

# LECCIÓN 7. Representación gráfica

A lo largo de esta sección se va a asumir que la función  $f$  es una función dos veces derivable.

Para representar una función se suelen estudiar los siguientes conceptos.

## Representación de una función

- 1) DOMINIO.
- 2) PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES.
- 3) ASÍNTOTAS VERTICALES.
- 4) INTERVALOS DE MONOTONÍA. EXTREMOS RELATIVOS.
- 5) INTERVALOS DE CURVATURA. PUNTOS DE INFLEXIÓN.
- 6) RAMAS INFINITAS

También se puede añadir a los puntos anteriores el concepto de **simetría** o el de **periodicidad**, pero no se va a trabajar en este curso.

Otra cosa que se debe tener en cuenta es que siempre se pueden dar valores a la variable independiente (generalmente  $x$ ) para obtener puntos de la grafica  $(x, f(x))$  y así mejorar la representación.

Siempre podemos usar una herramienta informática para comprobar la representación hecha, por ejemplo GeoGebra.

Por último, aunque estos pasos se pueden seguir para cualquier función, en este curso lo haremos para funciones polinómicas y racionales Se deja a continuación aquí un resumen de los distintos apartados.



### 1. DOMINIO:

**Funciones polinómicas:**  $\mathbb{R}$

**Funciones racionales:**  $\mathbb{R} - \{\text{valores que anulan el denominador}\}$

### 2. PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES

CORTE CON:	¿CÓMO SE CALCULA?	¿CUÁNTOS CORTES PUEDE HABER?
eje x	haciendo $y=0$ (habrá que resolver una ecuación)	ninguno, uno, o varios
eje y	sustituyendo $x=0$	uno o ninguno

### 3. ASÍNTOTAS VERTICALES

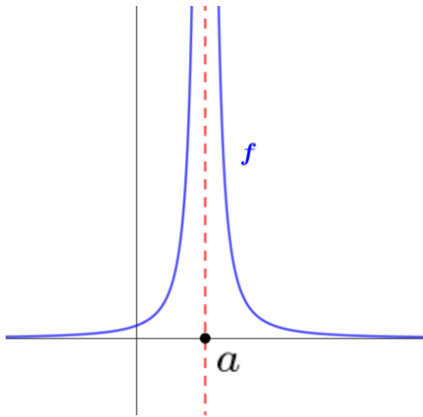
Puede haber asíntotas en los puntos fuera del dominio.

**Funciones polinómicas:** No tienen.

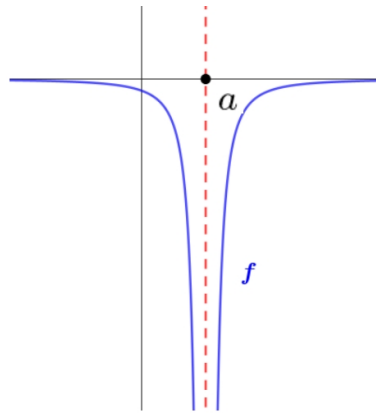
**Funciones racionales:** puede haber asíntotas en los puntos donde se anula el denominador. Para comprobarlo se calcula el límite de la función en esos puntos.

- Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{k}{0}$  con  $k \neq 0$  entonces hay una asíntota vertical de ecuación  $x = a$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

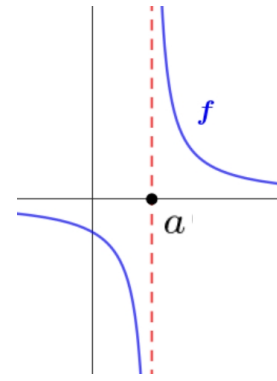


$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \#$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$



- Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \in \mathbb{R}$ , entonces no es una asíntota vertical.

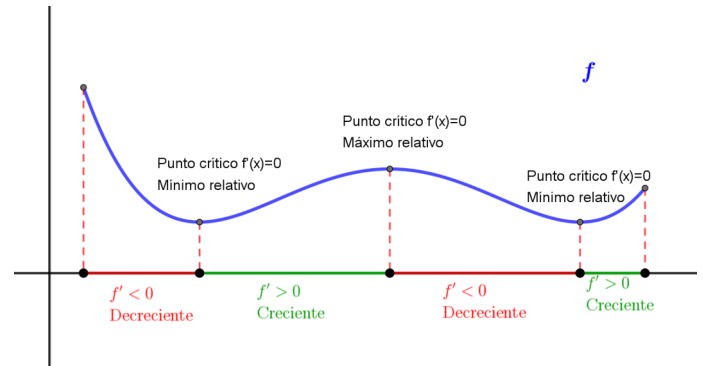
En este caso habrá que resolver una indeterminación  $\frac{0}{0}$  factorizando numerador y denominador y simplificando el término  $x - a$



#### 4. INTERVALOS DE MONOTONÍA. EXTREMOS RELATIVOS.

Se calculan los **puntos críticos** resolviendo la ecuación  $f'(x) = 0$ . Estos son los candidatos a extremos relativos.

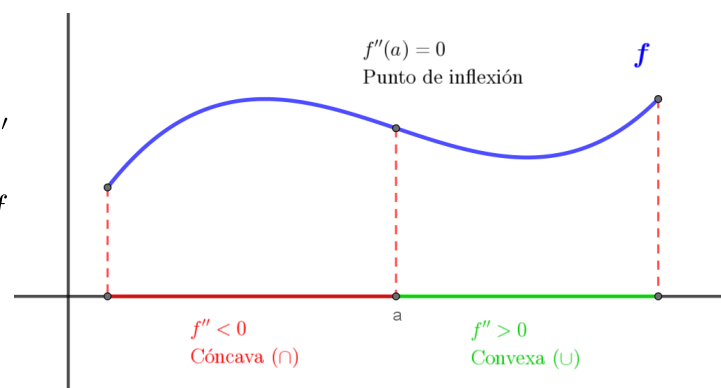
Luego se estudia la monotonía viendo el signo de  $f'$  en los intervalos que se obtienen al considerar los puntos críticos en el dominio de  $f$ .



#### 5. INTERVALOS DE CURVATURA. PUNTOS DE INFLEXIÓN.

Se resuelve la ecuación  $f''(x) = 0$ . Estos son los candidatos a puntos de inflexión.

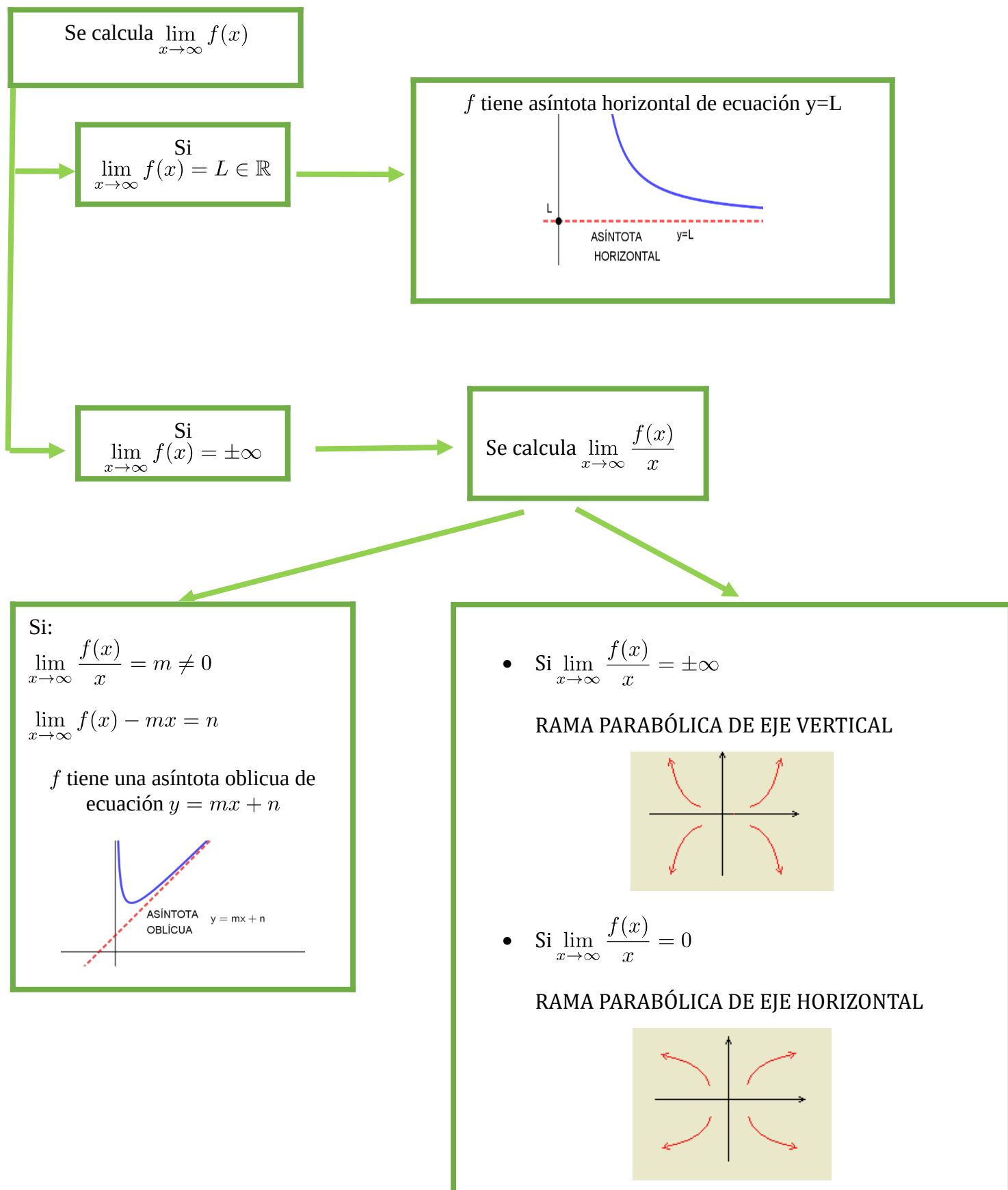
Luego se estudia la curvatura viendo el signo de  $f''$  en los intervalos que se obtienen al considerar los puntos de derivada segunda nula en el dominio de  $f$ .



## 6. RAMAS INFINITAS.

Finalmente se estudia el comportamiento de la función cuando  $x \rightarrow \infty$  y cuando  $x \rightarrow -\infty$ . En ambos casos la función  $f$  tiene o una **asíntota horizontal**, una **asíntota oblicua** o una **rama parabólica**.

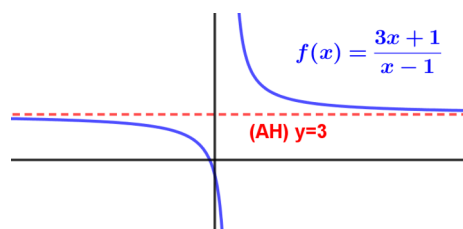
### ESTUDIO DE LAS RAMAS INFINITAS (CUANDO $x \rightarrow \infty$ )



En los casos concretos que nos interesa:

**Funciones polinómicas** : siempre tiene ramas parabólicas (verticales), salvo que el polinomio sea de grado 1. En ese caso la función es una recta.

**Funciones racionales**: Una característica importante de las funciones racionales es que las ramas en  $\infty$  coinciden con las de  $-\infty$ , por lo que solo hace falta estudiarlas por un lado.



Otra característica importante de las funciones racionales viene dada por las siguientes propiedades:

GRADO NUMERADOR $\leq$ GRADO DENOMINADOR	$\implies$	ASÍNTOTA HORIZONTAL
GRADO NUMERADOR = GRADO DENOMINADOR + 1	$\implies$	ASÍNTOTA OBLICUA
GRADO NUMERADOR > GRADO DENOMINADOR + 1	$\implies$	RAMA PARABÓLICA (DE EJE VERTICAL)

Se exponen a continuación varios ejemplos para visualizar estas propiedades de las funciones racionales.

EJEMPLO 1:

$$f(x) = \frac{2x + 3}{x - 1}$$

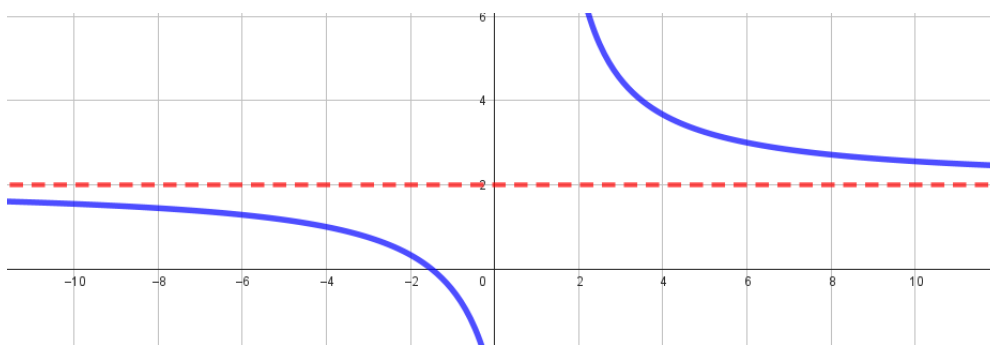
Grado numerador =1

Grado denominador=1

Tiene una **asíntota horizontal**. Dado que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x} = 2$$

La asíntota tiene ecuación  $y = 2$



EJEMPLO 2:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 2}{x + 1}$$

Grado numerador =2

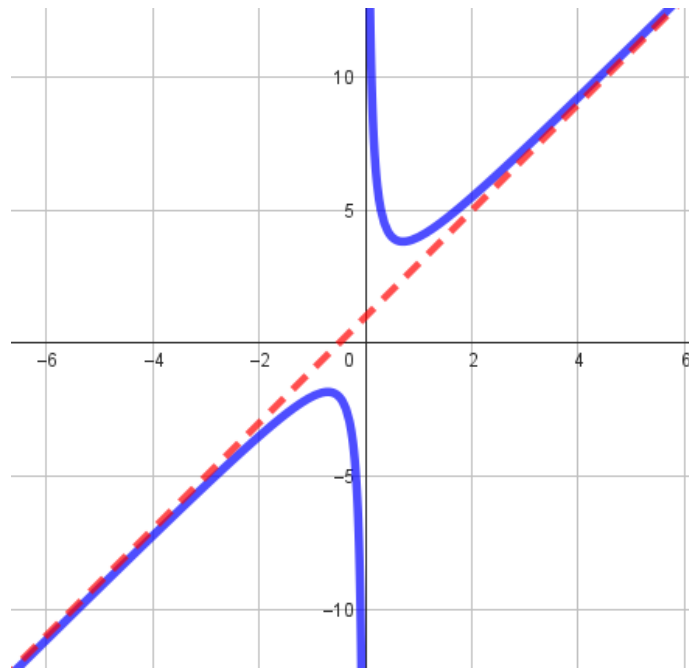
Grado denominador=1

Tiene una **asíntota oblicua**  $y = mx + n$ . Los coeficientes se obtienen con los siguientes límites:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2+3x+2}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x + 2}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x + 2}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x + 2}{x + 1} - 2x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x + 2}{x + 1} - \frac{2x^2 - 2x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2}{x + 1} = 1$$

La ecuación de la asíntota es  $y = 2x + 1$



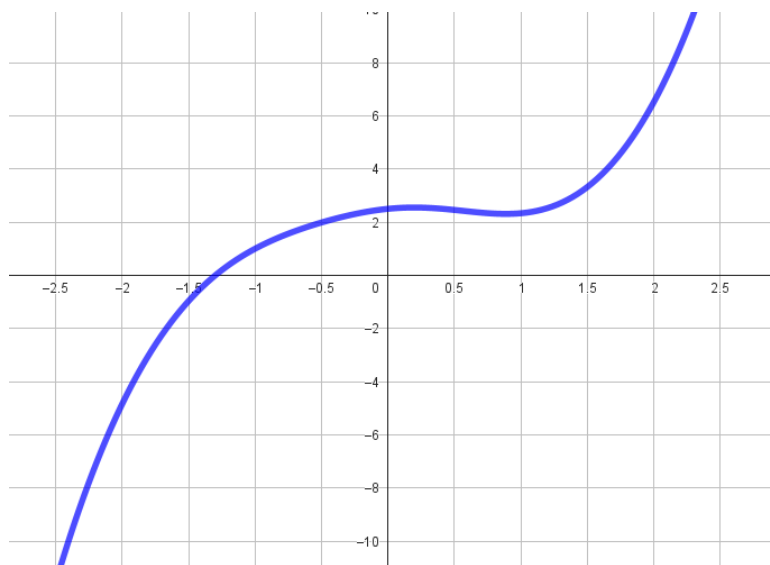
EJEMPLO 3:

$$f(x) = \frac{x^5 + x + 5}{x^2 + 2}$$

Grado numerador =5

Grado denominador=2

Rama parabólica (de eje vertical).



**EJEMPLO 1:** Representar gráficamente  $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$

① Dom  $f = \mathbb{R} - \{3\}$

② P. Corte: ESE  $X (y=0) \rightarrow \frac{x-2}{x-3} = 0 \rightarrow x-2=0 \rightarrow x=2 \rightarrow (2,0)$   
 ESE  $Y (x=0) \rightarrow \frac{0-2}{0-3} = \frac{2}{3} \rightarrow (0, \frac{2}{3})$

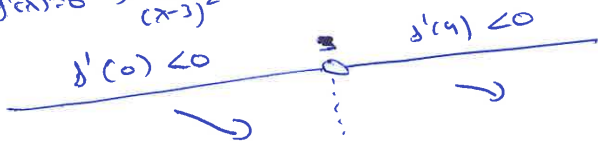
③ A. Verticales:

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2}{x-3} = \frac{1}{0} \Rightarrow$  Hay AV en  $x=3$

④ Montaña ( $f'(x)=0$ )

$f'(x) = \frac{1 \cdot (x-3) - (x-2) \cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{x-3-x+2}{(x-3)^2} = \frac{-1}{(x-3)^2}$

$f'(x)=0 \rightarrow \frac{-1}{(x-3)^2} = 0 \rightarrow -1=0$   $\nexists$  solución



$f'(x) = \frac{-1}{(x-3)^2}$

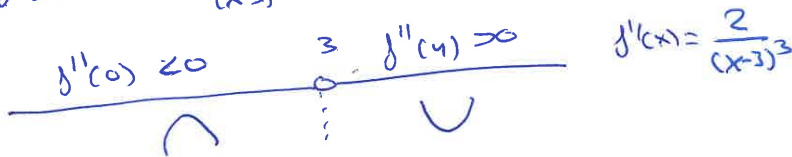
$f'(0) = \frac{-1}{(0-3)^2} = \frac{-1}{9} < 0$

$f'(4) = \frac{-1}{(4-3)^2} = \frac{-1}{1} < 0$

⑤ Curvatura ( $f''(x)=0$ )

$f''(x) = \frac{0 \cdot (x-3)^2 - (-1) \cdot 2(x-3)}{[(x-3)^2]^2} = \frac{2(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{2}{(x-3)^3}$

$f''(x)=0 \rightarrow \frac{2}{(x-3)^3} = 0 \rightarrow 2=0$   $\nexists$  sol



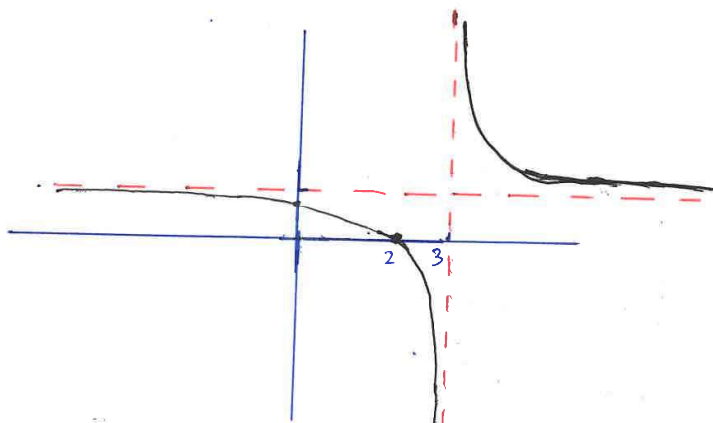
⑥ R. infinitas

Tiene una asíntota horizontal (Grado Numerador = 1 = Grado Denominador)

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{x-3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x} = 1$

La ecuación de la asíntota horizontal es  $y=1$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA



**EJEMPLO 2:** Representar gráficamente  $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$

① Dom  $f = \mathbb{R} - \{1\}$

② P. corte ejes

Eje X ( $y=0$ )  $\Rightarrow \frac{x^3}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow (0,0)$

Eje Y ( $x=0$ )  $\Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow (0,0)$

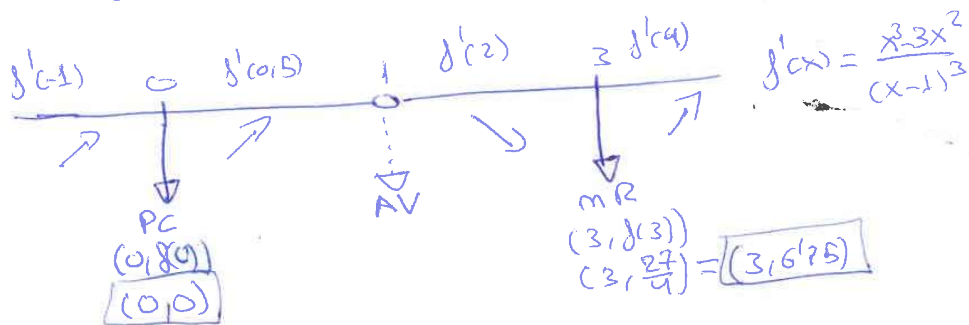
③ A. Verticales

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \frac{1}{0} \Rightarrow$  Hay una AV en  $x=1$

④ Monotonía ( $f'(x)=0$ )

$$f'(x) = \frac{3x^3(x-1)^2 - x^3 \cdot 2(x-1) \cdot 1}{[(x-1)^2]^2} = \frac{\cancel{(x-1)} [3x^3(x-1) - 2x^3]}{(x-1)^3} = \frac{3x^3 - 3x^2 - 2x^3}{(x-1)^3} = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3}$$

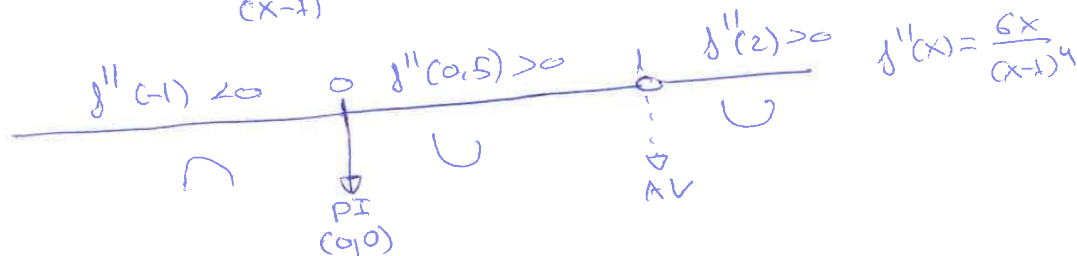
$\Rightarrow x^2(x-3) = 0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0$   
 $\Rightarrow x-3=0 \Rightarrow x=3$



⑤ Curvatura ( $f''(x)=0$ )

$$f''(x) = \frac{(3x^2 - 6x) \cdot (x-1)^3 - (x^3 - 3x^2) \cdot 3(x-1)^2 \cdot 1}{[(x-1)^3]^2} = \frac{\cancel{(x-1)^2} [(3x^2 - 6x)(x-1) - (x^3 - 3x^2) \cdot 3]}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{3x^3 - 3x^2 - 6x^2 + 6x - 3x^3 + 9x^2}{(x-1)^4} = \frac{6x}{(x-1)^4} \parallel \frac{6x}{(x-1)^4} = 0 \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x=0$$



⑥ R. infinitas

$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2} \rightarrow G: 3 \mid \Rightarrow$  Asíntota oblicua  $y = mx + n$   
 $\rightarrow G: 2$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{(x+1)^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x(x^2+2x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3+2x^2+x} =$$

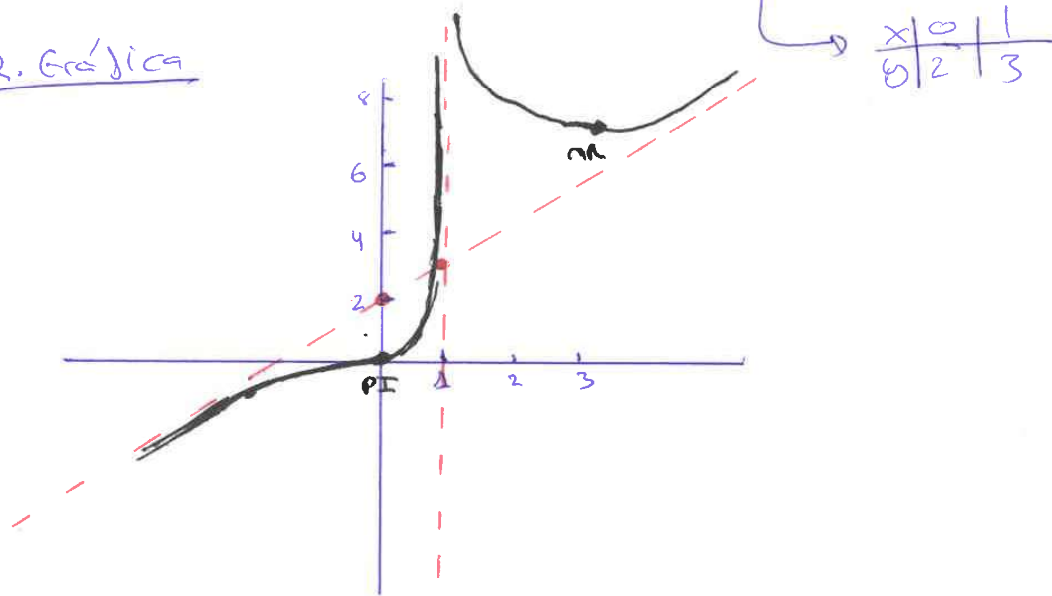
$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

$$p = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2+2x+1} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2+2x+1} + \frac{-x^3+2x^2-x}{x^2+2x+1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-x}{x^2+2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

La ecuación de la AO es  $y = x + 2$

R. Gráfica



**EJEMPLO 3:** Representar gráficamente  $f(x) = \frac{x^4+1}{x^2}$

① Dom f =  $\mathbb{R} - \{0\}$

② P. corte ejes

Eje X ( $y=0$ )  $\Rightarrow \frac{x^4+1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^4+1=0 \Rightarrow x^4=-1 \Rightarrow x = \pm \sqrt[4]{-1}$   $\nexists$  solución

Eje Y ( $x=0$ )  $\Rightarrow f(0) = \frac{1}{0} \nexists \Rightarrow$  El 0 no está en el dominio de f

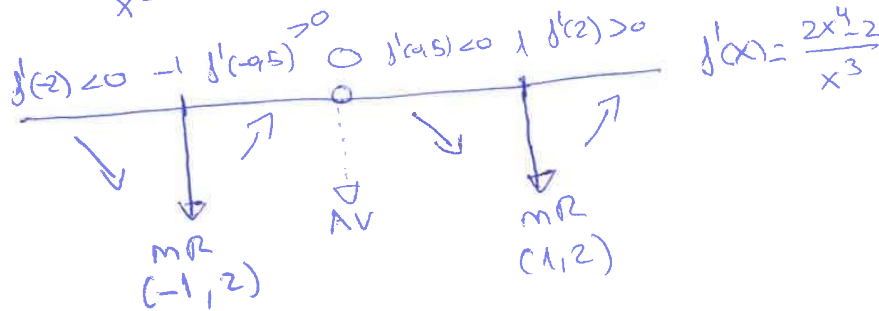
③ A. verticales

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4+1}{x^2} = \frac{1}{0} \Rightarrow$  Hay una AV en  $x=0$

④ Monotonía ( $f'(x)=0$ )

$$f'(x) = \frac{4x^3 \cdot x^2 - (x^4+1)2x}{(x^2)^2} = \frac{x^2[4x^3 \cdot x - (x^4+1)2]}{x^4} = \frac{4x^4 - 2x^4 - 2}{x^3} = \frac{2x^4 - 2}{x^3}$$

$$\frac{2x^4 - 2}{x^3} = 0 \Rightarrow 2x^4 - 2 = 0 \Rightarrow 2x^4 = 2 \Rightarrow x^4 = 1 \Rightarrow x = \pm \sqrt[4]{1} = \boxed{x = \pm 1}$$

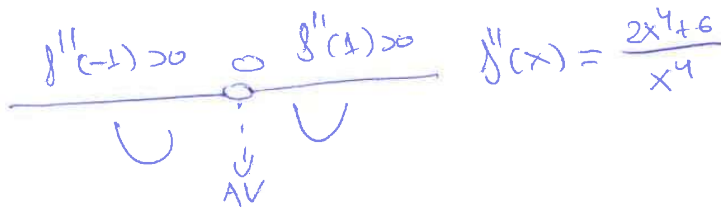


⑤ Curvatura ( $f''(x)=0$ )

$$f''(x) = \frac{8x^3 \cdot x^3 - (2x^4 - 2)3x^2}{(x^3)^2} = \frac{x^2[8x^3 \cdot x - (2x^4 - 2)3]}{x^6} = \frac{8x^4 - 6x^4 + 6}{x^4}$$

$$= \frac{2x^4 + 6}{x^4} \quad // \quad \frac{2x^4 + 6}{x^4} = 0 \Rightarrow 2x^4 + 6 = 0 \Rightarrow 2x^4 = -6 \Rightarrow x^4 = -3$$

No sol

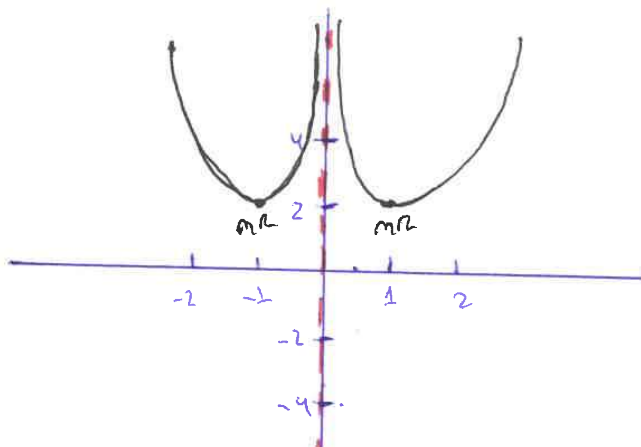


⑥ R. Infinitas

$$f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2} \rightarrow G: 4 \quad \left. \vphantom{f(x)} \right\} \Rightarrow \text{Rama parabólica}$$

$$x^2 \rightarrow G: 2$$

R. Gráfica



## EJERCICIOS

1. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a)  $f(x) = x^3 - 3x + 2$

b)  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

c)  $f(x) = x^3 - x$

d)  $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

e)  $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

f)  $f(x) = |2x + 4|$

g)  $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$

h)  $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$

i)  $f(x) = \frac{x}{x-1}$

j)  $f(x) = \frac{2x}{x+3}$

f)  $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$

k)  $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

l)  $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-1}$

m)  $f(x) = \frac{4x-8}{(x-1)^2}$

n)  $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$

o)  $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x+1}$

p)  $f(x) = \frac{x^2+9}{x}$

q)  $f(x) = \frac{9x-9}{(x-2)^2}$

r)  $f(x) = \frac{x^2}{x^2+x-2}$

s)  $f(x) = \frac{x^2-4}{x-1}$

t)  $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$

u)  $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

v)  $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

w)  $f(x) = \frac{4x-12}{(x-2)^2}$

x)  $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$

y)  $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

2. Una carretera A viene dada por la gráfica de una función  $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ .

a) Representácala haciendo un estudio completo.

b) Otra carretera B viene dada por la gráfica de la función  $y = -x - 2$ . Representácala conjuntamente a la carretera A e indica si se cortan.

c) Idem con la carretera  $y=4$ . ¿Puedes determinar los lugares exactos donde se cortan?

3. Halla  $a$  y  $b$  para que la función  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$  tenga:

i) Un extremo relativo en  $x = 1$     ii) Pase por el punto  $(1, 2)$

4. Halla  $a$  y  $b$  para que la función  $f(x) = x^4 + bx^3 + ax^2$  tenga un punto de inflexión en  $x = 1$  y un extremo relativo en  $x = -1$ . (SOL:  $a=-10/3$ ;  $b=-8/9$ )

5. Determina  $a$  y  $b$  para que la función  $f(x) = \frac{ax^2 + 3x + 1}{bx^2 + 1}$  tenga un máximo relativo en  $x = 1$  y una asíntota horizontal en  $y = 2$ . (SOL:  $a=6, b=3$ )

6. Determina  $a$  y  $b$  para que la función  $f(x) = \frac{ax^2 + x + b}{bx - a}$  tenga asíntota oblicua  $y = 2x + 1$ . ( $a=-2/3, b=-1/3$ )

7. Representa gráficamente una función  $f$  derivable que verifica:

- $\text{Dom } f = [0, 8]$
- $f'(x) > 0$  para todo  $x \in [0, 3)$

- $f'(x) = 0$  para todo  $x \in [3, 4]$
- $f'(x) < 0$  para todo  $x \in (4, 8]$
- $f(0) = f(8) = 1$
- $f(3) = 4$

Responde razonadamente a las siguientes cuestiones

a) ¿Es continua la función?

c) ¿Cuántas veces alcanza la función el valor 3?

b) ¿Cuál es el rango de la función?

c) ¿Cuánto vale  $f'(3)$ ?

8. Representa gráficamente una función  $f$  que cumpla

- $\text{Dom } f = [0, 6]$
- $f'(x) > 0$  en  $[0, 3)$
- $f'(x) < 0$  en  $(3, 6]$
- $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 4$
- $f(3) = 5$
- $f(0) = 1$
- $f(6) = -1$

Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

a) Indica los puntos donde la función es continua.

b) Indica si tiene alguna discontinuidad y de que tipo es.

c) ¿Cuál es el rango de la función?

d) Indica que puntos del rango tienen una única anteimagen y cuales tienen más de una.