

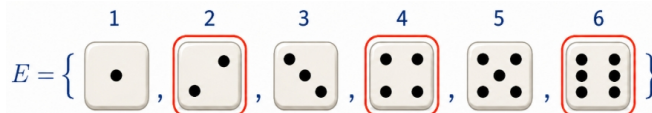
## LECCIÓN 5. PROBABILIDAD CONDICIONADA.

La probabilidad condicionada mide la probabilidad de que ocurra un suceso  $A$  bajo la condición de que ha sucedido previamente otro suceso  $B$ . Se denota por  $P(A|B)$  y se lee "probabilidad de  $A$  condicionada a  $B$ ".

El hecho de saber que un suceso  $B$  ha ocurrido restringe el espacio muestral, que pasará a ser  $B$ .

### EJEMPLO 1.

a) Si lanzamos una moneda de 6 caras, el espacio muestral es:  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

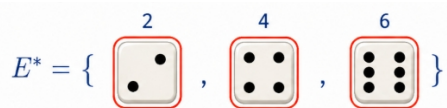


Definimos los sucesos:

$A =$  "sale 2"       $B =$  "sale par"

La probabilidad de que al lanzar el dado salga 2 es:  $P(A) = \frac{CF}{CP} = \frac{1}{6}$

Si previamente sabemos que al lanzar la moneda ha salido un número par, entonces el espacio muestral resultante estará formado por los números pares:



$E^* = \{2, 4, 6\} = B$

Tenemos entonces que la probabilidad de que salga 2 en este caso será:  $P(A|B) = \frac{CF}{CP} = \frac{1}{3}$

b) En un centro educativo se ha hecho una encuesta para saber cuanto alumnos tienen dispositivos electrónicos, obteniéndose los siguientes datos:

	TIENE TABLET: $T$	NO TIENE TABLET: $\bar{T}$	
TIENE MÓVIL: $M$	233	220	453
NO TIENE MÓVIL: $\bar{M}$	38	262	300
	271	482	753

La probabilidad de que al escoger un alumno al azar, este tenga tablet es de:

$$P(T) = \frac{CF}{CP} = \frac{271}{753} \approx 0,36$$

Si previamente sabemos que el alumno escogido tiene móvil, entonces:

$$P(T|M) = \frac{CF}{CP} = \frac{233}{453} \approx 0,51$$

La interpretación de este fenómeno es evidente. Las familias que le dan un móvil a su hijo son más favorables a la tecnología que las que no, por lo que tienen mayor probabilidad de darles también una tablet.

La definición general de probabilidad condicionada viene dada a continuación:

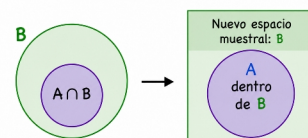
**PROBABILIDAD CONDICIONADA:** la probabilidad de un suceso  $A$  condicionada por un suceso  $B$  es:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{con } P(B) > 0$$

Se lee "probabilidad de  $A$  condicionada a  $B$ ".

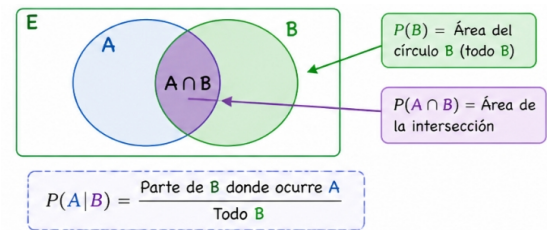
#### IDEA CLAVE

Al calcular  $P(A|B)$ , el espacio muestral se restringe a  $B$ .



Entonces  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$P(A|B)$  es la proporción de casos en  $B$  en los que ocurre  $A$ . Es la proporción del área  $P(A \cap B)$  con respecto al área  $P(B)$  en el diagrama:



**EJEMPLO 2.** Calculamos las probabilidades vistas en el ejercicio 1 pero usando fórmulas:

a) En la experiencia aleatoria de lanzar una moneda, consideramos los sucesos:

$A = \text{"sale 2"}$        $B = \text{"sale par"}$

Entonces :

$$P(A) = \frac{1}{6} \quad P(B) = \frac{1}{3} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

y por lo tanto.

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

b) En un centro educativo se ha hecho una encuesta para saber cuanto alumnos tienen dispositivos electrónicos, obteniéndose los siguientes datos:

	TIENE TABLET: $T$	NO TIENE TABLET : $\bar{T}$	
TIENE MÓVIL: $M$	233	220	453
NO TIENE MÓVIL: $\bar{M}$	38	262	300
	271	482	753

Tenemos las siguientes probabilidades:

$$P(M) = \frac{453}{753} \quad P(T \cap M) = \frac{233}{753}$$

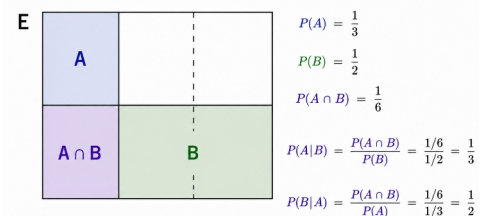
Por lo que la probabilidad de tener tablet condicionado a tener móvil es:

$$P(T|M) = \frac{\frac{233}{753}}{\frac{453}{753}} = \frac{233}{453} \approx 0,51$$

**EJEMPLO DE PROBABILIDAD CONDICIONADA**

Es importante tener en cuenta que por regla general:

$$P(A | B) \neq P(B | A)$$



**EJEMPLO 3.** En una clase de el 60% de los alumnos aprueba matemáticas, el 40% física y el 30% ambas materias. Si se escoge un alumno del grupo al azar, calcular:

a) La probabilidad de que apruebe matemáticas sabiendo que ha aprobado física.

b) La probabilidad de que apruebe física sabiendo que ha aprobado matemáticas.

Si definimos los siguientes sucesos:

$M = \text{"Aprueba matemáticas"}$        $F = \text{"aprueba física"}$

entonces:

$$P(M) = 0,6 \quad P(F) = 0,4 \quad P(M \cap F) = 0,3$$

$$a) P(M | F) = \frac{P(M \cap F)}{P(F)} = \frac{0,3}{0,4} = 0,75$$

$$b) P(F | M) = \frac{P(F \cap M)}{P(M)} = \frac{0,3}{0,6} = 0,5$$

**SUCESOS INDEPENDIENTES:** Dos sucesos A y B se dicen **independientes** si:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Para dos sucesos independientes

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

Por lo tanto, para dos sucesos independientes con probabilidades mayores que 0:

$$P(A | B) = P(A) \rightarrow \text{La probabilidad de A no se ve afectada por que ocurra B.}$$

$$P(B | A) = P(B) \rightarrow \text{La probabilidad de B no se ve afectada por que ocurra A.}$$

Dos sucesos no independientes se dicen dependientes.

**SUCESOS DEPENDIENTES:** Dos sucesos A y B se dicen **dependientes** si:

$$P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$$

Para dos sucesos dependientes con probabilidades mayores que 0:

$$P(A | B) \neq P(A) \rightarrow \text{La probabilidad de A no se ve afectada por que ocurra B.}$$

$$P(B | A) \neq P(B) \rightarrow \text{La probabilidad de B no se ve afectada por que ocurra A.}$$

#### EJEMPLO SUCESOS INDEPENDIENTES

E	A		$P(A) = \frac{1}{2}$ $P(B) = \frac{1}{2}$ $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$
	A ∩ B	B	

Son independientes ya que

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Como consecuencia

$$P(A | B) = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2} = P(A)$$

Que ocurra B no afecta a la probabilidad de A.

#### EJEMPLO SUCESOS DEPENDIENTES

E	A		$P(A) = \frac{1}{2}$ $P(B) = \frac{1}{2}$ $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$
	A ∩ B	B	

Son dependientes ya que

$$P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$$

Como consecuencia

$$P(A | B) = \frac{1/8}{1/2} = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} = P(A)$$

Que ocurra B modifica la probabilidad de A.

**EJEMPLO 4.** Al lanzar un dado de 8 caras, consideramos los siguientes sucesos.

$$A = \text{"Salga par"} \quad B = \text{"Salga 2"} \quad C = \text{"Salga menor que 5"}$$

a) Estudiar si son independientes A y B.      b) Estudiar si son independientes A y C

a) Hay que ver si se verifica la igualdad:  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Calculamos las distintas probabilidades:

$$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad P(B) = \frac{1}{8} \quad P(A \cap B) = P(A) = \frac{1}{8}$$

Y por lo tanto son **dependientes**, ya que:  $\frac{1}{8} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}$

Es evidente que el salir par afecta a la probabilidad de que salga 2 y viceversa.

b) En este caso tenemos que comprobar si se verifica la igualdad :  $P(A \cap C) = P(A)P(C)$

Tenemos que:

$$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad P(C) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad P(A \cap B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Y por lo tanto son **independientes** ya que :  $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

Esto significa que el hecho de que salga un número par no afecta a la probabilidad de que salga menor que 5 y viceversa.

## EJERCICIOS

1. En un centro educativo se ha realizado una encuesta sobre el uso de dispositivos. Se elige un alumno al azar.

	Tiene portátil (P)	No tiene portátil ( $\bar{P}$ )	Total
Tiene móvil (M)	180	120	300
No tiene móvil ( $\bar{M}$ )	60	140	200
Total	240	260	500

- a) Calcula la probabilidad de que el alumno tenga portátil sabiendo que tiene móvil.
- b) Calcula la probabilidad de que el alumno tenga móvil sabiendo que tiene portátil.
- c) ¿Son independientes los sucesos "tener móvil" y "tener portátil"? Justifica tu respuesta.
2. En un instituto, el 70% de los alumnos estudia matemáticas y el 50% estudia física. Se sabe que el 90 % de los alumnos que estudian física estudian también matemáticas. Si se elige un alumno al azar, se pide determinar.
- a) La probabilidad de que estudie física y matemáticas
- b) La probabilidad de que estudie física sabiendo que estudia matemáticas.
- c) ¿Son independientes los sucesos "estudiar matemáticas" y "estudiar física"? Justifica la respuesta.
- d) La probabilidad de que estudie matemáticas pero no física.
- e) La probabilidad de que no estudie física sabiendo que no estudie matemáticas.
3. En un hospital, el 5% de los pacientes tiene una determinada enfermedad. Se sabe que el 90% de los enfermos da positivo en una prueba, mientras que el 10% de los sanos también da positivo. Si se elige un paciente al azar, se pide determinar:
- a) La probabilidad de no dar positivo sabiendo que el paciente está enfermo.
- b) La probabilidad de que el paciente esté enfermo sabiendo que ha dado positivo.
- c) La probabilidad de que el paciente esté sano sabiendo que ha dado negativo.

NOTA: Usa un dibujo.

4. En una empresa, el 6% de los correos electrónicos recibidos son fraudulentos. Un sistema automático de detección identifica como sospechosos el 92% de los correos fraudulentos, pero también marca como sospechosos el 7% de los correos legítimos. Si se elige un correo al azar, se pide determinar:
- a) La probabilidad de que un correo sea marcado como sospechoso sabiendo que es fraudulento.
- b) La probabilidad de que un correo sea fraudulento sabiendo que ha sido marcado como sospechoso.

c) La probabilidad de que un correo sea legítimo sabiendo que no ha sido marcado como sospechoso.

5. Sabiendo que:  $P(B) = 0,3$      $P(\overline{A \cap B}) = 0,4$      $P(B | A) = 0,5$

a) Determina si los sucesos son independientes.

b) En caso de ser dependientes, determina que valor tendría que tener  $P(B | A)$  para que fuesen independientes.

6. Sabiendo que:  $P(A) = 0,6$      $P(B) = 0,4$      $P(\overline{A} \cap B) = 0,1$

a) Calcula  $P(A \cap B)$ .

b) Determina si los sucesos A y B son independientes.

c) En caso de no serlo, determina qué valor debería tener  $P(\overline{A} \cap B)$  para que fuesen independientes.

7. Sabiendo que:  $P(A) = 0,7$      $P(B) = 0,4$      $P(A \cap \overline{B}) = 0,3$ .

a) Calcula  $P(B | A)$ .

b) Calcula  $P(B | \overline{A})$

c) Determina si los sucesos  $\overline{A}$  y  $\overline{B}$  son independientes.

8. Responde a las siguientes cuestiones:

a) Supongamos que tenemos dos sucesos A y B incompatibles con probabilidades mayores que 0. ¿Son independientes.

b) Si el suceso A está contenido en el suceso B, ¿pueden ser independientes? Razona la respuesta.