LECCIÓN 1. EXPERIENCIAS ALEATORIAS. SUCESOS.


Imagen generada con IA. ChatGpt

EXPERIENCIAS DETERMINISTAS Y ALEATORIAS

Se llama **experiencia determinista** a aquella en la que conocemos el resultado antes de realizar la experiencia. Por ejemplo, dejar caer un objeto da siempre el mismo resultado, que el objeto cae al suelo.

Se llama **experiencia aleatoria** a aquella cuyo resultado depende del azar. Por ejemplo: lanzar un dado, extraer una carta de una baraja, sacar bolas de distintos colores de una urna, la nota que obtendremos en un examen, etc.

La probabilidad es la rama de las matemáticas que se encarga de estudiar las experiencias aleatorias.

ESPACIO MUESTRAL

Se llama **espacio muestral** al conjunto de todos los posibles resultados de una experiencia aleatoria . Se designa con la letra E.

EJEMPLO 1:
- Se lanza un dado : E={1,2,3,4,5,6}
- Se lanza una moneda: E={C,+}
- Se lanzan dos monedas: E ={ (C,C) , (C,+) , (+,C), (+,+)}
- La nota que obtendremos en un examen: E=[0,10]

SUCESOS

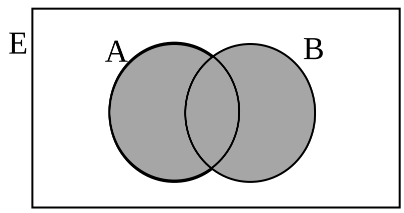
Se llama **suceso** a cualquier subconjunto del espacio muestral.
Los elementos de E se llaman **sucesos individuales** o **sucesos elementales**.
También son sucesos el suceso vacío o **suceso imposible**, $\emptyset$, y el propio E, **suceso seguro**.
Al conjunto de todos los sucesos de una experiencia aleatoria lo llamaremos S.
Si E tiene un número finito, n, de elementos, el número de sucesos de E es 2^n.

EJEMPLO 2: *Se lanza un dado tetraédrico (4 caras). Se pide:*
a) Espacio muestral
b) Escribir un suceso elemental y tres no elementales
c) Escribir los sucesos que coincidan con el suceso imposible y el seguro
d) ¿cuántos sucesos tiene esta experiencia?

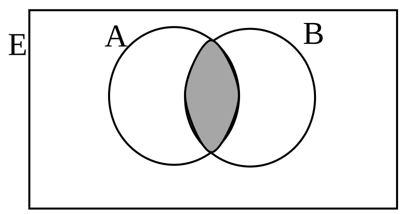
---

a) E={1,2,3,4}
b) Suceso elemental: A={2}="Sale un 2"
Sucesos no elementales: B={1,2} C={1,2,4} D=E={1,2,3,4}
c) Suceso imposible => A="Sacar un número mayor que 4"={}= $\emptyset$
Suceso seguro => B="sacar un número menor que 5"= {1,2,3,4} =E
d) 2^4 *sucesos*

<u>OPERACIONES CON SUCESOS</u>: Dados dos sucesos A y B, se definen:

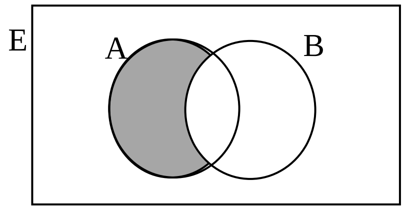


Unión - $A \cup B$: es el suceso formado por todos los elementos de A y de B
El suceso $A \cup B$ se verifica cuando ocurre A **o** B.
Puede ser que ocurran ambos al mismo tiempo



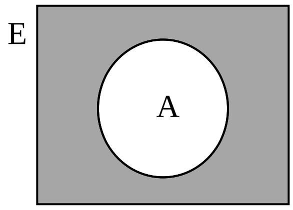
Intersección - $A \cap B$: es el suceso formado por todos los elementos que son de A y de B al mismo tiempo.
El suceso $A \cap B$ se verifica cuando ocurren simultáneamente A **y** B.

Diferencia - $A - B$: es el suceso formado por todos los elementos de A que no son de B.
El suceso $A - B$ se verifica cuando lo hace A **y no** B



Complementario: $\overline{A}$: está formado por todos los elementos del espacio muestral que no están en A.
El suceso $\overline{A}$ se verifica siempre cuando **no** ocurre A.

Evidentemente $\overline{A} = E - A$
Para el complementario se usa a veces la notación A^c



EJEMPLO 3: *Se considera el experimento altetoatorio de lanzar un dado de 6 caras. El espacio muestral es :*

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Se consideran los sucesos A="Sale un nº par" y B=" Sale un número menor que 5", es decir:

$$A = \{2, 4, 6\} \qquad B = \{1, 2, 3, 4\}$$

Las distintas operaciones con sucesos son:

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\} = \text{"Sale un número par } \textbf{o} \text{ menor que 5"}$

$A \cap B = \{2, 4\} = \text{"Sale un número par } \textbf{y} \text{ menor que 5"}$

$B - A = \{1, 3\} = \text{"Sale un número menor que 5 } \textbf{no} \text{ par"}$

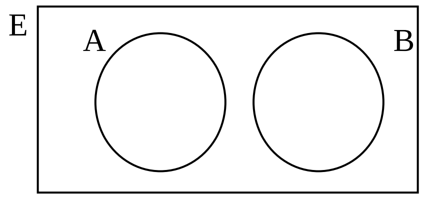
$\overline{A} = \{1, 3, 5\} = \text{"}\textbf{No}\text{ sale un número par"}$ $\overline{B} = \{5, 6\} = \text{"}\textbf{No}\text{ sale un número menor que 5"}$

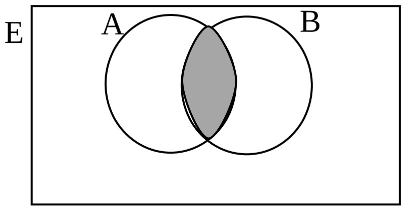
SUCESOS INCOMPATIBLES/ COMPATIBLES

Dos sucesos, A y B, son **incompatibles** cuando no tienen ningún elemento común.

$$A \cap B = \emptyset$$

Los sucesos incompatibles no se pueden verificar simultáneamente.





Si los sucesos tienen elementos comunes son **compatibles** .

$$A \cap B \neq \emptyset$$

Dos sucesos compatibles pueden verificarse al mismo tiempo

EJEMPLO 4: *Se considera el experimento altetoatorio de lanzar un dado de 6 caras. Dados los sucesos*

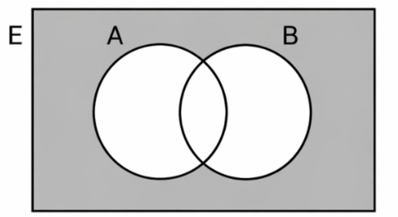
$A = \text{“Salir par”} = \{2, 4, 6\} \quad B = \text{“Salir impar”} = \{1, 3, 5\} \quad C = \text{“Salir menor que 5”} = \{1, 2, 3, 4\}.$

Entonces:
- A y B son incompatibles, pues: $A \cap B = \{\} = \emptyset$
- A Y C son compatibles, pues: $A \cap C = \{2, 4\} \neq \emptyset$

PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES CON SUCESOS

Propiedad	**Unión**	**Intersección**
Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Asociativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Idempotente	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Simplificativa	$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$
Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Elemento neutro	$A \cup \varnothing = A$	$A \cap E = A$
Complementación	$A \cup \overline{A} = E$	$A \cap \overline{A} = \varnothing$
Involución	$\overline{\overline{A}} = A$	
Leyes de Morgan	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

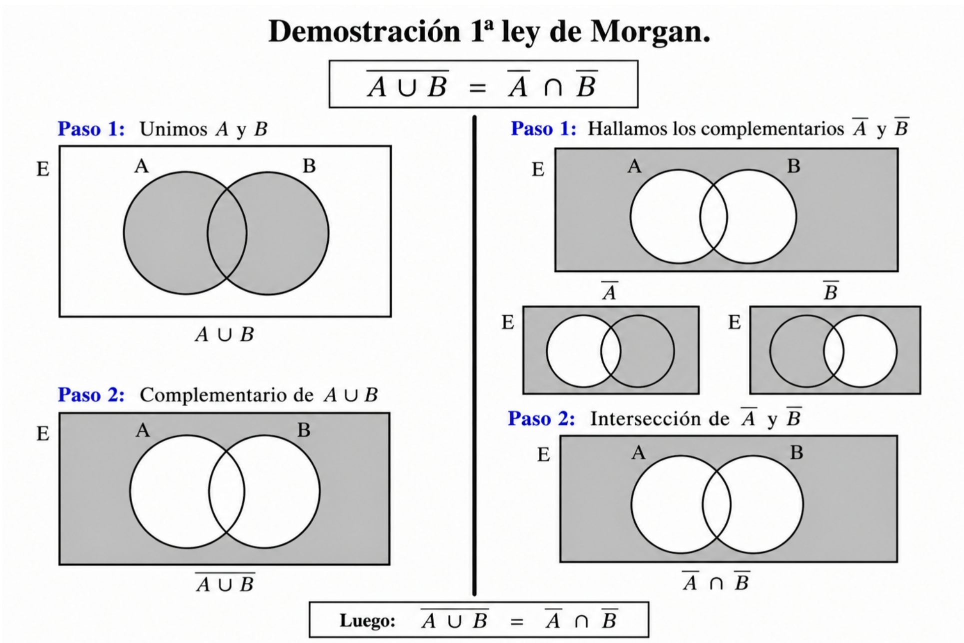
LEYES DE MORGAN

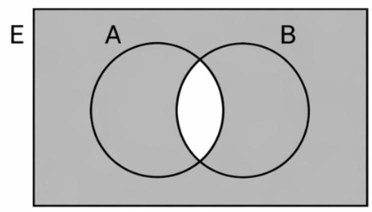


Las más complicadas de las propiedades de los sucesos son las leyes de Morgan. Vamos a explicarlas:

1ª ley de Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Explicación: es lo mismo decir que no ocurre A o B ($\overline{A \cup B}$) , que decir que no ocurre ni A ni B ($\overline{A} \cap \overline{B}$).





2ª ley de Morgan: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Explicación: es lo mismo decir que A y B no ocurren simultáneamente ($\overline{A \cap B}$), que decir que no ocurre A o no ocurre B ($\overline{A} \cup \overline{B}$)

EJEMPLO 5: *En una habitación hay varias personas que hablan distintos idiomas. Consideramos la experiencia aleatoria de escoger al azar una de dichas personas. Definimos los sucesos :*

$A =$ "Habla español" $\quad B =$ "Habla portugués"

En está situación, las leyes de Morgan se interpretan de esta forma

1ª LEY DE MORGAN: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

$\overline{A \cup B} =$ " No habla español o portugués" $\quad \overline{A} \cap \overline{B} =$ " No habla español y no habla portugués"

Es lo mismo decir que la persona escogida no habla español o portugués que decir que no habla español y no habla portugués.

2ª LEY DE MORGAN: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$\overline{A \cap B} =$ ''No habla español y portugués" $\quad \overline{A} \cup \overline{B} =$ "No habla español o no habla portugués"

Es lo mismo decir que la persona escogida no habla español y portugués simultanemante, que decir que no habla español o no habla portugués.

EJERCICIOS:

1. Describe el espacio muestral de estas EA. Indicar en cada caso cuantos sucesos posibles hay.
   a) Preguntarle a alguien su mes de nacimiento.
   b) Lanzar tres monedas al aire
   c) Lanzar una moneda de 6 caras y un dado.
   c) Medir la altura de una persona.
   d) Cronometrar el tiempo que llega tarde a clase un alumno. (La clase dura 50 minutos)

2. Se lanza una dado de 8 caras. Se consideran los sucesos A=" sale un número impar" , B="sale un número mayor que 3". Se pide:
   a) Describir el espacio muestral E y los sucesos A y B
   b) Calcular $A \cup B$, $A \cap B$, $A – B$ y $\overline{A}$

3. Se lanzan dos dados, uno rojo y otro verde, de 4 caras. Describe el espacio muestral. Se considera los sucesos:
   A = "La suma ambos dados es 6" B=" Sale par en el dado rojo" C= " Sale impar en el dado verde"

   a) Describe los sucesos A, B y C como subconjuntos de E.
   b) ¿Es compatible A con el suceso B? Describe $A \cap B$.
   c) Se considera el suceso $D = B \cap C$. Calcula D. ¿Es compatible con el suceso A?

4. Justifica que: a) $\overline{\overline{A}} = A$ b) $\overline{A \cap \overline{B}} = \overline{A} \cup B$

5. Demuestra la segunda ley de Morgan de manera similar a como se ha demostrado la primera.

6. Justificar las siguientes propiedades mediante dibujos.
   a) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ b) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$