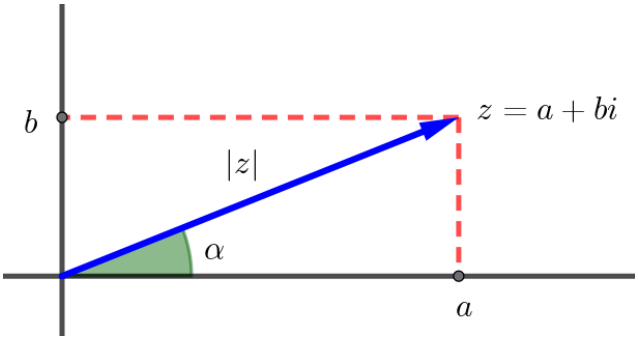
LECCIÓN 3. Forma polar.



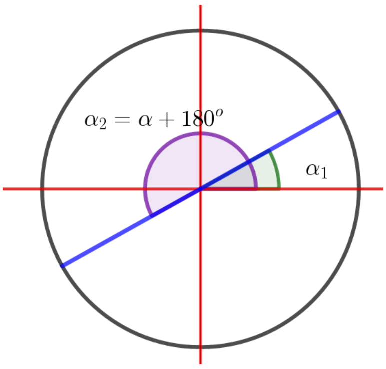
<u>ARGUMENTO:</u> el argumento de $z = a + bi$ es el ángulo α que forma el vector correspondiente en el plano complejo:

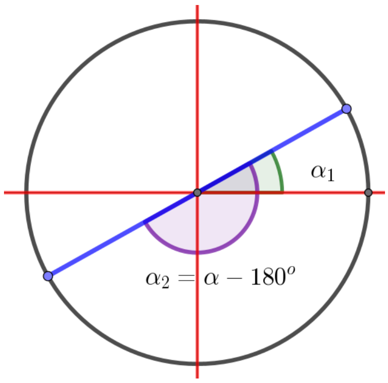
Para calcular el argumento usaremos que:

$$\tan\alpha = \frac{b}{a} \qquad \text{siempre que } a \neq 0$$

Por la unidad de trigonometría sabemos que hay dos ángulos en la circunferencia goniométrica que tienen la misma tangente $\frac{b}{a}$:

$$\alpha_1 = \arctan\frac{b}{a} \qquad\qquad \alpha_2 = \alpha_1 \pm 180^o$$





La elección dependerá del cuadrante en el que se encuentre z.

Si medimos el ángulo en radianes sería: $\alpha_2 = \alpha_1 \pm \pi$

***EJEMPLO 1**: Determinar el argumento de: a) $z = 1 + 2i$ b) $z = -2 + 3i$*

----

a) Antes de nada observamos que $z = 1 + 2i$ está en el primer cuadrante. Tenemos que:

$$\tan\alpha = \frac{2}{1} \Longrightarrow \alpha = \arctan 2 \approx 63^\circ$$

Que es un ángulo del primer cuadrante, por lo que es el argumento correcto.
En radianes sería $\alpha \approx 1,11\,\text{rad}$

b) Observamos que $z = -2 + 3i$ está en el segundo cuadrante. Se tiene que:

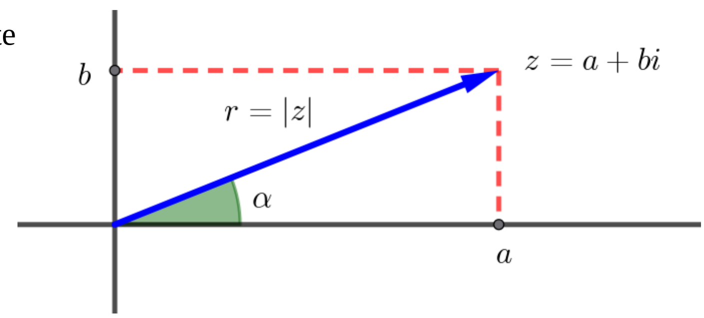
$$\tan\alpha = \frac{3}{-2} \Longrightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{3}{-2}\right) \approx -56^\circ$$

El argumento en este caso no es correcto pues se corresponde con un ángulo del 4 cuadrante. En este caso el ángulo será:

$$\alpha \approx -56^\circ + 180 \approx 124^\circ$$

En radianes sería $\alpha \approx 2,19\,\text{rad}$.

Un complejo $z = a + bi$ viene determinado completamente por su módulo $r = |z|$ y por su argumento argumento α .



Observemos en la imagen como :

$$\cos\alpha = \frac{a}{r} \qquad \operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{r}$$

Y por lo tanto: $a = r\cos\alpha$ $\quad b = r\,\mathrm{sen}\,\alpha$

Tenemos entonces que :

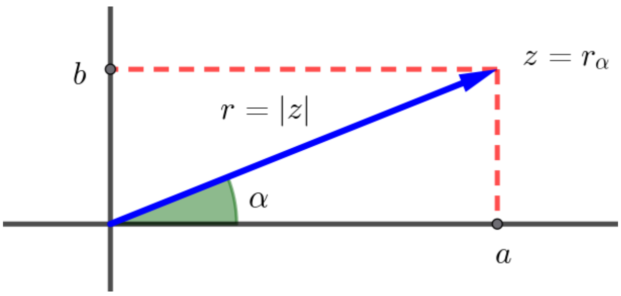
$$z = a + bi = r\cos\alpha + ir\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

Extrayendo factor común r obtenemos que:

$$z = r(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$$

FORMA POLAR: Denotamos por r_α al número complejo de módulo $r \geq 0$ y argumento α . Su forma binómica viene dada por:

$$r_\alpha = r(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$$



Un número complejo expresado de esta manera a partir de su módulo y de su argumento se dice en forma polar.

Todo número complejo tiene forma polar salvo el $0 = 0 + 0i$

***EJEMPLO 2**: Pasar a forma binómica los siguientes complejos dados en forma polar:*

$$a)\ z = 2_{60^\circ} \qquad b)\ z = 5_{150^\circ} \qquad c)\ z = 3_{-90^\circ}$$

$$a)\quad z = 2(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + \sqrt{3}i$$

$$b)\quad z = 4(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ) = 5\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$$

$$c)\quad z = 3(\cos(-90^\circ) + i\sin(-90^\circ)) = 3(0 - i) = -3i$$

***EJEMPLO 3**: Pasar a forma polar los siguientes complejos:*

$$a)\ z = 1 + i \qquad b)\ z = -2 + 2\sqrt{3}\,i \qquad c)\ z = -3i$$

En cada caso necesitamos averiguar su módulo y su argumento:
a) El módulo de $z = 1 + i$ *es :*

$$r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Para calcular su argumento α *observamos que z está en el primer cuadrante. Teniendo esto en cuenta:*

$$\tan\alpha = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \alpha = \arctan 1 = 45^\circ$$

Por lo tanto: $\boxed{z = \sqrt{2}_{45^\circ}}$

b) El módulo de $z = -2 + 2\sqrt{3}\,i$ *es:*

$$r = |z| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = 4$$

Para calcular su argumento α *observamos que* z *está en el segundo cuadrante. Teniendo esto en cuenta:*

$\tan\alpha = \dfrac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \arctan(-\sqrt{3}) = -60°$

Como el número complejo está en el segundo cuadrante:

$\alpha = -60° + 180° = 120°$

Por lo tanto: $\boxed{z = 4_{120°}}$

c) El módulo de $z = -3i$ *es:*

$r = |z| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = 3$

Observamos que z *se encuentra sobre el eje imaginario negativo, luego:*

$\alpha = -90°$

Por lo tanto: $\boxed{z = 3_{-90°}}$

La forma polar de los complejos es importante por como se relaciona con la multiplicación:

PRODUCTO DE COMPLEJOS EN FORMA POLAR : Para multiplicar dos complejos en forma polar multiplicamos los módulos y sumamos sus argumentos:

$$(r_1)_{\alpha_1} \cdot (r_2)_{\alpha_2} = (r_1 \cdot r_2)_{\alpha_1+\alpha_2}$$

Demostración: Tenemos que:

$$(r_1)_{\alpha_1} = r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1) \qquad (r_2)_{\alpha_2} = r_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$$

Entonces:

$$\begin{aligned}(r_1)_{\alpha_1} \cdot (r_2)_{\alpha_2} &= r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)\, r_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2) = r_1 r_2(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)\\ &= r_1 r_2(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \sin\alpha_1\sin\alpha_2 + i(\sin\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1\sin\alpha_2))\end{aligned}$$

Donde se ha tenido en cuenta que $i^2 = -1$.

Usando las fórmulas trigonométricas del ángulo suma:

$$\cos(\alpha_1+\alpha_2) = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \sin\alpha_1\sin\alpha_2 \qquad \sin(\alpha_1+\alpha_2) = \sin\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1\sin\alpha_2$$

obtenemos:

$$(\mathrm{r}_1)_{\alpha_1} \cdot (r_2)_{\alpha_2} = r_1 r_2\,(\cos(\alpha_1+\alpha_2) + i\sin(\alpha_1+\alpha_2)) = (r_1 \cdot r_2)_{\alpha_1+\alpha_2}$$

EJEMPLO 4*: Calcular usando forma polar:* $a)\ 2_{30°} \cdot 3_{45°} \qquad b)\ 4_{120°} \cdot 2_{-30°}$

$a) \quad 2_{30°} \cdot 3_{45°} = (2 \cdot 3)_{30°+45°} = 6_{75°} \qquad$ b) $\quad 4_{120°} \cdot 2_{-30°} = (4 \cdot 2)_{120°-30°} = 8_{90°}$

Interpretación geométrica del producto: $r_\alpha \cdot 1_\beta = r_{\alpha+\beta}$

Al multiplicar un complejo $z = r_\alpha$ por otro complejo de módulo 1, lo que hacemos es rotar z un ángulo de β.

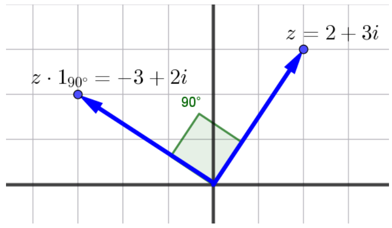
EJEMPLO 5*:*

a) Para rotar $90°$ *el complejo* $z = 2+3i$*, hay que multiplicarlo por*

$$1_{90°} = \cos 90° + i\,\mathrm{sen}\,90^0 = 0 + i \cdot 1 = i\,.$$

El complejo rotado sería :

$$z \cdot 1_{90^\circ} = zi = (2+3i)i = -3+2i$$

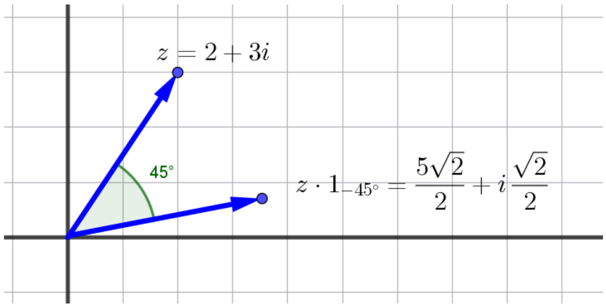


b) Si ahora queremos rotarlo -45° *hay que multiplicarlo por :*

$$1_{-45^\circ} = \cos(-45^\circ) + i\,\mathrm{sen}(-45^0) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

El complejo rotado sería:

$$z \cdot 1_{-45^\circ} = (2+3i)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$



POTENCIA EN FORMA POLAR : a partir de la fórmula del producto es evidente que:

$$(r_\alpha)^n = (r^n)_{n\,\alpha}$$

Esta fórmula es muy útil para calcular potencias altas que en forma binómica nos llevaría mucho tiempo:

***EJEMPLO 6**: Calcular usando forma polar:* $a)\ (1+i)^8 \qquad b)\ (-1+\sqrt{3}\,i)^5$

---

a) Pasamos $1+i$ *a forma polar y obtenemos:* $1+i = \sqrt{2}_{45^\circ}$

Por lo tanto:

$$(1+i)^8 = (\sqrt{2}_{45^\circ})^8 = (\sqrt{2})^8_{8\cdot 45^\circ} = 16_{360^\circ} = 16(\cos 360^\circ + i\sin 360^\circ) = 16$$

Tenemos entonces el sorprendente resultado:

$$\boxed{(1+i)^8 = 16}$$

b) Pasando a forma polar obtenemos que: $-1+\sqrt{3}\,i = 2_{120^\circ}$

Por lo tanto:

$$(-1+\sqrt{3}\,i)^5 = (2_{120^\circ}))^5 = 2^5_{5\cdot 120^\circ} = 32_{600^\circ} = 32(\cos 600^\circ + i\,\mathrm{sen}\,600^\circ) = 32\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

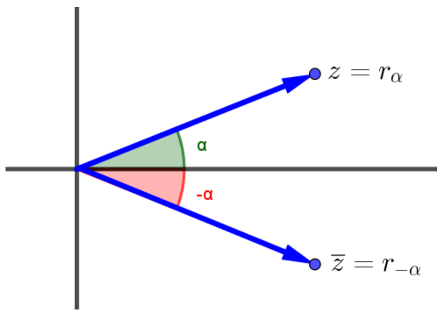
De donde se deduce:

$$\boxed{(-1+\sqrt{3}\,i)^5 = -16 - 16\sqrt{3}\,i}$$

Si reescribimos la fórmula de la potencia en forma binómica obtenemos la famosa fórmula:

Fórmula de Moivre : $\boxed{(r(\cos\alpha + i\sin\alpha))^n = r^n\,(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha))}$ para cualquier $n = 0, 1, 2, \ldots$

CONJUGADO EN FORMA POLAR : el conjugado de un complejo tiene mismo módulo y ángulo opuesto



$$\overline{r_\alpha} = r_{-\alpha}$$

EJEMPLO 7: $\overline{5_{30^\circ}} = 5_{-30^\circ}$ $\quad \overline{7_{-80^\circ}} = 7_{80^\circ}$

<u>INVERSO EN FORMA POLAR :</u> $(r_\alpha)^{-1} = (r^{-1})_{-\alpha}$

Demostración:

$$r_\alpha \cdot (r^{-1})_{-\alpha} = (r \cdot r^{-1})_{\alpha-\alpha} = 1_0$$

EJEMPLO 8: $(5_{30^\circ})^{-1} = (5^{-1})_{-30^\circ} = \left(\frac{1}{5}\right)_{-30^\circ}$

<u>COCIENTE DE COMPLEJOS EN FORMA POLAR :</u> Para dividir dos complejos en forma polar dividimos los módulos y restamos sus argumentos:

$$\frac{(r_1)_{\alpha_1}}{(r_2)_{\alpha_2}} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)_{\alpha_1-\alpha_2}$$

Demostración:

$$\frac{(r_1)_{\alpha_1}}{(r_2)_{\alpha_2}} = (r_1)_{\alpha_1} \cdot [(r_2)_{\alpha_2}]^{-1} = (r_1)_{\alpha_1} \cdot [(r_2^{-1})_{-\alpha_2}] = (r_1 \cdot r_2^{-1})_{\alpha_1-\alpha_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)_{\alpha_1-\alpha_2}$$

EJEMPLO 9: *Calcular usando forma polar:* $a)\ \frac{6_{80^\circ}}{2_{20^\circ}} \qquad b)\ \frac{10_{30^\circ}}{5_{120^\circ}}$

$a)\quad \frac{6_{80^\circ}}{2_{20^\circ}} = \left(\frac{6}{2}\right)_{80^\circ-20^\circ} = 3_{60^\circ} \qquad b)\quad \frac{10_{30^\circ}}{5_{120^\circ}} = \left(\frac{10}{5}\right)_{30^\circ-120^\circ} = 2_{-90^\circ}$

<u>EJERCICIOS</u>

1. Pasa a forma binómica:

   a) 3_{60° b) 5_{135° c) 2_{210° d) $\sqrt{2}_{45^\circ}$ e) 6_{-90°

2. Pasa a forma polar:

   a) z=1+i b) z=-1+i c) z=-$\sqrt{3}+i$
   d) z=2-2i e) z=-3i f) z=-2-2$\sqrt{3}\,i$

3. Calcula y expresa el resultado en forma binómica:

   a) (-1+i)^8 b) $(\sqrt{3}+i)^{12}$ c) $(-2+2i)^6$
   d) $(-1-\sqrt{3}\,i)^9$ e) $(\sqrt{3}-i)^{15}$ f) $(-1+\sqrt{3}\,i)^{18}$
   g) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{12}$

4. Se pide:
   a) Rotar el complejo $z = 1 + 3i$ unos 30° en sentido horario.
   b) ¿Qué complejo transforma $1{+}\mathrm{i}$ en -$1{+}\mathrm{i}$ mediante multiplicación?
   c) Halla un complejo de módulo 1 y argumento 120°