LECCIÓN 3. AXIOMAS Y PROPIEDADES DE LA PROBABILIDAD.

Los axiomas de la probabilidad son aquellas propiedades fundamentales, que no se deducen a partir de ninguna otra. Son las propiedades más básicas de todas, a partir de las cuales se deducen todas las demás.

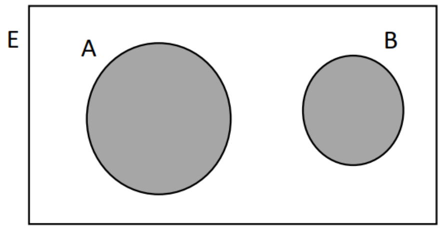
AXIOMAS DE LA PROBABILIDAD

Dado una experiencia aleatoria con espacio muestral E, la probabilidad cumple los siguientes axiomas:

1) Para cualquier suceso A, $P(A) \geq 0$
2) Para dos sucesos incompatibles $(A \cap B = \emptyset)$ se verifica: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
3) La probabilidad del suceso seguro E es $P(E) = 1$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA PROBABILIDAD.

Las probabilidades de los distintos sucesos de una experiencia aleatoria se pueden visualizar como áreas. E espacio muestral es un rectángulo de área 1 y los sucesos son figuras dentro de



$$P(A) = \text{Área del círculo } A < 1$$
$$P(B) = \text{Área del círculo } B < 1$$
$$P(E) = \text{Área del rectángulo E} = 1$$

Usando esta interpretación de la probabilidad como áreas, el 2º axioma $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ significa que el área formada por dos figuras que no se cortan es igual a la suma de las áreas.

PROPIEDADES DE LA PROBABILIDAD

Se deducen a partir de los axiomas. Visualizando geometricamente los sucesos y sus probabilidades como áreas las propiedades son evidentes.

1. $\mathrm{P}(\varnothing) = 0, \quad P(E) = 1$
2. $0 \leq P(A) \leq 1$
3. $\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$
4. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
5. $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$
6. $\boxed{P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)}$
7. Si los sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son icompatibles dos a dos, entonces:
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$
8. Dado el suceso $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, entonces:

$$P(A) = P(a_1) + P(a_2) + \cdots + P(a_n)$$

En los siguientes vídeos se comprueban las propiedades anteriores :

https://youtu.be/6a0wa-2Ra8c https://youtu.be/NMfyqE9jg0g

Veamos ahora como se pueden usar las propiedades anteriores en un problema:

EJEMPLO 1: *En un centro educativo el 83% de los alumnos tiene un teléfono móvil y el 61% tiene un ordenador. Además, se sabe que el 56% tiene móvil y ordenador. Si se escoge un alumno al azar se pide calcular la probabilidad de que:*

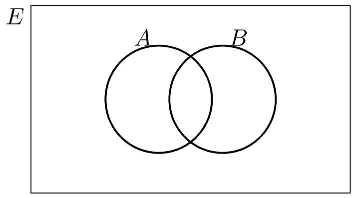
a) tenga móvil o ordenador. *b) no tenga móvil.*

c) tenga ordenador, pero no tenga móvil. *d) no tenga ordenador ni móvil.*

e) no tenga ordenador o no tenga móvil *f)tenga solo uno de los dos dispositivos.*

Antes de nada debemos escribir los datos del problema en el lenguaje de la probabilidad.

La experiencia aleatorio a la que se refiere el enunciado es " Escoger un alumno del centro al azar". Los sucesos involucrados y sus probabilidades son:

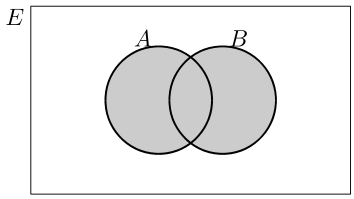


A= " Tener teléfono móvil" *B=" Tener ordenador"*

$P(A) = 0,83 \qquad P(B) = 0,61 \qquad P(A \cap B) = 0,56$

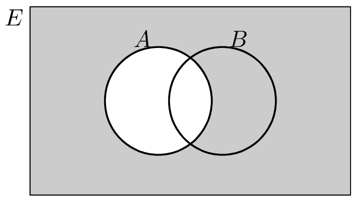
Vamos ahora viendo como son los distintos sucesos que nos

a) Probabilidad de que tenga móvil o ordenador:



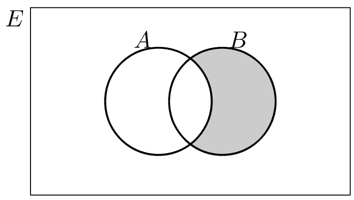
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,83 + 0,61 - 0,56$$
$$= 0,88$$

b) Probabilidad de que no tenga móvil:



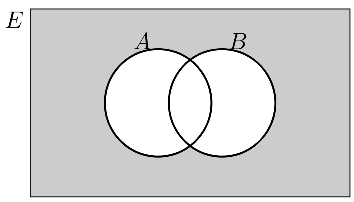
$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,83 = 0,17$$

c) Probabilidad de que tenga ordenador, pero no móvil:



$$P(B - A) = P(B) – P(A \cap B) = 0,61 – 0,56 = 0,05$$

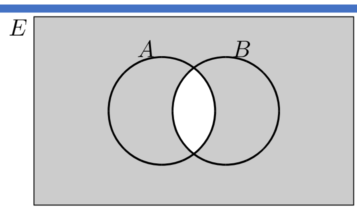
d)Probabilidad de que no tenga ordenador ni móvil:



Para este cálculo usamos la 1ª ley de Morgan: $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 – P(A \cup B) = 1 - 0,88 = 0,12$$

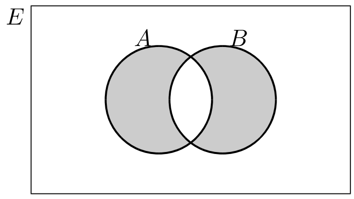
e) Probabilidad de que no tenga ordenador o no tenga móvil:



En este caso usamos la 2ª ley de Morgan: $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$

$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 – P(A \cap B) = 1 - 0,56 = 0,44$

f) Tenga uno solo de los sucesos pedidos:



$P(A \cup B – A \cap B) = P(A \cup B) – P(A \cap B) = 0,88 - 0,56 = 0,32$

EJERCICIOS

1. Razona por qué dos sucesos tales que $P(A)=0{,}7$ y $P(B)=0{,}5$ son necesariamente compatibles.

2. En una localidad hay solamente dos supermercados A y B. El 58% de los habitantes compra en el A, el 35% en el B y el 12% compra en ambos. Si se elige un ciudadano al azar, calcule la probabilidad de que:

   a. Compre en algún supermercado.
   b. No compre en ningún supermercado.
   c. Compre únicamente en el supermercado A.
   d. Compre solamente en un supermercado.

   (Se requiere describir correctamente los sucesos en cada apartado.)

3. En una población del interior de Galicia el 63% de los habitantes miran la televisión diariamente y el 31% escuchan la radio diariamente. Se sabe además que el porcentaje de vecinos que hacen ambas actividades diariamente es de un 10%. Si se escoge un vecino del pueblo al azar se pide determinar:

   a. La probabilidad de que el vecino vea a la televisión o escuche la radio.

   b. La probabilidad de que no realice ninguna de las actividades.

   c. La probabilidad de que vea la televisión pero no escuche la radio.

   d. La probabilidad de que realice unicamente una de las dos actividades.

   (Se requiere describir correctamente los sucesos en cada apartado.)

4. Razona por qué dos sucesos tales que $P(A)=0{,}7$ y $P(B)=0{,}5$ son necesariamente compatibles.

5. Calcular $P(A)$ sabiendo que $P(B)=0{,}8$; $P(A\cap B)=0{,}2$ y que $P(A\cup B)$ es el triple de $P(A)$.

6. Sean A y B dos sucesos verificando: $P(A)=\frac{2}{5}; P(\overline{A}\cup\overline{B})=\frac{14}{15}; P(A\cup B)=\frac{2}{3}$. Se pide calcular $P(B)$ y $P(A\cap B)$.

7. Se sabe que un dado está trucado y que la probabilidad de que salga un 6 es el triple que la probabilidad de cada uno de los restantes lados. Determina la probabilidad de que salga cada una de las caras.

8. En una moneda trucada se sabe que la probabilidad de obtener una cruz es el triple del cuadrado de la probabilidad de obtener una cara. Determinar las probabilidades de cada posible resultado.

9. **(Ampliación)** Razonar la validez de la siguiente propiedad.

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$