

RESUMEN NÚMEROS COMPLEJOS - \mathbb{C}

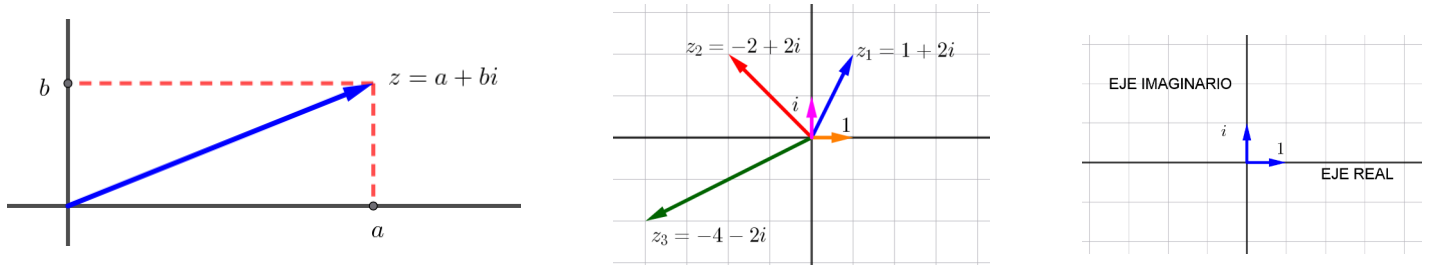
UNIDAD IMAGINARIA: $i = \sqrt{-1}$.

NÚMERO COMPLEJO: $z = a + bi$ $a, b \in \mathbb{R}$

PARTE REAL: $\text{Re}(z) = a$

PARTE IMAGINARIA: $\text{Im}(z) = b$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA: $z = a + bi$ se representa gráficamente como el vector (a, b)



SUMA DE NÚMEROS COMPLEJOS: $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Se suman la parte real con la parte real y la imaginaria con la imaginaria:

EJEMPLO a) Sumar $z_1 = 2 + 5i$ y $z_2 = 3 + 2i$

$$z_1 + z_2 = (2 + 5i) + (3 + 2i) = 2 + 5i + 3 + 2i = 2 + 3 + 5i + 2i = 5 + 7i$$

PRODUCTO DE NÚMEROS COMPLEJOS: se multiplican teniendo en cuenta: $i^2 = -1$

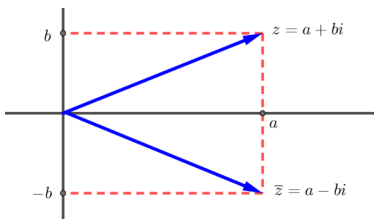
EJEMPLO:

a) $(2 + 3i) \cdot (5 + 4i) = 10 + 8i + 15i + 12i^2 = 10 + 23i - 12 = -2 + 23i$

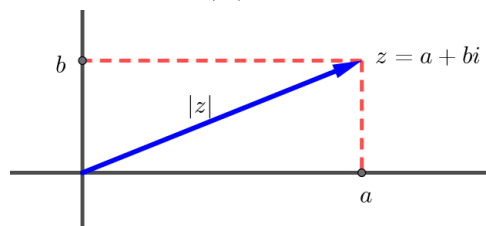
b) $(2 - 5i) \cdot (-3 + 7i) = -6 + 14i + 15i - 35i^2 = -6 + 29i + 35 = 29 + 29i$

c) $i \cdot (-2 + 3i) = -2i + 3i^2 = -2i - 3 = -3 - 2i$

CONJUGADO: $z = a - bi$



MÓDULO: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$



INVERSO: $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ (siempre que $z \neq 0$)

EJEMPLO:

a) $\frac{1}{i} = i^{-1} = \frac{\bar{i}}{|i|^2} = \frac{-i}{1} = -i$

b) $\frac{1}{4 + 3i} = (4 + 3i)^{-1} = \frac{\overline{4 + 3i}}{|4 + 3i|^2} = \frac{4 - 3i}{(\sqrt{4^2 + 3^2})^2} = \frac{4 - 3i}{25} = \frac{4}{25} - \frac{3}{25}i$

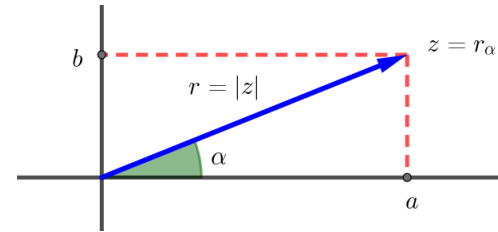
c) $\frac{1 - 2i}{3 + 5i} = (1 - 2i)(3 + 5i)^{-1} = (1 - 2i) \cdot \frac{\overline{3 + 5i}}{|3 + 5i|^2} = (1 - 2i) \cdot \frac{3 - 5i}{34} = \frac{(1 - 2i)(3 - 5i)}{34}$
 $= \frac{3 - 5i - 6i + 10i^2}{34} = \frac{3 - 11i - 10}{34} = \frac{-7 - 11i}{34} = -\frac{7}{34} - \frac{11}{34}i$

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA: Toda ecuación polinómica no constante con coeficientes complejos tiene al menos una raíz compleja.

FORMA POLAR : El complejo de módulo $r > 0$ y argumento α es:

$$r_\alpha = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

EJEMPLO $2_{60^\circ} = 2(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + \sqrt{3}i$



Todo complejo $z = a + bi$ no nulo se puede expresar en forma polar como $z = r_\alpha$ siendo $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Para calcular el argumento α usamos que: $\tan \alpha = \frac{b}{a}$ siempre que $a \neq 0$

Hay dos opciones para el argumento que dependerán del cuadrante en el que está z :

$$\alpha_1 = \arctan \frac{b}{a} \quad \alpha_2 = \alpha_1 \pm 180^\circ$$

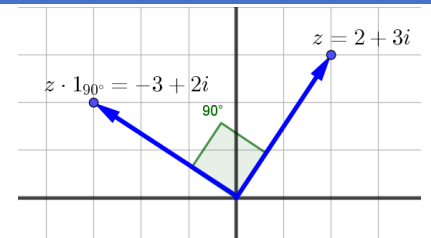
PRODUCTO EN FORMA POLAR: se multiplican los módulos y se suman los argumentos:

$$(r_1)_\alpha (r_2)_\beta = (r_1 r_2)_{\alpha+\beta}$$

EJEMPLO a) $2_{30^\circ} \cdot 3_{45^\circ} = (2 \cdot 3)_{30^\circ+45^\circ} = 6_{75^\circ}$ b) $4_{120^\circ} \cdot 2_{-30^\circ} = (4 \cdot 2)_{120^\circ-30^\circ} = 8_{90^\circ}$

Interpretación geométrica del producto: $r_\alpha \cdot 1_\beta = r_{\alpha+\beta}$

Al multiplicar un complejo $z = r_\alpha$ por otro complejo de módulo 1, lo que hacemos es rotar z un ángulo de β .



POTENCIA EN FORMA POLAR : $(r_\alpha)^n = (r^n)_{n\alpha}$

Formula de Moivre : $(r(\cos \alpha + i \sin \alpha))^n = r^n (\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha))$

EJEMPLO $(1 + i)^8 = (\sqrt{2}_{45^\circ})^8 = (\sqrt{2})^8_{8 \cdot 45^\circ} = 16_{360^\circ} = 16(\cos 360^\circ + i \sin 360^\circ) = 16$

DIVISIÓN EN FORMA POLAR: se dividen los módulos y se restan los argumentos: $\frac{(r_1)_\alpha}{(r_2)_\beta} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)_{\alpha-\beta}$

CONJUGADO EN FORMA POLAR : $\overline{r_\alpha} = r_{-\alpha}$ **INVERSO EN FORMA POLAR :** $(r_\alpha)^{-1} = (r^{-1})_{-\alpha}$

RAÍCES COMPLEJAS : La ecuación $z^n = r_\alpha$ en \mathbb{C} tiene n soluciones dadas por:

$$z_k = \sqrt[n]{r}_{\frac{\alpha+360^\circ k}{n}} \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Son la raíces n-ésimas complejas de r_α . Todas ellas tienen el mismo módulo y argumentos igualmente separados. Al representarlas obtenemos los vértices de un polígono regular de n lados y radio r en el plano complejo.

EJEMPLO Las raíces quintas de 32 son las soluciones de la ecuación $x^5 = 32$. Como $32 = 32_{0^\circ}$ tenemos:

$$z_0 = \sqrt[5]{32}_{\frac{0^\circ+360^\circ \cdot 0}{5}} = 2_{0^\circ} = 2$$

$$z_1 = \sqrt[5]{32}_{\frac{0^\circ+360^\circ \cdot 1}{5}} = 2_{72^\circ}$$

$$z_2 = \sqrt[5]{32}_{\frac{0^\circ+360^\circ \cdot 2}{5}} = 2_{144^\circ}$$

$$z_3 = \sqrt[5]{32}_{\frac{0^\circ+360^\circ \cdot 3}{5}} = 2_{216^\circ}$$

$$z_4 = \sqrt[5]{32}_{\frac{0^\circ+360^\circ \cdot 4}{5}} = 2_{288^\circ}$$

