LECCIÓN 4. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES.

En la lección 2 ya vimos como resolver algunas ecuaciones sencillas y algunos resultados. En esta lección vamos a profundizar más en la resolución de ecuaciones.

RAÍCES COMPLEJAS

Inicialmente vamos a estudiar un ejemplo sencillo desde cero, sin usar ninguna fórmula, unicamente las propiedades que ya conocemenos de los complejos. Esto que nos ayudará a comprender mejor la fórmula del caso general.

EJEMPLO 1 (RAÍCES CÚBICAS DE LA UNIDAD)

Vamos a calcular los complejos z que verifican la igualdad:

$$z^3 = 1$$

Vamos a escribir ambos números en forma polar: $x = R_\beta \qquad 1 = 1_{0^\circ}$

Tenemos entonces que:

$$z^3 = 1 \Rightarrow (R_\beta)^3 = 1_{0^\circ} \Rightarrow (R^3)_{3\beta} = 1_{0^\circ}$$

Para que dos números complejos en forma polar sean iguales tienen que tener <u>mismo módulo y ángulos congruentes</u>. En nuestro caso :

$$R^3 = 1 \Rightarrow R = \sqrt[3]{1} = 1$$

Por otro lado sabemos que:

$$3\beta = 0^\circ + k\,360^\circ \Rightarrow \beta = \frac{0^\circ + k\,360^\circ}{3} \Rightarrow \beta = k\,120^\circ$$

donde k es un número entero

k	$\beta = k \cdot 120^\circ$
0	0°
1	120°
2	240°
3	$360^\circ \equiv 0^\circ$
4	$480^\circ \equiv 120^\circ$
5	$600^\circ \equiv 240^\circ$
$\vdots$	$\vdots$

El primer ángulo es 0° y los demás ángulos se obtienen sumando en cada paso 120°.

A partir de $k = 3$ los ángulos obtenidos serán congruentes con los anteriores, por lo que habrá exactamente tres raíces cúbicas de 1.

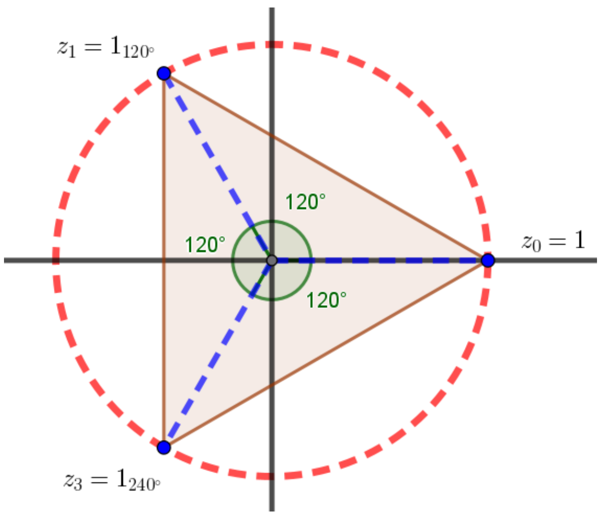
$$z_0 = 1_{0^\circ} = 1(\cos 0^\circ + i \operatorname{sen} 0^\circ) = 1$$

$$z_1 = 1_{120^\circ} = 1(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = 1_{240^\circ} = 1(\cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

La raíz $z_0 = 1$ se denomina raíz principal y las demás se obtienen rotándola 120°.

Gráficamente, las raíces son los vértices de un triángulo equilátero.



Después de comprender este primer ejemplo ya estamos preparados para introducir la fórmula para el caso general.

RAÍCES COMPLEJAS : La ecuación en $\mathbb{C}$ tiene n soluciones dadas por:

$$z_k = \sqrt[n]{r}_{\frac{\alpha+360^\circ k}{n}} \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Son la raíces n-ésimas complejas de r_α.

Observaciones:

- Todas ellas tienen el mismo módulo y argumentos igualmente separados
- La raíz z_0 es la raíz principal y las demás se obtienen rotándola $\frac{360^\circ}{n}$ en el plano complejo.
- Al representarlas obtenemos los vértices de un polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia de radio r.$z^n = r_\alpha$

La demostración de la fórmula consiste en repetir el procedimiento visto en el ejemplo 1 para el caso general.

Demostración: Hay que determinar los complejos z que verifican: $z^n = r_\alpha$
Si $z = R_\beta$ entonces:

$$z^n = r_\alpha \Rightarrow (R_\beta)^n = r_\alpha \Rightarrow (R^n)_{n\beta} = r_\alpha$$

Como ambos complejos tienen mismo módulo se deduce: $R^n = r \Rightarrow R = \sqrt[n]{r}$

Además tienen que tener argumentos congruentes, por lo que:

$$n\beta = \alpha + k\,360^\circ \Rightarrow \beta = \frac{\alpha + k\,360^\circ}{n}$$

El ángulo principal es: $\beta_0 = \frac{\alpha}{n}$

El resto se obtienen sumando $\frac{360^\circ}{n}$ sucesivamente,
por lo que empezaran a repetirse cuando $k = n$.

Por lo tanto habrá n raíces complejas:

$$z_k = \sqrt[n]{r}_{\frac{\alpha+360^\circ k}{n}} \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

k	$\beta = \frac{\alpha + k\,360^\circ}{n}$
0	$\frac{\alpha}{n}$
1	$\frac{\alpha + 360^\circ}{n}$
2	$\frac{\alpha + 2 \cdot 360^\circ}{n}$
$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$\frac{\alpha + (n-1)360^\circ}{n}$
n	$\frac{\alpha + n360^\circ}{n} = \frac{\alpha}{n} + 360^\circ \equiv \frac{\alpha}{n}$
$n+1$	$\frac{\alpha + (n+1)360^\circ}{n} = \frac{\alpha + 360^\circ}{n} + 360^\circ \equiv \frac{\alpha + 360^\circ}{n}$
$\vdots$	$\vdots$

***EJEMPLO 2:** Calcular las soluciones complejas de la ecuación*

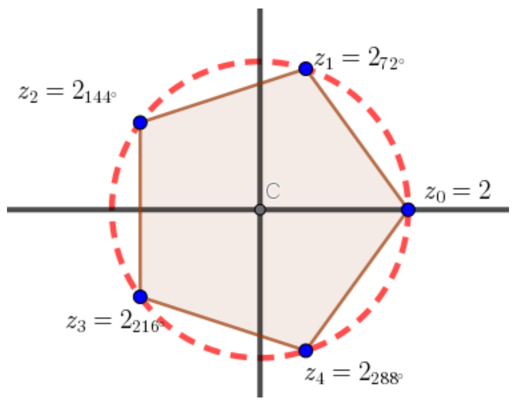
$$z^5 = 32$$

y representarlas en el plano complejo. Escribirlas en forma binómica.

En forma polar la ecuación es: $z^5 = 32_0$

Tendrá 5 soluciones dadas por la expresión:

$$z_k = \sqrt[5]{32}_{\frac{0^\circ + 360^\circ k}{5}} \qquad k = 0, 1, \ldots, 4$$



$$z_0 = \sqrt[5]{32}_{\frac{0^\circ + 360^\circ \cdot 0}{5}} = 2_{0^\circ} = 2$$
$$z_1 = \sqrt[5]{32}_{\frac{0^\circ + 360^\circ \cdot 1}{5}} = 2_{72^\circ}$$
$$z_2 = \sqrt[5]{32}_{\frac{0^\circ + 360^\circ \cdot 2}{5}} = 2_{144^\circ}$$
$$z_3 = \sqrt[5]{32}_{\frac{0^\circ + 360^\circ \cdot 3}{5}} = 2_{216^\circ}$$

$z_4 = \sqrt[5]{32}_{\frac{0°+360°\cdot 4}{5}} = 2_{288°}$

La raíz principal es $z_0 = 2$ *y las demás se obtienen rotándola* $\dfrac{360°}{5} = 72°$ *sucesivamente.*

En forma binómica:

$$
\begin{aligned}
z_0 &= 2_{0°} = 2(\cos 0° + i \sin 0°) = 2 \\
z_1 &= 2_{72°} = 2(\cos 72° + i \sin 72°) \approx 0,618 + 1,902i \\
z_2 &= 2_{144°} = 2(\cos 144° + i \sin 144°) \approx -1,618 + 1,176i \\
z_3 &= 2_{216°} = 2(\cos 216° + i \sin 216°) \approx -1,618 - 1,176i \\
z_4 &= 2_{288°} = 2(\cos 288° + i \sin 288°) \approx 0,618 - 1,902i
\end{aligned}
$$

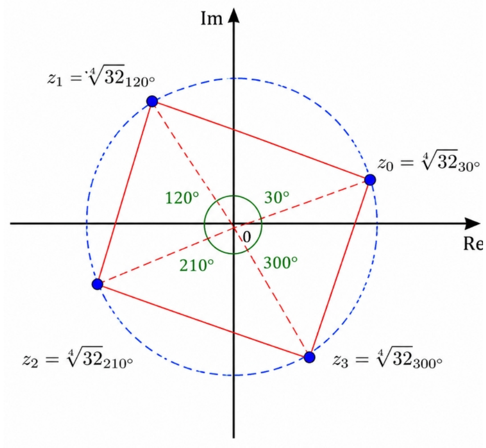
Veamos ahora un ejemplo en el calculamos las raíces de un complejo no real.

EJEMPLO 3:*Calcular las soluciones complejas de la ecuación*

$$z^4 = -16 + 16\sqrt{3}\,i$$

y escribirlas en forma binómica.

En forma polar: $-16 + 16\sqrt{3}\,i = 32_{120°}$



Por tanto:

$$z_k = \sqrt[4]{32}_{\frac{120° + 360°\, k}{4}} \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

Como $\sqrt[4]{32} = 2\sqrt[4]{2}$ *, tenemos:*

$$
\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[4]{32}_{30°} = \sqrt[4]{32}(\cos 30° + i \sin 30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[4]{32} + \frac{1}{2}\sqrt[4]{32}\,i \\
z_1 &= \sqrt[4]{32}_{120°} = \sqrt[4]{32}(\cos 120° + i \sin 120°) = -\frac{1}{2}\sqrt[4]{32} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[4]{32}\,i \\
z_2 &= \sqrt[4]{32}_{210°} = \sqrt[4]{32}(\cos 210° + i \sin 210°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[4]{32} - \frac{1}{2}\sqrt[4]{32}\,i \\
z_3 &= \sqrt[4]{32}_{300°} = \sqrt[4]{32}(\cos 300° + i \sin 300°) = \frac{1}{2}\sqrt[4]{32} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[4]{32}\,i
\end{aligned}
$$

En este caso la raíz principal es $z_0 = 2\sqrt[4]{2}_{30°}$ *y las demás se obtienen rotándola* $90°$ *sucesivamente.*

El resultado fundamental en la resolución de ecuaciones polinómicas es:

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA: Todo polinomio no constante con coeficientes complejos tiene al menos una raíz compleja.

Como consecuencia del teorema fundamental del álgebra tenemos el siguiente resultado;

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS COMPLEJOS: todo polinomio de grado n con coeficientes en $\mathbb{C}$ se puede factorizar como producto de n polinomios de grado 1:

$$P(z) = k(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n)$$

Donde $z_1, z_2, \ldots, z_n$ son las raíces del polinomio.

EJEMPLO 4

a) *En la lección 2 vimos que las raíces de* $P(z)=z^2+4$ *eran* $z_1=2i$ *y* $z_2=-2i$*.*

Por lo tanto la factorización del polinomio es: $P(z)=(z-z_1)(z-z_2)$
Es decir:

$$P(z)=(z-2i)(z+2i)$$

b) *También en la lección 2 vimos que las raíces de* $P(z)=2z^2-4z+10$ *eran*

$$z_1=1+2i \qquad z_2=1-2i$$

Como el coeficiente del monomio de mayor grado es 2, entonces la factorización será

$$P(z)=2(z-z_1)(z-z_2)$$

Es decir:

$$P(z)=2(z-[1+2i])(z-[1-2i])$$

c) *En el ejemplo 1 de esta lección vimos que las raíces del polinomio* $P(z)=z^3-1$ *son :*

$$z_0=1\,, \qquad z_1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\,, \qquad z_2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por lo tanto: $P(z)=(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)$
Es decir:

$$P(z)=(z-1)\left(z-\left[-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\right)\left(z-\left[-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\right)$$

Alguna de las raíces puede estar repetida; es lo que llamamos raíz múltiple.
Por lo tanto, **un polinomio en $\mathbb{C}$ tiene tantas raíces como su grado, teniendo en cuenta la multiplicidad de las raíces.**

EJEMPLO 5 *: El polinomio*

$$P(z)=(z-1)^2(z-2)^3(z-i)$$

tiene grado 6. Observando su factorización vemos que tiene 3 raíces: 1, 2 e i.

Observando sus multiplicidades, vemos que:
- i es una raíz simple *- 1 es una raíz doble* *-2 es una raíz triple*

Por lo tanto tiene un total de 6 raíces contando multiplicidades.

Observemos como en el ejemplo 4 las dos raíces:

$$z_1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\,, \qquad z_2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

son conjugadas entre ellas, es decir $z_2=\overline{z}_1$. Esto no es casualidad, como nos dice el siguiente resultado:

PROPIEDAD (RAÍCES CONJUGADAS): sea P es un polinomio con coeficientes en $\mathbb{R}$. Si z es una raíz de P, entonces $\overline{z}$ también es una raíz de P.

EJEMPLO 6 *Halla las raíces de:* $P(x) = x^4 + 16$ *y factorízalo en C.*

Como es un polinomio con coeficientes reales , sus raíces tienen que aparecer por pares conjugados.
Para calcular las raíces observamos que:

$$x^4 + 16 = 0 \Rightarrow x^4 = -16 \Rightarrow x^4 = 16_{180^\circ}$$

Por lo tanto las raíces son;

$z_0 = 2_{45^\circ} = 2(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) = \sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$

$z_1 = 2_{135^\circ} = 2(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$

$z_2 = 2_{225^\circ} = 2(\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\, i$

$z_3 = 2_{315^\circ} = 2(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ) = \sqrt{2} - \sqrt{2}\, i$

Donde observamos que $\overline{z_0} = z_3$ *y* $\overline{z_1} = z_2$

Tenemos entonces que: $P(x) = (x - z_0)(x - \overline{z_0})(x - z_1)(x - \overline{z_1})$

Es decir:

$$P(x) = \left(x - \left[\sqrt{2} + \sqrt{2}\, i\right]\right)\left(x - \left[\sqrt{2} - \sqrt{2}\, i\right]\right)\left(x - \left[-\sqrt{2} + \sqrt{2}\, i\right]\right)\left(x - \left[-\sqrt{2} - \sqrt{2}\, i\right]\right)$$

Obsérvese que si multiplicamos dos factores lineales con raíces conjugadas obtenemos un polinomio real, ya que:

$$(x - z)(x - \overline{z}) = x^2 - x\overline{z} - xz + z\overline{z} = x^2 - x(z + \overline{z}) + |z|^2 = x^2 - x2Re(z) + |z|^2$$

Y por lo tanto:

$$(x - z)(x - \overline{z}) = x^2 - 2Re(z)x + |z|^2$$

Como consecuencia de esto se deduce el siguiente resultado importante:

<u>FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS REALES</u>: todo polinomio real se puede factorizar como producto de **polinomios de grado 1** y **polinomios de grado 2** en $\mathbb{R}$.

Otra consecuencia importante de la propiedad de las raíces conjugadas:

EJEMPLO 7: *Factoriza* $P(x) = x^4 + 16$ *en* $\mathbb{C}$

En el ejemplo 6 vimos que su factorización en $\mathbb{C}$ *es:*

$$P(x) = (x - z_0)(x - \overline{z_0})(x - z_1)(x - \overline{z_1})$$

Siendo $z_0 = \sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$ *y* $z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$

Multiplicamos los factores correspondientes a raíces conjugadas:

$(x - z_0)(x - \overline{z_0}) = x^2 - xRe(z_0) + |z_0|^2 = x^2 - 2\sqrt{2}x + 4$

$(x - z_1)(x - \overline{z_1}) = x^2 - xRe(z_1) + |z_1|^2 = x^2 + 2\sqrt{2}x + 4$

Obteniendo:

$$P(x) = (x^2 - 2\sqrt{2}x + 4)(x^2 + 2\sqrt{2}x + 4)$$

Como consecuencia:

PROPIEDAD (POLINOMIOS DE GRADO IMPAR): todo polinomio real de grado impar tiene por lo menos una raíz real.

EJEMPLO 8: *Este polinomio tiene por lo menos una raíz real:*

$$P(x) = x^7 + x^4 + 1$$

EJERCICIOS

1. En cada caso calcula las raíces, exprésalas en forma binómica y represéntalas en el plano complejo:

   a) $z^3 = 8$
   b) $z^4 = -81$
   c) $z^5 = 243$
   d) $z^7 = -1$
   e) $z^6 = 3$
   f) $z^4 = 1$
   g) $z^6 = -64i$
   h) $z^4 = -3 - 4i$
   i) $z^5 = -1 + 2i$

2. Sin calculadora, halla las raíces de estos polinomios y factorízalos en $\mathbb{C}$.

   a) $P(x) = x^2 + 9$
   b) $P(x) = x^3 + 4x$
   c) $P(x) = x^6 - 1$
   d) $P(x) = x^4 + 3x^2 + 2$
   e) $P(x) = x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6$
   f) $P(x) = x^3 + 4x + 2x^2 + 8$
   g) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$
   h) $P(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 20x$

3. Factoriza en $\mathbb{R}$ los polinomios del ejercicio 2.

4. Razona tu respuesta: ¿puede tener un polinomio de grado 6 más de 6 raíces distintas?

5. ¿Pueden ser estas todas las raíces de un polinomio con coeficientes reales?.

   $$z_0 = 1 + 3i \quad z_1 = 2 + 3i \quad .z_3 = 1 - 3i \quad z_4 = 2i$$

   En caso negativo, cambia el valor de alguna de ellas para que si sea posible.

6. ¿Es posible que un polinomio de grado 3 tenga exactamente 2 raíces reales? ¿Y una de grado 4?¿Y una de grado 5?

7. Pon el ejemplo de un polinomio real de grado 4 que no tenga raíces reales.

8. Razona tu respuesta: un polinomio de grado impar puede no tener raíces reales.

9. Un polinomio tiene como raíces todas las raíces terceras de la unidad y todas las raíces cuartas de 1.
   a) ¿Qué grado tiene que tener como mínimo?
   b) Encuentra dicho polinomio.

10. Razona si es verdadero o falso: Sea z_0 solución de $z^6 = -1$, entonces las restantes soluciones de la ecuación son:

$$z_1 = z_0 \cdot 1_{60^\circ} \quad z_2 = z_0 \cdot (1_{60^\circ})^2 \quad z_3 = z_0 \cdot (1_{60^\circ})^3 \quad z_4 = z_0 \cdot (1_{60^\circ})^4 \quad z_5 = z_0 \cdot (1_{60^\circ})^5$$

En caso negativo modifica alguna de ellas para que sea cierto. En caso positivo, suponiendo que z_0 es un número real positivo, indica cuales de las raíces son conjugadas entre sí.

11. Dos polinomios con exactamente las mismas raíces tienen que ser proporcionales. Razona la respuesta. (Piensa en los polinomios $P(x) = 2(x-2)(x-i)$ y $Q(x) = (x-2)(x-i)$)