

## LECCIÓN 2. NÚMEROS COMPLEJOS. FORMA BINÓMICA.

**UNIDAD IMAGINARIA:** se define la unidad imaginaria como el número  $i = \sqrt{-1}$ .

Como ya hemos comentado en la introducción,  $i$  no es un número real. A partir de la unidad imaginaria se definen los números complejos.

**NÚMERO COMPLEJO:** un número complejo es una expresión de la forma

$$z = a + bi \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Un número complejo escrito en esta forma diremos que está escrito en **forma binómica**. El número  $a$  se llama parte real de  $z$  y el número  $b$  parte imaginaria, y se denotan por:

$$\operatorname{Re}(z) = a \quad \operatorname{Im}(z) = b$$

**EJEMPLO 1:** Son números complejos:

$$z_1 = 1 + 2i \quad z_2 = -2 + 4i \quad z_3 = 3 - 5i \quad i = 0 + 1i \quad 1 = 1 + 0i$$

Sus partes real e imaginaria son:

$$\operatorname{Re}(z_1) = 1 \quad \operatorname{Im}(z_1) = 2 \quad \operatorname{Re}(z_2) = -2 \quad \operatorname{Im}(z_2) = 4 \quad \operatorname{Re}(z_3) = 3 \quad \operatorname{Im}(z_3) = -5$$

$$\operatorname{Re}(i) = 0 \quad \operatorname{Im}(i) = 1 \quad \operatorname{Re}(1) = 1 \quad \operatorname{Im}(1) = 0$$

Cuando la parte imaginaria de un número es 0 decimos que es un número real.

Cuando la parte real de un número es 0 decimos que es un número imaginario puro.

**EJEMPLO 2:**

Números reales:

$$1 = 1 + 0i \quad 2 = 2 + 0i \quad -5 = -5 + 0i \quad 0,75 = 0,75 + 0i$$

Número imaginarios puros:

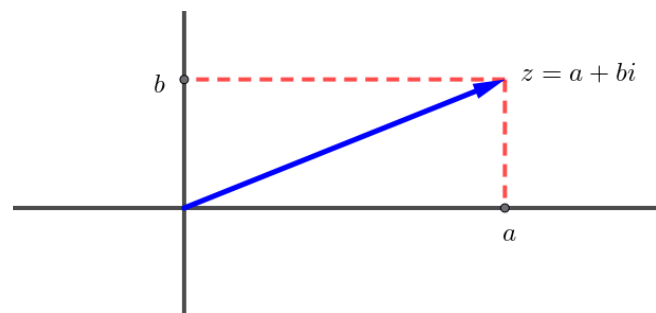
$$i = 0 + 1i \quad 3i = 0 + 3i \quad -4i = 0 - 4i \quad -1,23i = 0 - 1,23i$$

Denotamos por  $\mathbb{C}$  al conjunto de todos los números complejos, esto es:

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

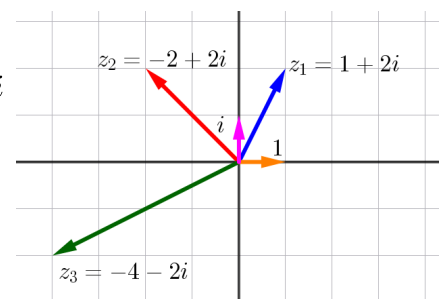
**REPRESENTACIÓN GRÁFICA:** el número complejo

$z = a + bi$  se representa gráficamente en el plano coordenado como el vector  $(a, b)$



**EJEMPLO 3:** Representar gráficamente los números complejos

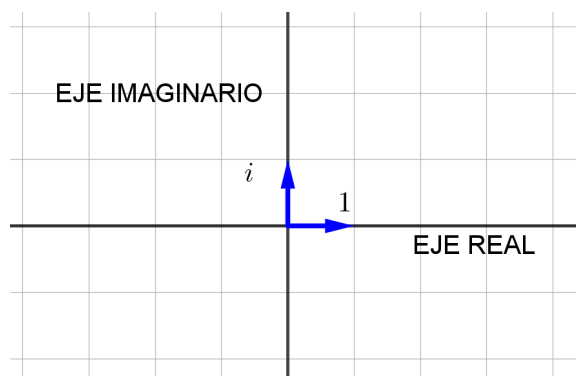
$$z_1 = 1 + 2i \quad z_2 = -2 + 2i \quad z_3 = -4 - 2i \quad i = 0 + 1i \quad 1 = 1 + 0i$$



Al plano coordenado resultante lo denotamos por **plano complejo**.

Al eje X se le llama **EJE REAL** ya que en el aparecen representados todos los números reales.

Al eje Y se le llama **EJE IMAGINARIO**, ya que en el aparecen representados todos los números imaginarios puros.



**SUMA DE NÚMEROS COMPLEJOS:** la suma de dos números complejos  $z_1 = a + bi$  y  $z_2 = c + di$  viene dada por:

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

Esto significa que los números complejos se suman como polinomios en los que la unidad imaginaria  $i$  se comporta como una variable.

También podemos ver la suma como la suma de los dos vectores  $(a, b) + (c, d)$ .

**EJEMPLO 4:** a) Sumar  $z_1 = 2 + 5i$  y  $z_2 = 3 + 2i$

$$z_1 + z_2 = (2 + 5i) + (3 + 2i) = 2 + 5i + 3 + 2i = 2 + 3 + 5i + 2i = 5 + 7i$$

b) Sumar  $z_1 = 3i$  y  $z_2 = -4 - 3i$

$$z_1 + z_2 = 3i + (-4 - 3i) = 3i - 4 - 3i = -4 + 3i - 3i = -4 + 0i = -4$$

La suma de dos complejos hereda las propiedades de la suma de números reales:

### Propiedades de la suma

1)  $z + w = w + z$

2)  $(z + w) + u = z + (w + u)$

3)  $z + 0 = z$

4)  $z + (-z) = 0$

**PRODUCTO DE NÚMEROS COMPLEJOS:** dos números complejos se multiplican teniendo en cuenta :

$$i = \sqrt{-1} \implies i^2 = -1$$

Siendo más concretos, el producto de dos números complejos  $z_1 = a + bi$  y  $z_2 = c + di$  viene dado por:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Pero está fórmula no hace falta sabérsela como vamos a ver en el siguiente ejemplo:

**EJEMPLO 5:**

a)  $(2 + 3i) \cdot (5 + 4i) = 10 + 8i + 15i + 12i^2 = 10 + 23i - 12 = -2 + 23i$

b)  $(2 - 5i) \cdot (-3 + 7i) = -6 + 14i + 15i - 35i^2 = -6 + 29i + 35 = 29 + 29i$

c)  $i \cdot (-2 + 3i) = -2i + 3i^2 = -2i - 3 = -3 - 2i$

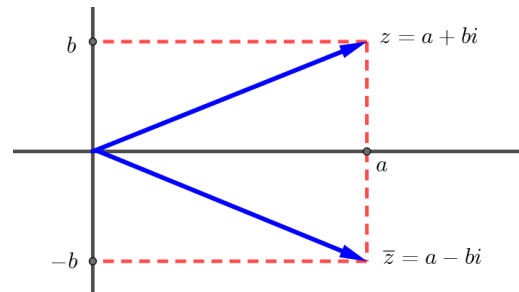
El producto de dos complejos hereda las propiedades del producto de número reales:

## Propiedades del producto

- 1)  $zw = wz$
- 2)  $(zw)u = z(wu)$
- 3)  $z \cdot 1 = z$
- 4)  $z \cdot z^{-1} = 1 \quad (z \neq 0)$
- 5)  $z(w + u) = zw + zu$

**CONJUGADO DE UN NÚMERO COMPLEJO:** el conjugado de  $z = a + bi$  es el número que se obtiene cambiando de signo su parte imaginaria:

$$\bar{z} = a - bi$$



### EJEMPLO 6:

a) el conjugado de  $z = 2 + 3i$  es  $\bar{z} = 2 - 3i$     b) el conjugado de  $z = -4 + 3i$  es  $\bar{z} = -4 - 3i$

c) el conjugado de  $i$  es  $\bar{i} = -i$

d) el conjugado de  $1$  es  $\bar{1} = 1$

## Propiedades del conjugado

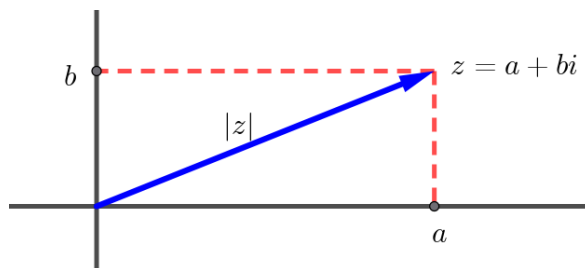
- 1)  $\overline{\bar{z}} = z$
- 2)  $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
- 3)  $\overline{z\bar{w}} = \bar{z}w$
- 4)  $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}} \quad (w \neq 0)$

**MÓDULO DE UN NÚMERO COMPLEJO:** el módulo de un número  $z = a + bi$  es el módulo del vector asociado.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Es muy importante la siguiente propiedad que relaciona el módulo con el conjugado de un vector:

**Propiedad:**  $z \cdot \bar{z} = |z|^2$



**Demostración:**  $z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$

### EJEMPLO 6:

a) El módulo de  $z = 2 + 3i$  es:  $|z| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$

b) El módulo de  $z = 2 - 4i$  es:  $|z| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

c) Otros módulos:

$$|i| = |0 + 1i| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1 \quad |-2i| = |0 - 2i| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$|1| = |1 + 0i| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$$

## Propiedades del módulo

- 1)  $|z| \geq 0, \quad |z| = 0 \iff z = 0$
- 2)  $|zw| = |z||w|$
- 3)  $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \quad (w \neq 0)$
- 4)  $|z|^2 = z\bar{z}$
- 5)  $|z + w| \leq |z| + |w|$

**INVERSO DE UN NÚMERO COMPLEJO:** el inverso de un número complejo  $z \neq 0$  viene dado por:

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Demostración: Para comprobar que  $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$  es el inverso de  $z$  hay que comprobar que  $z \cdot z^{-1} = 1$

$$z \cdot z^{-1} = z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{z \cdot \bar{z}}{|z|^2} = \frac{|z|^2}{|z|^2} = 1$$

Por lo tanto  $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$  es el inverso de  $z$ .

### **EJEMPLO 7:**

$$a) \frac{1}{i} = i^{-1} = \frac{\bar{i}}{|i|^2} = \frac{-i}{1} = -i$$

$$b) \frac{1}{4+3i} = (4+3i)^{-1} = \frac{\overline{4+3i}}{|4+3i|^2} = \frac{4-3i}{(\sqrt{4^2+3^2})^2} = \frac{4-3i}{25} = \frac{4}{25} - \frac{3}{25}i$$

$$\begin{aligned} c) \frac{1-2i}{3+5i} &= (1-2i)(3+5i)^{-1} = (1-2i) \cdot \frac{\overline{3+5i}}{|3+5i|^2} = (1-2i) \cdot \frac{3-5i}{34} = \frac{(1-2i)(3-5i)}{34} \\ &= \frac{3-5i-6i+10i^2}{34} = \frac{3-11i-10}{34} = \frac{-7-11i}{34} = -\frac{7}{34} - \frac{11}{34}i \end{aligned}$$

Ahora que ya sabemos operar con números complejos ya podemos resolver algunas ecuaciones que no tenían solución en  $\mathbb{R}$  pero que si la tienen en  $\mathbb{C}$ :

### **EJEMPLO 8:** Resuelve las siguientes ecuaciones polinómicas:

$$a) x^2 + 4 = 0$$

$$b) 2x^2 - 4x + 10 = 0$$

---

$$a) x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-4} \Rightarrow x = \pm 2i$$

Y por lo tanto la ecuación tiene dos soluciones:  $x_1 = 2i$  y  $x_2 = -2i$ .

$$\boxed{x_1 = 2i, \quad x_2 = -2i}$$

Obsérvese como  $x_2 = \bar{x}_1$

b) Dividimos entre dos la ecuación y obtenemos la ecuación equivalentes:  $x^2 - 2x + 5 = 0$

Usamos la fórmula para resolver ecuaciones de 2º grado:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$$

Y por lo tanto la ecuación tiene dos soluciones:

$$x_1 = 1 + 2i, \quad x_2 = 1 - 2i$$

Obsérvese como de nuevo  $x_2 = \overline{x_1}$

Observa como las dos soluciones obtenidas en cada caso son conjugadas la una de la otra. Esto pasa con cualquier ecuación polinómica con coeficientes reales, las soluciones siempre aparecen por pares conjugados. Esto significa que si  $z$  es una raíz de la ecuación, entonces también lo será  $\bar{z}$

Para resolver ecuaciones más complejas necesitamos conocer la forma polar de un complejo, que se estudia en la siguiente lección.

El siguiente resultado es uno de los más importantes dentro de las matemáticas

**TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA:** Toda ecuación polinómica no constante con coeficientes complejos tiene al menos una raíz compleja.

## EJERCICIOS

1. Opera y expresa en forma binómica:

a)  $(2 + 3i) + (8 - 2i)$

b)  $(5 - 7i) - (-2 + 5i)$

c)  $\overline{(3 + 4i)} - \overline{(-5 + 6i)}$

2. Opera y expresa en forma binómica:

a)  $(-5 + 6i)(4 - 3i)$

b)  $(3 - 8i)(4 - 2i)$

c)  $(2 + 3i)(1 + i)(-2 - 5i)$

d)  $i^3(1 - 2i)^2$

e)  $(1 - i)^2 \overline{(2 + 3i)}$

f)  $\overline{i(4 - 3i)^2(1 - i)}$

3. Opera y expresa en forma binómica:

a)  $\overline{(2 - i)(3 + i)} + i(2 + i)$

b)  $i(1 - 3i) - (2 + 3i)\overline{(5 - 3i)}$

c)  $i\overline{(1 - 3i)} - 5(2 + 3i)^2$

d)  $\overline{(4 - 3i)(5 + 2i)} - i^3(1 + i)$

4. Halla  $z$  sabiendo que

a)  $z + \bar{z} = 6$        $z - \bar{z} = 4i$

b)  $z + \bar{z} = 8$ ,       $z - \bar{z} = -6i$

c)  $z - 2\bar{z} = -2 + 3i$ ,

d)  $z + 2i\bar{z} = 4 + 2i$

5. Comprueba que: a)  $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$     b)  $z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z)$

6. Si  $z$  es imaginario puro, ¿qué puedes decir de  $z + \bar{z}$ ?

7. Calcula: a)  $\frac{1}{2 + 3i}$     b)  $\frac{1}{3 - 2i}$     c)  $\frac{1}{5 - 7i}$     d)  $\frac{1}{4 + 6i}$

8. Calcula:

a)  $\frac{3 + 2i}{1 - i}$

b)  $\frac{1 + 4i}{2 + i}$

c)  $\frac{5 - i}{1 + 2i}$

d)  $\frac{2 - 3i}{1 + i}$

e)  $\frac{4 + i}{2 - 3i}$

f)  $\frac{1 - 2i}{3 + i}$

g)  $2 + \frac{1 + i}{1 - i}$

h)  $\frac{2 + i}{1 - i} - 1$

i)  $\frac{1 + i}{1 - 2i} + \frac{2 - i}{1 + i}$

9. Calcula las siguientes potencias de  $i$ :

a)  $i^{219}$

b)  $i^{365}$

c)  $i^{150}$

d)  $i^{452}$

10. Se sabe que  $i^n = -i$ . Determina el valor de  $i^{n+1}$

11. Expresa en forma binómica:

a)  $\frac{i^{70} - i}{2 - i}$

b)  $\frac{3 - i^{41}}{2 + i}$

c)  $\frac{2 + 3i}{i^2 - i^{97}}$

12. Resuelve las siguientes ecuaciones en  $\mathbb{C}$

a)  $x^2 + 9 = 0$

b)  $x^2 + 7 = 0$

c)  $x^2 + 6x + 13 = 0$

d)  $2x^2 + 4x + 20 = 0$

e)  $2x^2 - 20x + 52 = 0$

f)  $x^3 + x = 0$

g)  $x^3 - 1 = 0$

13. Describe en el plano complejo los números complejos  $z$  que verifican

a)  $Re(z) = 3$

b)  $Re(z) \leq 3$

c)  $Im(z) > -2$

d)  $Re(z) > 2 \quad Im(z) \leq 5$

e)  $-3 \geq Re(z) \leq 2$

### POTENCIAS DE $i$

La unidad imaginaria  $i$  cumple que  $i^2 = -1$ . A partir de esta relación se obtienen todas sus potencias.

| $i^n$ | Resultado |
|-------|-----------|
| $i^0$ | 1         |
| $i^1$ | $i$       |
| $i^2$ | -1        |
| $i^3$ | $-i$      |
| $i^4$ | 1         |
| $i^5$ | $i$       |
| $i^6$ | -1        |
| $i^7$ | $-i$      |
| $i^8$ | 1         |
| ...   | ...       |

#### PATRÓN (PERIODO 4)

Las potencias de  $i$  siguen un patrón que se repite cada 4 potencias:

1,  $i$ , -1,  $-i$ , 1,  $i$ , -1,  $-i$ , ...

Esto significa que al dividir el exponente  $n$  entre 4, el resto determina el valor:

|                  |               |            |
|------------------|---------------|------------|
| Si el resto es 0 | $\Rightarrow$ | $i^n = 1$  |
| Si el resto es 1 | $\Rightarrow$ | $i^n = i$  |
| Si el resto es 2 | $\Rightarrow$ | $i^n = -1$ |
| Si el resto es 3 | $\Rightarrow$ | $i^n = -i$ |

#### EJEMPLO

Calcular  $i^{23}$ .

Dividimos 23 entre 4:  $23 = 4 \cdot 5 + 3$  (resto = 3)

Como el resto es 3, entonces  $i^{23} = -i$ .