no hay contradicción pero falta algún pivote, queda alguna incógnita libre y el sistema es compatible indeterminado.

Forma escalonada	Interpretación	Tipo
Pivote en cada incógnita	Una única solución	SCD
Aparece $0 = 0$ y hay incógnitas libres	Infinitas soluciones	SCI
Aparece $0 = k, \ k \neq 0$	Ninguna solución	SI

SISTEMAS LINEALES CON CALCULADORA CASIO fx-570/991 SP CW

1) Pulsamos HOME y seleccionamos ECUACIÓN
2) Selecionamos Sist ec lineal
3) Seleccionamos el número de incógnitas (permite hasta 4)
4) Introducimos los coeficientes y pulsamos EXE.
5) Pulsando los botones de desplazamiento lateral obtendremos los valores de las distintas incógnitas.



Vídeo: Sistemas de ecuaciones con CASIO

EJERCICIOS

1. Resuelve los siguientes sistemas por el método de Gauss:

a) $\begin{cases} x+2y-z=4\\ 2x-y+3z=3\\ 3x+y+z=7\end{cases}$ S.C.D. $(2,1,0)$

b) $\begin{cases} 2x-y+z=7\\ x+3y-2z=3\\ 3x-2y+4z=17\end{cases}$ S.C.D. $(3,2,3)$

c) $\begin{cases} x-y+2z=5\\ 2x+y-z=3\\ -x+3y+z=3\end{cases}$ S.C.D. $(2,1,2)$

d) $\begin{cases} 3x+y-z=8\\ x-2y+3z=-3\\ 2x+3y+z=6\end{cases}$ S.C.D. $(2,1,-1)$

e) $\begin{cases} 2x+3y-z=6\\ x-y+2z=-7\\ 3x+2y+2z=-5\end{cases}$ S.C.D. $(1,0,-4)$

f) $\begin{cases} x+y+z=6\\ 2x-y+3z=9\\ -x+4y-z=4\end{cases}$ S.C.D. $(1,2,3)$

g) $\begin{cases} 4x-y+2z=3\\ x+2y-z=0\\ 3x+y+z=1\end{cases}$ S.C.D. $(1,-1,-1)$

h) $\begin{cases} 2x+y+3z=11\\ x-3y+z=-6\\ 3x+2y-z=7\end{cases}$ S.C.D. $(1,3,2)$

i) $\begin{cases} x+2y+z=-1\\ 3x-y+2z=-4\\ 2x+y-z=-5\end{cases}$ S.C.D. $(-2,0,1)$

j) $\begin{cases} 2x-y+z=0\\ x+2y-3z=9\\ 3x+y+2z=-7\end{cases}$ S.C.D. $(1,-2,-4)$

k) $\begin{cases} x-2y+3z=11\\ 2x+y-z=-4\\ -x+3y+2z=3\end{cases}$ S.C.D. $(0,-1,3)$

l) $\begin{cases} 3x+y-2z=14\\ x-4y+z=-3\\ 2x+3y+z=7\end{cases}$ S.C.D. $(3,1,-2)$

2. Resuelve por el método de Gauss:

a) $\begin{cases} 2x+y-z=3\\ x-3y+2z=-5\\ 3x+2y+z=4\end{cases}$ S.C.D. $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$

b) $\begin{cases} x+2y-3z=8\\ 2x-y+z=0\\ 3x+y+2z=5\end{cases}$ S.C.D. $\left(\frac{29}{20},\frac{43}{20},-\frac{3}{4}\right)$

c) $\begin{cases} 3x-y+z=1\\ x+4y-2z=6\\ 2x+y+3z=2\end{cases}$ S.C.D. $\left(\frac{17}{21},\frac{7}{6},-\frac{11}{42}\right)$

d) $\begin{cases} 2x+3y-z=7\\ x-y+4z=-6\\ 3x+y+2z=1\end{cases}$ S.C.D. $\left(\frac{11}{14},\frac{19}{14},-\frac{19}{14}\right)$

e) $\begin{cases} x-2y+z=-5\\ 4x+y-z=3\\ 2x+3y+2z=10\end{cases}$ S.C.D. $\left(\frac{6}{35},\frac{20}{7},\frac{19}{35}\right)$

f) $\begin{cases} 3x+y-2z=0\\ x-2y+z=4\\ 2x+3y+z=-1\end{cases}$ S.C.D. $\left(\frac{25}{28},-\frac{33}{28},\frac{3}{4}\right)$

3. Usa el método de Gauss para clasificar y resolver cuando sea posible los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x-y+3z=5\\ -x+4y+z=6\\ 8x-11y+7z=3\end{cases}$ S.C.I.

b) $\begin{cases} 3x+2y-z=7\\ x-5y+2z=-4\\ 5x-8y+3z=2\end{cases}$ S.I.

c) $\begin{cases} 2x+3y-z=9\\ -x+4y+2z=5\\ 5x-2y+3z=-2\end{cases}$ S.C.D. $(1,2,-1)$

d) $\begin{cases} -2x+y+4z=1\\ 5x-3y+z=9\\ x-y+9z=10\end{cases}$ S.I.

e) $\begin{cases} 4x-y+2z=3\\ -2x+3y-5z=-7\\ 8x-7y+12z=17\end{cases}$ S.C.I.

f) $\begin{cases} 3x-2y+4z=20\\ x+5y-z=-6\\ -2x+3y+2z=-1\end{cases}$ S.C.D. $(2,-1,3)$

g) $\begin{cases} x+2y-3z=-2\\ 3x-y+z=5\\ x-5y+7z=9\end{cases}$ S.C.I.

h) $\begin{cases} 2x+5y-z=4\\ -3x+y+2z=-1\\ 5x+21y-2z=16\end{cases}$ S.I.

i) $\begin{cases} 4x+y-2z=10\\ 2x-3y+5z=-14\\ -x+4y+3z=1\end{cases}$ S.C.D. $(1,2,-2)$

j) $\begin{cases} 2x-y+3z=5\\ -x+4y+z=6\\ 8x-11y+7z=4\end{cases}$ S.I.

k) $\begin{cases} 2x+5y-z=4\\ -3x+y+2z=-1\\ 5x+21y-2z=15\end{cases}$ S.C.I.

l) $\begin{cases} 3x+y-2z=-4\\ -2x+4y+z=16\\ 5x-3y+2z=-10\end{cases}$ S.C.D. $(-1,3,2)$

4. En una caja registradora encontramos billetes de 50 €, 100 € y 200 €, siendo el número total de billetes igual a 21 y la cantidad total de dinero 1800 €. Sabiendo que el número de billetes de 50 € es el quíntuple de los de 200 €, calcula el número de billetes de cada clase.

5. Un hotel adquirió un total de 200 unidades entre almohadas, mantas y edredones, gastando un total de 7500 euros. El precio de una almohada es de 16 euros, el de una manta es de 50 euros y el de un edredón es de 80 euros. Además, el número de almohadas compradas es igual al número de mantas más el número de edredones. ¿Cuántas almohadas, mantas y edredones ha comprado el hotel? (SOL : (100,70,30))

6. En una función de teatro se recaudan 5200 € vendiéndose 200 entradas de tres tipos distintos: patio de butacas, a 30 €; primer y segundo piso, a 25 €, y localidades con visibilidad reducida, a 10 €. Sabiendo que el número de localidades más económicas suponen un 25% del número de localidades de 25 €, calcula el número de entradas de cada tipo.

7. Un circo está compuesto por 3 pistas circulares tangentes dos a dos. Las distancias entre sus centros son 80, 100 y 120 metros, respectivamente. Calcula el diámetro de cada una de las pistas. (Haz un dibujo)

8. Un hipermercado inicia una campaña de ofertas. En la primera de ellas descuenta un 4% en un cierto producto A, un 6% en el producto B y un 5 % en el producto C. A las dos semanas pone en marcha la segunda oferta descontando un 8% sobre el precio inicial de A, un 10% sobre el precio inicial de B y un 6 % sobre el precio inicial de C. Se sabe que si un cliente compra durante la primera oferta de un producto a, dos B y tres C, se ahorra 16 euros respecto al precio inicial. Si compra tres productos A, uno B y cinco en la segunda oferta el ahorro es de 29 euros. Si compra un producto A, uno B y uno C, sin ningún tipo de descuento, debe abonar 135 euros. ¿Cuánto costaba originalmente cada uno de los productos?

9. Las edades de tres miembros de una misma familia, el abuelo, el hijo y el nieto, verifican lo siguiente: La suma de las edades del abuelo y del nieto excede en 5 años al doble de la edad que tiene el hijo; hace 5 años la edad del abuelo era el doble de la edad que tenía el hijo; sumando las edades que tendrían los tres dentro de 10 años se obtiene 28 veces la edad que tenía el nieto hace 5 años. Halla las edades actuales de los tres.

10. Se consideran, el número de tres cifras “xyz” y el que resulta de éste al permutar las cifras de las unidades y de las centenas. Halla el valor de las cifras “x”, “y” y “z” sabiendo que la suma de los dos números es 585, que la división del primero entre el segundo tiene de cociente 1 y de resto 99 y que la suma de la cifra de las centenas y la cifra de las decenas del primer número es 7.

11. Un sistema de ecuaciones con todos los términos independientes iguales a 0 no puede ser incompatible. Razónalo.

12. Halla la parábola que pasa por los puntos: $A(1,1)$, $B(2,3)$ y $C(4,5)$. (SOL: $y=5x^2-6x-1$).

13. Halla la parábola que pasa por los puntos: $A(1,0)$, $B(2,-3)$ y $C(-1,-6)$. $(SOL: y=-2x^2+3x+1)$.