

RESUMEN LECCIÓN 7. Representación gráfica

A lo largo de esta sección se va a asumir que la función f es una función dos veces derivable.

Representación de una función – (polinómica o racional)



- 1) DOMINIO.
- 2) PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES.
- 3) ASÍNTOTAS VERTICALES.
- 4) INTERVALOS DE MONOTONÍA. EXTREMOS RELATIVOS.
- 5) INTERVALOS DE CURVATURA. PUNTOS DE INFLEXIÓN.
- 6) RAMAS INFINITAS

1. **DOMINIO:** **F. polinómicas:** \mathbb{R} **F. racionales:** $\mathbb{R} - \{\text{valores que anulan el denominador}\}$

2. **PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES**

CORTE CON:	¿CÓMO SE CALCULA?	¿CUÁNTOS CORTES PUEDE HABER?
eje x	haciendo $y=0$ (habrá que resolver una ecuación)	ninguno, uno, o varios
eje y	sustituyendo $x=0$	uno o ninguno

3. **ASÍNTOTAS VERTICALES**

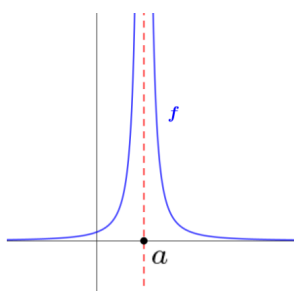
Puede haber asíntotas en los puntos fuera del dominio.

Funciones polinómicas: No tienen.

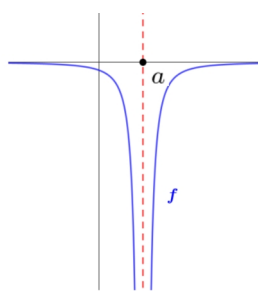
Funciones racionales: puede haber asíntotas en los puntos donde se anula el denominador. Para comprobarlo se calcula el límite de la función en esos puntos.

- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{k}{0}$ con $k \neq 0$ entonces hay una asíntota vertical de ecuación $x = a$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

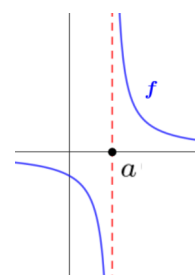


$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$



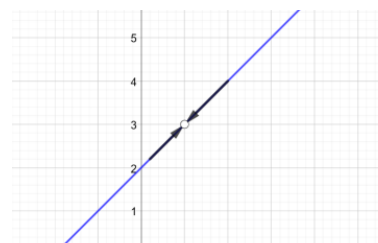
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \#$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$



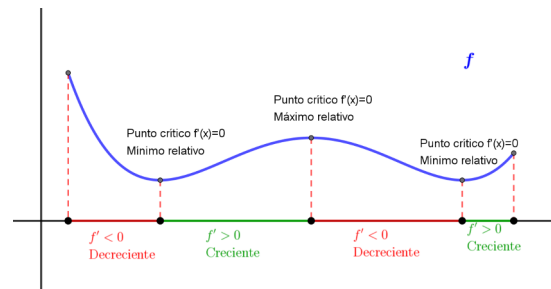
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \in \mathbb{R}$, entonces no es una asíntota vertical.

En este caso habrá que resolver una indeterminación $\frac{0}{0}$ factorizando numerador y denominador y simplificando el término $x - a$



4. **INTERVALOS DE MONOTONÍA. EXTREMOS RELATIVOS.**

Se calculan los **puntos críticos** resolviendo la ecuación $f'(x) = 0$. Estos son los candidatos a extremos relativos.

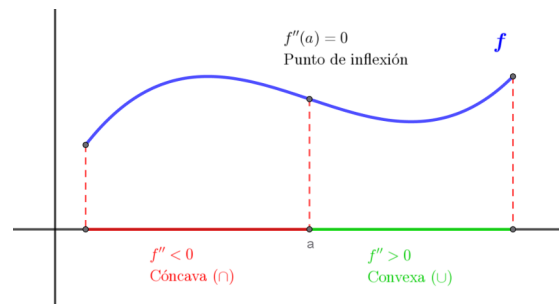


Luego se estudia la monotonía viendo el signo de f' en los intervalos que se obtienen al considerar los puntos críticos en el dominio de f .

5. INTERVALOS DE CURVATURA. PUNTOS DE INFLEXIÓN.

Se resuelve la ecuación $f''(x) = 0$. Estos son los candidatos a puntos de inflexión.

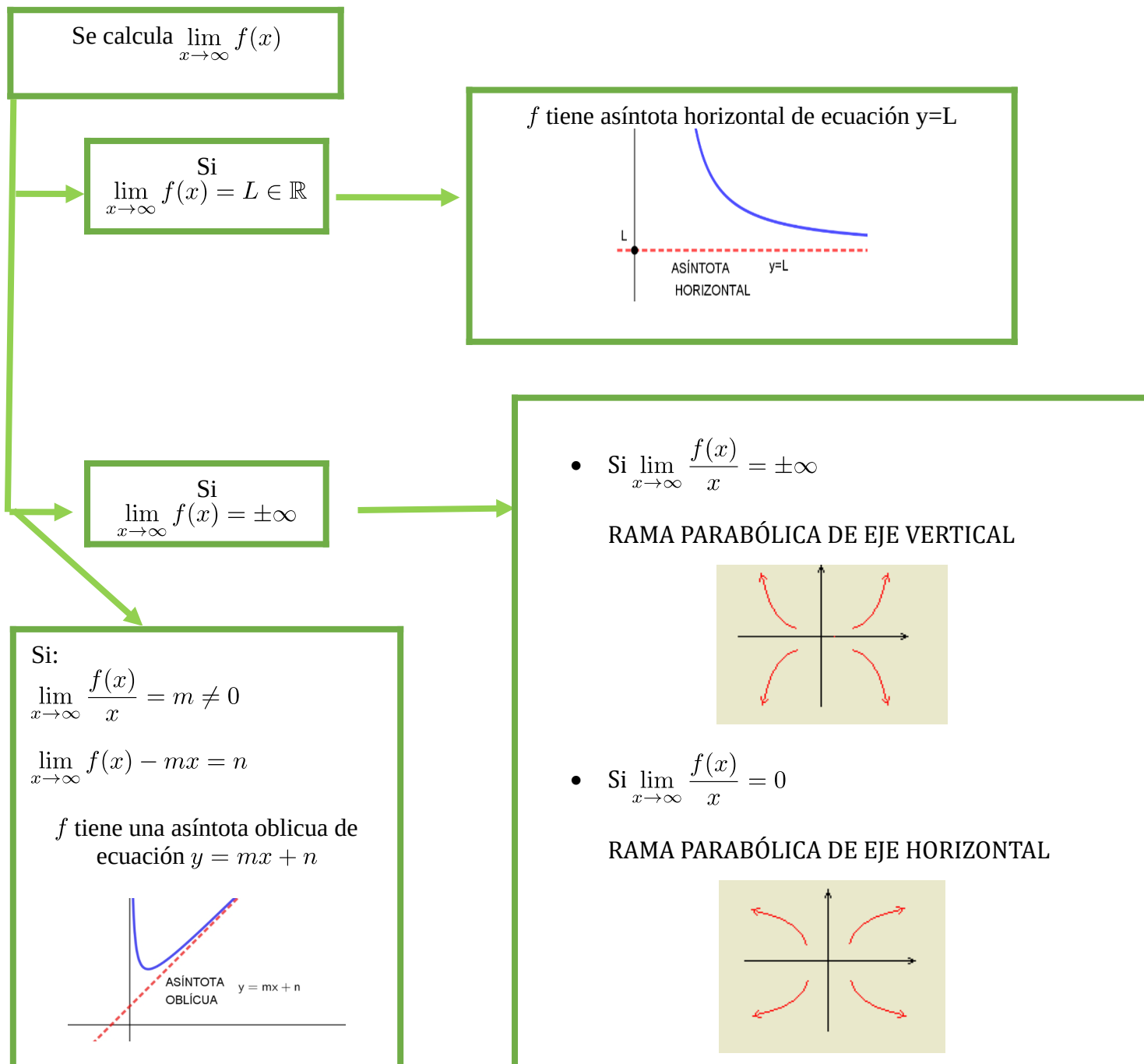
Luego se estudia la curvatura viendo el signo de f'' en los intervalos que se obtienen al considerar los puntos de derivada segunda nula en el dominio de f .



6. RAMAS INFINITAS.

Finalmente se estudia el comportamiento de la función cuando $x \rightarrow \infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$. En ambos casos la función f tiene o una **asíntota horizontal**, una **asíntota oblicua** o una **rama parabólica**.

ESTUDIO DE LAS RAMAS INFINITAS (CUANDO $x \rightarrow \infty$)

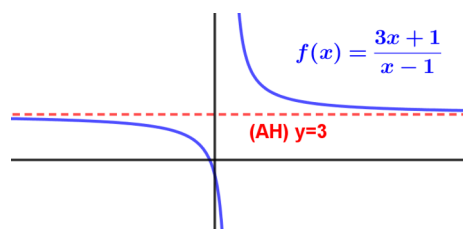


En los casos concretos que nos interesa:

Funciones polinómicas : cuando tienen grado mayor que 1 siempre tienen ramas parabólicas (verticales). En ese caso la función es una recta.

Funciones racionales: Una característica importante de las funciones racionales es que las ramas en ∞ coinciden con las de $-\infty$, por lo que solo hace falta estudiarlas por un lado.

Otra característica importante de las funciones racionales viene dada por las siguientes propiedades:



GRADO NUMERADOR \leq GRADO DENOMINADOR	\implies	ASÍNTOTA HORIZONTAL
GRADO NUMERADOR = GRADO DENOMINADOR + 1	\implies	ASÍNTOTA OBLICUA
GRADO NUMERADOR > GRADO DENOMINADOR + 1	\implies	RAMA PARABÓLICA (DE EJE VERTICAL)

Se exponen a continuación varios ejemplos para visualizar estas propiedades de las funciones racionales.

EJEMPLO 1:

$$f(x) = \frac{2x + 3}{x - 1}$$

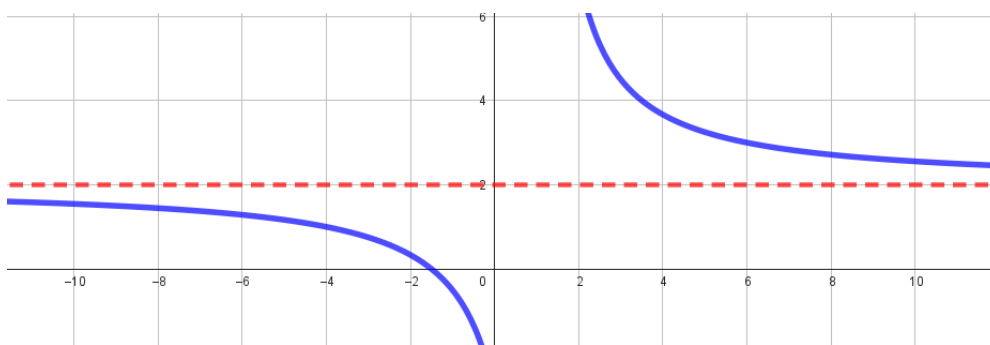
Grado numerador = 1

Grado denominador = 1

Tiene una **asíntota horizontal**. Dado que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x} = 2$$

La asíntota tiene ecuación $y = 2$



EJEMPLO 2:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 2}{x + 1}$$

Grado numerador = 2

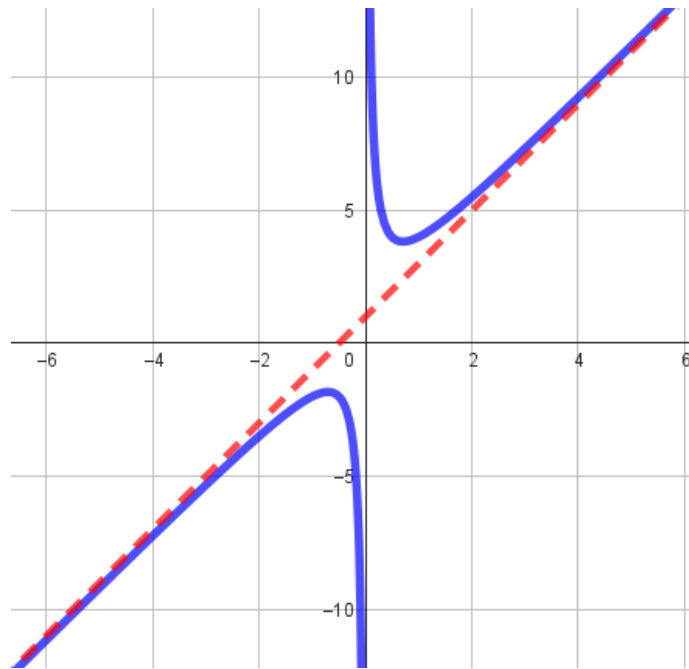
Grado denominador = 1

Tiene una **asíntota oblicua** $y = mx + n$. Los coeficientes se obtienen con los siguientes límites:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2 + 3x + 2}{x + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x + 2}{x(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x + 2}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x + 2}{x + 1} - 2x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x + 2}{x + 1} - \frac{2x^2 - 2x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2}{x + 1} = 1$$

La ecuación de la asíntota es $y = 2x + 1$



EJEMPLO 3:

$$f(x) = \frac{x^5 + x + 5}{x^2 + 2}$$

Grado numerador =5

Grado denominador=2

Rama parabólica (de eje vertical).

